Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Freitag, 03.05.2019
Blatt 4

Übungen zur Algebra

Aufgabe 17.[2 Punkte] Sei G eine Gruppe und

$$\Delta := \{(g, g) \mid g \in G\} \subset G \times G$$

Beweisen Sie, dass Δ in $G \times G$ genau dann normal ist, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 18.[3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_3$ eine Untergruppe U von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ bilden. Gilt $U \cong \mathbb{Z}_4$?

Aufgabe 19.[5 Punkte] G und $\widetilde{G}$ bezeichnen endliche Gruppen, H sei eine Untergruppe von G und $f : G \longrightarrow \widetilde{G}$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie, dass

$$\big(G : H\big) = \big(f(G) : f(H)\big) \cdot \big(\ker(f) : \ker(f) \cap H\big).$$

Aufgabe 20 (Bonus).[6 Punkte] Sei G eine endliche Gruppe, in welcher jede Untergruppe ein Normalteiler ist. Ist G dann abelsch? Beweisen Sie es bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel.

Abgabe: Dienstag, 07.05.2019, 9:00 Uhr.