

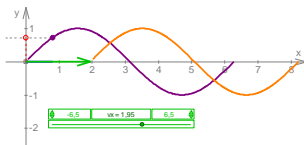
Paderborn	10.11.2011



Medienberatung NRW

## Geometrie und Funktionen – Funktionen und Geometrie

Hans-Jürgen Elschenbroich



Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	3

### Geometrie-Werkzeuge

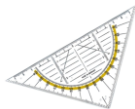
Klassische Werkzeuge: Lineal, Zirkel.

**Basisobjekte:** Gerade, Kreis



Weitere Werkzeuge: Winkelmesser, Geodreieck, Ellipsenzirkel, Parabelzirkel, Storchenschnabel. ...

**Basisobjekte:** angetragener Winkel, Parallele & Senkrechte, Ellipse, Parabel, Vergrößertes, ...



Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	5

### Funktionen

Meraner Reform:

- „Erziehung zur **Gewohnheit des funktionalen Denkens**“

- „diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie **durch fortwährende Betrachtung der Änderungen** gepflegt werden“.

Funktionaler Zusammenhang, funktionales Denken, dynamische Sicht!

Aber unterrichtliche Umsetzung: Funktions**begriff**, statische Sicht. Insbesondere nach 1950.

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	2

### Historische Einordnung

Geometrie: Thema seit Jahrtausenden.  
Euklid, Pythagoras, ...



Funktionen: Thema seit einem Jahrhundert.  
Meraner Reform (1905), Felix Klein



Hilfreich:

Blick auf **Werkzeuge** und zugehörige **Basisobjekte** bzw. **Basisoperationen**.

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	4

### Dynamische Geometrie

Neues, digitales Werkzeug DGS (DynaGeo, GeoGebra, ...)

- ➔ Dynamik: Zugmodus, Ortslinien,
- ➔ erweiterte Konstruktionsbefehle, Makros
- ➔ dynamische Messungen und Berechnungen,
- ➔ Abbildungen, ...

**Basisobjekte u.a.:**

Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Ortslinien, Bilder von Abbildungen wie Achsenspiegelungen etc.

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	6

### Variablen-Verständnis

Keine Funktion ohne Variable. Aspekte von Variablen:

- **Gegenstandsaspekt:** Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl
- **Einsetzaspekt:** Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen einsetzen darf
- **Kalkülaspekt** (Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf).

Malle (1993)

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	7

## Variablen-Verständnis (2)

Weitere Aspekte speziell bei Funktionen:

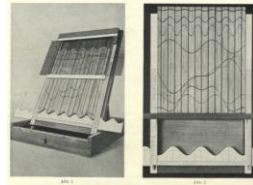
- **Einzelzahlaspekt** (*Variable als beliebige, aber feste Zahl aus dem betreffenden Bereich*)
- **Veränderlichenaspekt** (*alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden in einer zeitlichen Aufeinanderfolge durchlaufen*) und **Simultanaspekt** (*alle Zahlen aus dem Bereich werden gleichzeitig repräsentiert*).

Malle (1993)

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	8

## Funktionen-Werkzeug?

Lange Zeit kein geeignetes Werkzeug zur Darstellung/ Manipulation von Funktionen.  
Vor allem nicht in Schülerhand!



Marzani (1956): Der Funktionenschieber

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	9

## Funktionenplotter

Funktionsgraph: schwieriges Objekt!  
„Kurvendiskussion“: Graph als Krönung

Ab 80-er Jahre: Funktionenplotter (Mathe-Ass etc.),  
später CAS und GTR

Digitales Werkzeug zum Visualisieren von Funktionen.  
**Basisobjekt Funktionsgraph (incl. KOS)**

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	10

## DGS-Funktionenplotter

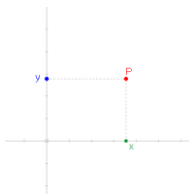
Funktionenplotter: enormer Fortschritt!  
Aber didaktisch **zu großer Schritt?**  
Entschleunigung?

Zwischenschritt: **Punktweise Konstruktion.**

DGS macht Funktionsgraphen dann verstehbar als  
**Ortslinie** von  $P(x/y)$  bei Variation von  $x$ .  
Dynamische Visualisierung im besten Sinne.  
Funktionaler Zusammenhang wird sichtbar!

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	11

## DGS-Funktionenplotter



Zu einem  $x$  gehört ein  $y$  und ein  $P(x/y)$ .  
Der Funktionsgraph entsteht als Ortslinie.

(Elschenbroich, 2003, 2005)

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	12

## DGS-Funktionenplotter dynamisch

Plotten von Funktionen mit Formvariablen (Parametern):  
(Funktionen'schar'). Umsetzung in CAS: Vector-Befehl.

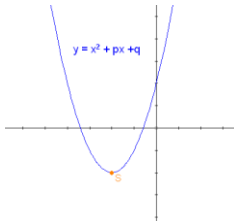
**Basisobjekt:**  
*Funktionsgraph(en) von Funktionen mit Formvariablen.*

DGS: Zu den **jeweiligen** Parameter-Werten ist der  
**zugehörige** Funktionsgraph sichtbar (keine Schar)!  
Funktionsklasse wird durch einen **Prototypen** repräsentiert.

Dynamische Umsetzung durch Schieberegler.

Paderborn		10.11.2011
Einführung	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	13

## DGS-Funktionenplotter dynamisch



(Elschenbroich/ Seebach)

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	14

## 1 Aus der Geometrie zur Funktion

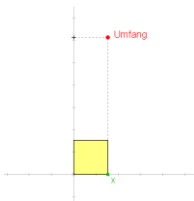
Wo ergibt sich aus der Dynamisierung eines geometrischen Sachverhalts (Formel) ein funktionaler Zusammenhang?!

Formeln: oft nur statisch gesehen, Trennung von Geometrie und Algebra/ Funktionen.

Dynamische Blickweise: nicht neu, aber durch DGS jetzt naheliegend und direkt handhabbar geworden.

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	15

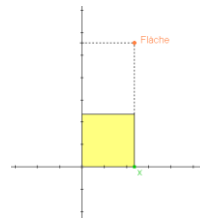
## 1.1 Lineare Funktion



Umfang eines Quadrats mit der Seitenlänge x

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	16

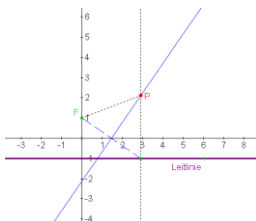
## 1.2. Quadratische Funktion



Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge x

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	17

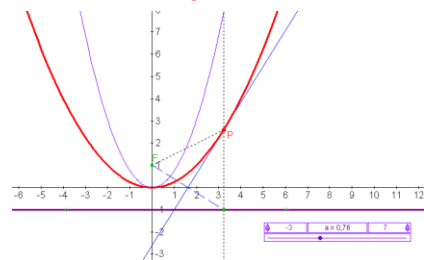
## 1.3 Parabel als geom. Objekt



Punkte gleichen Abstands von Brennpunkt u. Leitlinie. Gleichnis!

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	18

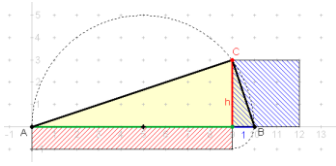
## 1.3 Parabel – quadratische Funktion



Graph einer quadratischen Funktion als Spezialfall (!).

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbräich Funktionen und Geometrie	19

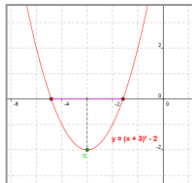
## 1.4 Wurzelziehen geometrisch



Höhensatz. Keine Rechnung!

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbräich Funktionen und Geometrie	21

## 1.6 Quadr. Fkt. Nullstellen-Anzahl

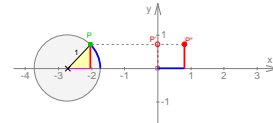


$x_{1,2} = \dots$

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbräich Funktionen und Geometrie	20

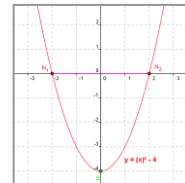
## 1.5 Kreisbewegung, Sinus

Sinus (und Cosinus) aus der Kreisbewegung herleiten. Erklärt die Periodizität der Funktion.



Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbräich Funktionen und Geometrie	22

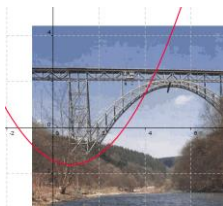
## 1.7 Quadr. Fkt. Nullstellen-Formel



p-q-Formel: „Mitternachtsformel“

Paderborn		10.11.2011
1. Geometrie	H.-J. Elschenbräich Funktionen und Geometrie	23

## 1.9 Quadr. Fkt. Modellierung



Exkurs: Brückenbögen (Kreisbögen, Korbbögen, Parabelbögen)

Paderborn		10.11.2011
2. Funktionen	H.-J. Elschenbräich Funktionen und Geometrie	24

## 2 Transformationen von Funktionen

Einführungsphase Klasse 10 der **Sek II** in NRW:

Funktionen sollen „unter dem gemeinsamen Gesichtspunkt Transformationen und deren Verknüpfung“ betrachtet werden.

(MSW, 2010)

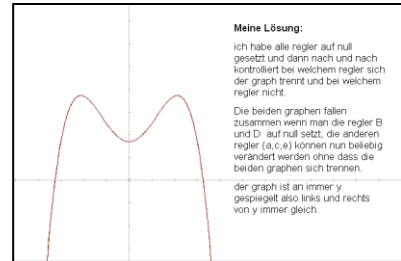
Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrächt Funktionen und Geometrie	25

## 2.1 Spiegelung an der y-Achse



Paderborn		10.11.2011
2. Funktionen	H.-J. Elschenbrächt Funktionen und Geometrie	26

## 2.1 Spiegelung an der y-Achse



Schülerlösung Klasse 10

Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrächt Funktionen und Geometrie	27

## 2.1 Spiegelung an der y-Achse

Funktionsterm der neuen Funktion?

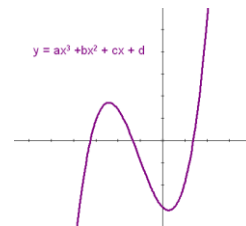
Wann fallen die Graphen zusammen? Symmetrie?

Lösungsheuristik: Spezialfall. Was „stört“?

Funktionsterm einer symmetrischen Funktion?

Paderborn		10.11.2011
2. Funktionen	H.-J. Elschenbrächt Funktionen und Geometrie	28

## 2.2 Punktspiegelung am Ursprung



Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrächt Funktionen und Geometrie	29

## 2.2 Punktspiegelung am Ursprung

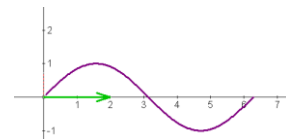
Funktionsterm der neuen Funktion?

Wann fallen die Graphen zusammen? Symmetrie?

Funktionsterm einer symmetrischen Funktion?

Paderborn		10.11.2011
2. Funktionen	H.-J. Elschenbrächt Funktionen und Geometrie	30

## 2.3 Verschiebung längs der x-Achse



Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrädt Funktionen und Geometrie	31

## 2.3 Verschiebung längs der x-Achse

Periodizität von sinus,

Zusammenhang sinus – cosinus.

Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrädt Funktionen und Geometrie	33

## 2.4 Verschiebung(en)

Von der Normalform  $y = x^2 + px + q$  zur  
**Scheitelpunktsform.**

Verschiebung von O auf S in zwei Schritten:

Verschiebung um  $-p/2$  in x-Richtung und um  $-p^2/4 + q$  in y-Richtung.

Schüler: Experimenteller Zugang, konkrete Zahlen.  
Muss dann algebraisch vertieft werden.

Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrädt Funktionen und Geometrie	35

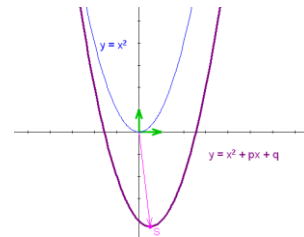
## 2.5 Spiegelung an der Achse $y = x$

Umkehrbarkeit: Parabel-Scheitelpunkt.

Spurmodus (punktweise).

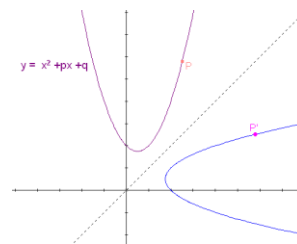
Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrädt Funktionen und Geometrie	32

## 2.4 Verschiebung(en)



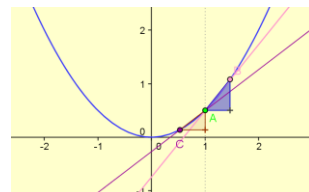
Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrädt Funktionen und Geometrie	34

## 2.5 Spiegelung an der Achse $y = x$



Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbrädt Funktionen und Geometrie	36

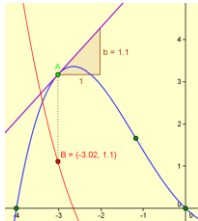
## 2.6 Sekanten/ Tangente



Grenzprozess  $h \rightarrow 0$  visualisieren.  
Übergang zur Ableitungsfunktion: Ortslinie!

Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	37

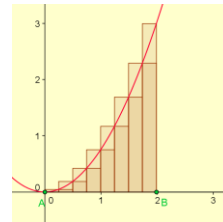
## 2.7 Ableitungsfunktionen



Zusammenhang der Funktionen  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  interaktiv.

Paderborn		10.11.2011
2. Funktionen	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	38

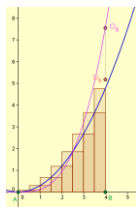
## 2.11 Untersumme/ Obersumme



Grenzprozess  $h \rightarrow 0$  visualisieren.

Paderborn		10.11.2011
2.Funktionen	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	39

## 2.11 Hin zur Integral-Funktion



Übergang zur Integralfunktion: Ortslinie!

Paderborn		10.11.2011
	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	40

## Fazit

Dynamische Sicht auf Geometrie: führt naturwüchsig zur Betrachtung funktionaler Zusammenhänge.

Punktweise dynamische Sicht von Funktionsgraphen: wesentlich und hilfreich für Verständnis.

Geometrische Transformationen von Funktionsgraphen: führen zu einem tieferen Verständnis von Funktionen.

Visualisierung von Grenzprozessen bei Differenzen bzw. Summen, anschaulicher Zugang zu Ableitung u. Integral.

Dynamischer Zugang ermöglicht eine **dynamische Visualisierung**, besserer Aufbau von **Grundverständnis**.

Paderborn		10.11.2011
	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	41

## Literatur

- Elschenbroich, H.-J. (2010): Ein dynamischer Zugang zu Geometrie und Funktionen. In: Praxis der Mathematik, Heft 34
- Elschenbroich, H.-J. (2003): Ein dynamischer Zugang zu Funktionen und Gleichungen. In: MNU 56/8.
- Elschenbroich, H.-J. (2005): Funktionen dynamisch erkunden. In: Barzel/Hußmann/Leuders (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Cornelsen Scriptor
- Elschenbroich, H.-J. / Seebach, G. (1998 - 2003): Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter für Euklid-DynaGeo. Klasse 5 – 10. CoTec, Rosenheim
- Elschenbroich, H.-J. / Seebach, G. (2010): Dynamisch Funktionen entdecken. Fortbildungskurs 058 im Rahmen von Mathematik Anders Machen <http://www.schule-interaktiv.de/mathematik-anders-machen/math-anders-kursangebot/themen/math-und-ische-angebote/index.php?ID=52>

Paderborn		10.11.2011
	H.-J. Elschenbroich Funktionen und Geometrie	42

## Literatur

- Gutzmer, A. (1908): Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Reformvorschläge von Meran. Nachdruck in: MU 26 (1980) Nr. 6, 53 - 62.
- Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren 103
- Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2010): Handreichungen zum Übergang an der Schnittstelle zwischen Klasse 9 und der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe. Düsseldorf
- Schumann, H. (1998): Dynamische Behandlung elementarer Funktionen mittels Cabri Géomètre II. In: MNU 51/3
- Seebach, G. (2011): Ableitungsregeln mit GeoGebra selbst entdecken – nicht nur für Polynome. In: Kaenders/ Schmidt (Hrsg.): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Vieweg + Teubner