

Übungen zur Algebra

Auf diesem Blatt bezeichne G stets eine Gruppe.

Aufgabe 7.[2+4 Punkte] Zu $g \in G$ definieren wir den *Zentralisator* von g als

$$Z_g := \{h \in G \mid hg = gh\}.$$

- (1) Zeigen Sie, dass Z_g eine Untergruppe von G ist.
- (2) Bestimmen Sie den Zentralisator folgender Elemente von $GL_n(K)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper sei:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in K^* \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \neq \lambda_j \in \mathbb{K}^*.$$

Aufgabe 8.[je 1 Punkt] Bestimmen Sie die Ordnung folgender Elemente:

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \Sigma_5$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \Sigma_6$
- (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$
- (4) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \in \mathbb{C}^*$

Aufgabe 9.[(2+2)+(2+2)+(2+2)+(4+2) Punkte] Sei G' eine weitere Gruppe. Dazu definieren wir

$$\text{Hom}(G, G') := \{\phi: G \rightarrow G' \mid \phi \text{ Gruppenhomomorphismus}\}.$$

Bestimmen Sie folgende Mengen:

- (1) $\text{Hom}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6)$
- (2) $\text{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4)$
- (3) $\text{Hom}(\Sigma_2, \Sigma_3)$
- (4) $\text{Hom}(\Sigma_3, \Sigma_2)$

Weiter, bestimmen Sie für jeden Gruppenhomomorphismus den Kern und das Bild.

Aufgabe 10.[4 Punkte] Sei G eine endliche Gruppe und $K \subset H \subset G$ Untergruppen. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$(G : K) = (G : H) \cdot (H : K).$$

Abgabe: verschoben: Dienstag, 23.04.2019, 11:00 Uhr.