Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
PROF. I. BURBAN und H. HERR

SS 2019
Mittwoch, 03.07.2019
Blatt 12

Übungen zur Algebra

Aufgabe 71.[1+1+3 Punkte] Beweisen Sie, dass die folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel sind.

(1) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$ (2) $x^5 + 3x^2 + \frac{15}{2}$ (3) $x^3 + x + 4$

Aufgabe 72.[2+3+3 Punkte] Bestimmen Sie

(1) alle normierten (d.h. mit Leitterm 1) irreduziblen Polynome über $\mathbb{Z}_3$ vom Grad 2.

(2) alle normierten irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 über dem Körper $\mathbb{Z}_2$.

(3) die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grad 5 über $\mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 73.[5 Punkte] Sei K ein Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der normierten irreduziblen Polynomen über K vom Grad 2 und 3.

Aufgabe 74.[je 4 Punkte] Sei $\Gamma = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle \subset \mathbb{Z}^3$, wobei

(1) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, bzw.

(2) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zerlegen Sie die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^3/\Gamma$ in eine direkte Summe von zyklischen Gruppen.

Aufgabe 75.[4 Punkte] Sei $\Gamma = \langle \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^n$, wobei

$$\vec{a}_\jmath = \begin{pmatrix} a_{1\jmath} \\ \vdots \\ a_{n\jmath} \end{pmatrix} \text{ für } 1 \leq \jmath \leq n \text{ ist.}$$

Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}^n/\Gamma$ genau dann endlich ist, wenn $\det\big(a_{\imath\jmath}\big) \neq 0$ ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass in diesem Fall gilt:

$$\big|\mathbb{Z}^n/\Gamma\big| = \big|\det(a_{\imath\jmath})\big|.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 76.[2+4+2+4 Punkte] Seien A und B abelsche Gruppen und $\mathrm{Hom}(A, B)$ die Menge aller Homomorphismen von A nach B. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(A, B)$ definieren wir $\alpha + \beta \in \mathrm{Hom}(A, B)$ nach der Regel:

$$(\alpha + \beta)(a) = \alpha(a) + \beta(a), a \in A.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(A, B)$ eine abelsche Gruppe ist.

(2) Konstruieren Sie Isomorphismen $\mathrm{Hom}(A_1 \times A_2, B) \cong \mathrm{Hom}(A_1, B) \times \mathrm{Hom}(A_2, B)$ und $\mathrm{Hom}(A, B_1 \times B_2) \cong \mathrm{Hom}(A, B_1) \times \mathrm{Hom}(A, B_2)$.

(3) Zeigen Sie, dass die abelschen Gruppen A und $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ isomorph sind.

(4) Bestimmen Sie die Gruppen

- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_8)$
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_6)$

Aufgabe 77 (Bonus).[6 Punkte] Zerlegen Sie das Polynom $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ in ein Produkt irreduzibler Polynome für $5 \leq n \leq 12$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 78 (Bonus).[5+7 Punkte] Zeigen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome f über $\mathbb{Z}$:

(1) $f = x^p + px - 1$ für jede Primzahl p.
(2) $f = x^4 - 42x^2 + 1$.

Abgabe: Dienstag, 09.07.2019, 9:00 Uhr.