Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Mittwoch, 19.06.2019
Blatt 10

Übungen zur Algebra

Aufgabe 54.[je 2 Punkte] Teilen Sie das Polynom f_i mit Rest durch g_i in $\mathbb{Q}[x]$:
(1) $f_1 = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ und $g_1 = x^2 - 3x + 1$;
(2) $f_2 = x^3 - 3x^2 - x - 1$ und $g_2 = 3x^2 - 2x + 1$.

Aufgabe 55. [je 2 Punkte] Seien $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ und $g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ zwei Polynome in $\mathbb{Q}[x]$.
(1) Bestimmen Sie $h = \mathrm{ggT}(f, g)$ sowie eine Darstellung $h = uf + vg$ mit $u, v \in \mathbb{Q}[x]$.
(2) Ist $\bar{f}$ invertierbar in $\mathbb{Q}[x]/g$? Falls ja, bestimmen Sie das Inverse $\bar{f}^{-1}$.
(3) Sei $h = x - 1$. Ist $\bar{h}$ invertierbar in $\mathbb{Q}[x]/g$? Falls ja, bestimmen Sie das Inverse $\bar{h}^{-1}$.

Aufgabe 56. [3 Punkte] Sei $R = \mathbb{Z}[x]$ und $I = \big\{f \in R \mid f(0) \equiv 0 \bmod 2\big\}$. Beweisen Sie, dass I ein Ideal in R ist, welches jedoch kein Hauptideal ist.

Aufgabe 57. [4 Punkte] Seien R ein Euklidischer Ring und $\Pi \subset R$ ein Repräsentantensystem der Menge der Äquivalenzklassen der Primelemente von R. Für $a, b \in R \setminus \{0\}$ setzen wir:

$$a \sim \prod_{p \in \Pi} p^{n_p} \quad \text{und} \quad b \sim \prod_{p \in \Pi} p^{m_p},$$

wobei $n_p = 0 = m_p$ für alle $p \in \Pi$ bis auf endlich viele Ausnahmen ist. Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{ggT}(a, b) \sim \prod_{p \in \Pi} p^{\min(n_p, m_p)} \quad \text{und} \quad \mathrm{kgV}(a, b) \sim \prod_{p \in \Pi} p^{\max(n_p, m_p)}.$$

Aufgabe 58. [je 2 Punkte] Seien R ein Euklidischer Ring und $b_1, \dots, b_n \in R$ so dass gilt: $\mathrm{ggT}(b_i, b_j) = 1$ für alle $1 \le i \neq j \le n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(1) $\mathrm{kgV}(b_1, \dots, b_n) \sim b_1 \dots b_n$.
(2) $\mathrm{ggT}(a_i, b_i) = 1$ für alle $1 \le i \le n$, wobei $a_i = b_1 \dots \widehat{b_i} \dots b_n$.

Aufgabe 59. [2 + 2 Punkte] Bestimmen Sie die kleinste positive Lösung x_i folgender Kongruenzen:

Bitte wenden!

$$(1) \begin{cases} x_1 \equiv 3 \bmod 4 \\ x_1 \equiv 7 \bmod 9 \\ x_1 \equiv 1 \bmod 5 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x_2 \equiv 3 \bmod 8 \\ x_2 \equiv 2 \bmod 9 \\ x_2 \equiv 4 \bmod 5 \end{cases}$$

Aufgabe 60 (Bonus). [3 Punkte] Bestimmen Sie den Erzeuger des Hauptideals $(16-3i,\ 6-8i)$ im Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 61 (Bonus). [2 Punkte] Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{R}[x]$. Es ist -1 eine Nullstelle von f, wie sich durch Einsetzen überprüfen lässt. Bestimmen Sie, welche Werte $a \in \mathbb{R}$ annehmen muss, damit -1 eine Nullstelle mit Vielfachheit ≥ 2 ist.

Aufgabe 62 (Bonus). [3 Punkte] Sei K ein Körper mit q Elementen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$x^q - x = \prod_{a \in K} (x - a)$$

Aufgabe 63 (Bonus). [4 Punkte] Sei R ein Euklidischer Ring. Beweisen Sie, dass jedes Element $a \in R$ geschrieben werden kann als ein Produkt aus Primelementen.

Abgabe: Dienstag, 25.06.2019, 9:00 Uhr.