Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
PROF. I. BURBAN und H. HERR

SS 2019
Mittwoch, 10.04.2019
Blatt 1

Übungen zur Algebra

Aufgabe 1.[je 2 Punkte] Bestimmen Sie, ob folgende Operationen assoziativ sind.
(1) $\diamond\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $(m, n) \mapsto m \diamond n := \max\{m, n\}$.
(2) $\diamond\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto x \diamond y := \ln(e^x + e^y)$.

Aufgabe 2.[je 3 Punkte] Untersuchen Sie bei den folgenden Mengen, ob die Multiplikation eine sinnvolle Operation definiert. Prüfen Sie in diesen Fällen nach, ob es sich sogar um Gruppen handelt.
(1) $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ für ein fixes $a \in \mathbb{R}^*$.
(2) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\}$ für ein fixes $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(3) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$
(4) $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$

Aufgabe 3.[4 Punkte] Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X) := \{A \subset X\}$ die *Potenzmenge* von X, das heißt, die Menge aller Teilmengen von X. Zu $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir die *symmetrische Differenz* als

$$A \mathbin{\triangle} B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 4.[4 Punkte] Für $x, y \in [0, 1)$ definieren wir

$$x \oplus y := \{x + y\} = \begin{cases} x + y & \text{falls } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{falls } x + y \geq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $[0, 1)$ mit der Operation $\oplus$ eine Gruppe ist.
Hinweis: Diese Gruppe ist isomorph zu einer der Gruppen aus Aufgabe 2.

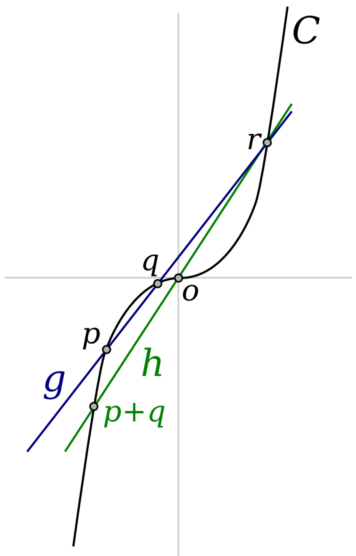
Aufgabe 5.[2 Punkte] Sei H eine nichtleere Teilmenge von G. Zeigen Sie:
H ist eine Untergruppe von $G \iff h_1 h_2^{-1} \in H$ für alle $h_1, h_2 \in H$.

Aufgabe 6 (Bonus).[7 Punkte] Wir betrachten die folgende Kurve C im $\mathbb{R}^2$:

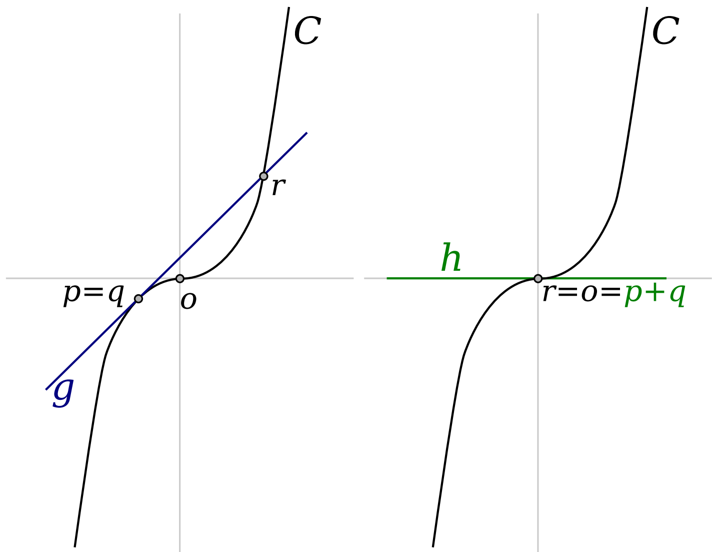
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$$

Seien $p, q \in C$ zwei verschiedene Punkte auf dieser Kurve. Sei g die Gerade durch p und q und angenommen g schneidet C in einem weiteren Punkt r, der von p, q und dem Ursprung o verschieden ist:

Bitte wenden!



Sei h die Gerade durch r und o. Wir bezeichnen den dritten Schnittpunkt mit $p \oplus q$.
Falls in dieser Konstruktion die Anforderung nicht erfüllt ist, dass alle Schnittpunkte verschieden sind, dann behelfe man sich mit einer Tangente, zum Beispiel für $p = q$ oder für $r = o$:



(1) Überlegen Sie sich, dass sich damit eine sinnvolle Operation

$$\oplus \colon C \times C \to C, \quad (p, q) \mapsto p \oplus q$$

definiert lässt.

(2) Zeigen Sie, dass $(C, \oplus)$ eine Gruppe ist.
Hinweis: Bestimmen Sie die Koordinaten des dritten Schnittpunkts r in Abhängigkeit von p und q.

Abgabe: Dienstag, 16.04.2019, 09:00 Uhr.