Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Mittwoch, 15.05.2019
Blatt 6

Übungen zur Algebra

Aufgabe 26.[1+1+3+4 Punkte] Wir betrachten die Kleinsche Vierergruppe V_4 sowie A_4 in Σ_4.

(1) Beweisen Sie, dass $V_4 \triangleleft A_4$.

(2) Bestimmen Sie die Faktorgruppe A_4/V_4.

(3) Beweisen Sie, dass $(1\ 2\ 3)$ und $(1\ 3\ 2)$ in A_4 nicht konjugiert sind.
Hinweis: Verwenden Sie $A_4 \twoheadrightarrow A_4/V_4$.

(4) Bestimmen Sie die Anzahl der Konjugationsklassen von A_4.

Aufgabe 27 (Bonus).[6 Punkte] Beweisen Sie, dass A_4 isomorph zur Gruppe $\langle x, y \mid x^3 = e, y^3 = e, (xy)^2 = e \rangle$ ist.

Aufgabe 28.[6 Punkte] Bestimmen Sie die Anzahl der Konjugationsklassen in der Diedergruppe D_n.
Hinweis: Zeigen Sie, dass alle Spiegelungen zueinander konjugiert sind, falls n ungerade ist; dass diese aber zwei Konjugationsklassen bilden, falls n gerade ist.

Aufgabe 29.[2+4+2 Punkte] Wir betrachten folgende zwei Matrizen aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in der Untegruppe $\langle S, T \rangle \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegen.

(2) Beweisen Sie ferner, dass $\langle S, T \rangle = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine allgemeine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ stets $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt. Geben Sie dann an, wie durch Spaltenumformungen mit S und T erreicht werden kann, dass $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

(3) Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Homomorphismus

$$\phi\colon \left\langle s, t \mid s^4 = e, s^2 t = t s^2, tst = st^{-1}s \right\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gibt.
Bemerkung: Man kann zeigen, dass ϕ sogar ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 30.[3+3 Punkte] Wir betrachten die Elementarmatrizen $E_{i,j}(\lambda) \in GL_n(K)$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K$ als (i, j)-Eintrag in $E_{i,j}(\lambda)$.

(1) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle E_{i,j}(\lambda) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \lambda \in K \rangle = U,$$

wobei wir mit U die unipotenten oberen Dreiecksmatrizen bezeichnen (d.h. die oberen Dreiecksmatrizen mit 1'en auf der Diagonalen).

Bitte wenden!

(2) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle E_{i,j}(\lambda) \mid 1 \leq i \neq j \leq n,\ \lambda \in K \rangle = SL_n(K).$$

Abgabe: Dienstag, 21.05.2019, 9:00 Uhr.