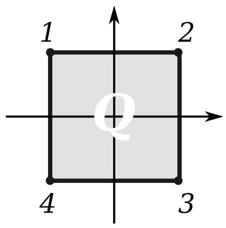
Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Mittwoch, 24.04.2019
Blatt 3

Übungen zur Algebra

Aufgabe 11.[3 Punkte] Beweisen Sie, dass jede Untergruppe bzw. Faktorgruppe einer zyklischen Gruppe auch zyklisch ist.

Aufgabe 12.[2+3 Punkte] Sei Q das Quadrat in $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$.



Dazu betrachten wir die Gruppe $H := \{g \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \mid g(Q) = Q\}$.
(1) Beschreiben Sie H als Untergruppe von Σ_4, und bestimmen Sie $|H|$.
(2) Ist $H \subset \Sigma_4$ ein Normalteiler?

Aufgabe 13.[1+3+3 Punkte] Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $P = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ definieren wir

$$A = \{g \in G \mid |\det(g)| = 1\} \text{ und } M = \{g \in G \mid \det(g) > 0\}.$$

(1) Beweisen Sie, dass P, A, M Normalteiler in G sind.
(2) Zeigen Sie, dass es folgende Isomorphismen gibt:

$$G/P \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^* \qquad G/A \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \qquad G/M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2$$

(3) Bestimmen Sie explizit die Gruppen A/P, M/P und MA.

Aufgabe 14.[4 Punkte] Sei G eine endliche Gruppe, $H \triangleleft G$ ein Normalteiler und $g \in G$ mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{ggT}(\mathrm{ord}(g), (G : H)) = 1$ ist. Beweisen Sie, dass bereits $g \in H$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie das Bild von g unter $G \to G/H$.

Aufgabe 15.[3 Punkte] Seien G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index 2. Beweisen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist.
Hinweis: Stellen Sie G als eine disjunkte Vereinigung der Links- bzw. Rechtsnebenklassen von H dar.

Aufgabe 16 (Bonus).[6 Punkte] Sei $G = \mathbb{Q}^*_{>0}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung. Wir definieren

$$H = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \text{ ungerade und } \mathrm{ggT}(m, n) = 1 \right\}.$$

Beweisen Sie, dass es einen Isomorphismus $G/H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ gibt.

Abgabe: Dienstag, 30.04.2019, 9:00 Uhr.