Mathematisches Institut
der Universität zu Köln
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Mittwoch, 29.05.2019
Blatt 7– Lösungen

Übungen zur Algebra

Alle Aufgaben lassen sich mithilfe der Bahnformel II (Lemma von Burnside) lösen. Die Vorgehensweise ist dabei stets die folgende:

(1) Bestimmung der Menge M aller Konfigurationen (noch ohne Berücksichtigung der Symmetrie).
(2) Bestimmung der Gruppe G und seiner Wirkung auf M.
(3) Für die Bahnformel
$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$
ist die Bemerkung hilfreich, dass $\chi(g) = \chi(h)$ für $g \sim h$ ist. Wenn also die Konjugationsklassen von G bekannt sind (aus der Vorlesung oder aus früheren Übungen), dann reicht es, $\chi(g)$ für ein einzelnes g aus jeder Konjugationsklasse zu bestimmen. Am Ende muss dann $\chi(g)$ mit der Mächtigkeit der entsprechenden Konjugationsklasse multipliziert werden.

Aufgabe 31.[5 Punkte] Gegeben sei ein Quadrat ⊞, das in 3×3 Felder unterteilt ist. Nun soll jedes Feld entweder gelb oder blau gefärbt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen bis auf Drehung des Quadrats.

Hier sind drei mögliche Färbungen, wobei die erste und letzte als gleich angesehen werden.

Lösung. Wir numerieren die Felder des Quadrats folgendermaßen:

7	6	5
8	9	4
1	2	3

Für $1 \leq i \leq 9$ sei $a_i \in \{\text{blau}, \text{gelb}\}$ seine Färbung. Damit ist die Menge M aller Färbungen $M = \{(a_1, \dots, a_9) \mid a_i \in \{\text{blau}, \text{gelb}\}\}$. Diese Menge hat die Mächtigkeit $|M| = 2^9$.
Die Gruppe G, die auf M operiert, sind alle Drehungen des Quadrats, also Vielfache der Drehung um $\frac{\pi}{2}$. Damit ist $G \cong \mathbb{Z}_4$, insbesondere ist $|G| = 4 = 2^2$.
Da G kommutativ ist, bestehen die Konjugationsklassen aus je einem Element. Für die Bahnformel bestimmen wir die Fixpunktmengen zu $g \in G$.

$g = e$: Hier ist die Fixpunktmenge ganz M mit $|M| = 2^9$.

$g = b_{\frac{\pi}{2}}$ (Drehung um $\frac{\pi}{2}$): Diese Drehung schickt Feld 1 auf Feld 3, Feld 3 auf Feld 5, Feld 5 auf Feld 7 und Feld 7 auf Feld 1. Damit müssen alle diese Felder gleich gefärbt sein, um fix unter g zu sein. Auch haben wir Feld $2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 8 \mapsto 2$, sodass auch diese gleich gefärbt sein müssen, um ein Fixpunkt der Operation zu sein. Sobald wir also die drei Felder 1, 2 und 9 (beliebig) färben, sind die restlichen Felder einer fixen Färbung bereits festgelegt. Wir erhalten also 2^3 Fixpunkte der Operation mit $b_{\frac{\pi}{2}}$.
$g = b_\pi$: Diese Drehung schickt die Felder $1 \mapsto 5 \mapsto 1$, $2 \mapsto 6 \mapsto 2$, $3 \mapsto 7 \mapsto 3$ und $4 \mapsto 8 \mapsto 4$. Sobald wir also die fünf Felder $1, 2, 3, 4$ und 9 (beliebig) färben, sind die restlichen Felder einer fixen Färbung bereits festgelegt. Wir erhalten also 2^5 Fixpunkte der Operation mit b_π.
$g = b_{\frac{3\pi}{2}}$: Hier argumentieren wir analog zum Fall $g = b_{\frac{\pi}{2}}$ (unterscheidet sich nur um die Drehrichtung) und erhalten wiederum 2^3 Fixpunkte dieser Operation.

Eingesetzt in die Bahnformel erhalten wir

$$|M/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \frac{1}{2^2}\cdot(2^9+2^3+2^5+2^3) = 2^7+2+2^3+2 = 128+2+8+2 = 140$$

verschiedene Möglichkeiten, dieses Quadrat bis auf Drehung zu färben.

Alternative Interpretation der Angabe: Falls die Färbungen des Quadrats bis auf Drehung im $\mathbb{R}^3$ gezählt werden, dann ist die operierende Gruppe $G' = D_4$ die Diedergruppe. Die Konjugationsklassen davon sind aus Aufgabe 28 vom Blatt 6 bekannt, nämlich

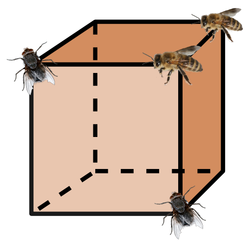
$$\{e\}, \{b_{\frac{\pi}{2}}, b_{\frac{3\pi}{2}}\}, \{b_\pi\}, \{s, sb_\pi\}, \{sb_{\frac{\pi}{2}}, sb_{\frac{3\pi}{2}}\}.$$

Mit einer ähnlichen Rechung erhalten wir

$$|M/G'| = \frac{1}{2^3}\cdot(2^9 + 2\cdot 2^3 + 2^5 + 2\cdot 2^6 + 2\cdot 2^6) = 102$$

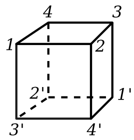
Möglichkeiten, das Quadrat zu färben.

Aufgabe 32.[6 Punkte] Gegeben sei ein Holzwürfel, sowie je zwei ununterscheidbare Fliegen und Bienen. Bestimmen Sie, wieviele Möglichkeiten es bis auf Drehung des Würfels gibt, diese Insekten auf seinen Ecken zu platzieren.



Eine mögliche Konfiguration.

Lösung. Wir numerieren die Ecken wie in der Vorlesung, als die Drehgruppe G des Würfels untersucht wurde:

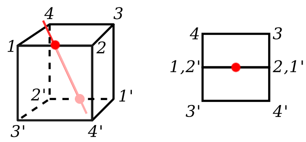


Damit ist die Menge M aller zulässigen Konfigurationen

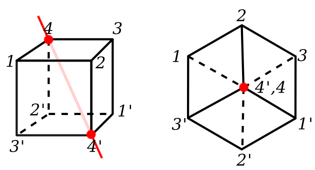
$$M = \left\{ (a_1, \dots, a_4, a_{1'}, \dots, a_{4'}) \mid \begin{array}{c} a_i, a_{i'} \in \{\text{leer, Fliege, Biene}\}, \\ \#\{i \mid a_i = \text{Fliege}\} + \#\{i' \mid a_{i'} = \text{Fliege}\} = 2, \\ \#\{i \mid a_i = \text{Biene}\} + \#\{i' \mid a_{i'} = \text{Biene}\} = 2 \end{array} \right\}$$

Die Drehgruppe G des Würfels ist isomorph zu Σ_4, wobei die Operation durch das Vertauschen der 4 Raumdiagonalen des Würfels zustande kommt. Es ist $|\Sigma_4| = 4! = 24$. Wir brauchen im folgenden nur die Fixpunktmenge zu einem Element g pro Konjugationsklasse zu bestimmen, da $\chi(g) = \chi(h)$ für $g \sim h$ (am Ende muss natürlich mit der Mächtigkeit der Konjugationsklasse multipliziert werden).
Für die Bahnformel bestimmen wir nun die Fixpunktmengen zu $g \in G$.

$g = e$: Hier werden alle Elemente von M fix gelassen. Die Mächtigkeit von M ist die Anzahl der Möglichkeiten 2 Fliegen auf die 8 Ecken zu platzieren und anschließend 2 Bienen auf den restlichen 6 Ecken zu platzieren. Also ist $\chi(e) = |M| = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 28 \cdot 15 = 420$.
$g = (1\ 2)$: Das ist die Drehung um folgende Achse um π (das rechte Bild zeigt den Würfel aus Richtung der Drehachse):

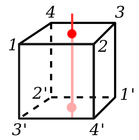


Unter der Wirkung von g haben wir folgende vier Bahnen der Ecken: $1 \mapsto 2 \mapsto 1$, $1' \mapsto 2' \mapsto 1'$, $3 \mapsto 3' \mapsto 3$ und $4 \mapsto 4' \mapsto 4$. Damit eine Konfiguration fix bleibt, müssen alle Ecken einer Bahn gleich aussehen (entweder leer, mit Bienen oder mit Fliegen besetzt). Das heißt wir wählen für die beiden Bienen eine der vier Bahnen und für die beiden Fliegen eine aus den restlichen drei. Also ist $\chi((1\ 2)) = 4 \cdot 3 = 12$. Die Konjugationsklasse von $(1\ 2)$ besteht aus allen Transpositionen $(i\ j)$, das sind insgesamt 6 Elemente.
$g = (1\ 2\ 3)$: Das ist die Drehung um folgende Achse um $\frac{2\pi}{3}$ (das rechte Bild zeigt den Würfel aus Richtung der Drehachse, von $4'$ aus gesehen):



Unter der Wirkung von g haben wir folgende Bahnen der Ecken: $1 \mapsto 2' \mapsto 3 \mapsto 1$, $1' \mapsto 2 \mapsto 3' \mapsto 1$, des weiteren bleiben 4 und $4'$ fix. Da die Bahnen $1 \mapsto 2' \mapsto 3 \mapsto 1$

und $1' \mapsto 2 \mapsto 3' \mapsto 1$ aus je drei Elementen bestehen, müssen diese leer bleiben (weil wir nicht 3 Bienen bzw. Fliegen zur Verfügung haben). Damit bleiben aber nur noch 4 und $4'$ als Plätze übrig. Das sind zu wenige, um 4 Insekten Platz zu bieten. Also ist $\chi((1\ 2\ 3)) = 0$ wie auch für jeden anderen 3-Zykel $(i\ j\ k)$.
$g = (1\ 2\ 3\ 4)$: Das ist die Drehung um folgende Achse um $\frac{\pi}{2}$:



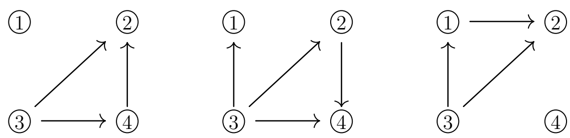
Unter der Wirkung von g haben wir zwei Bahnen der Ecken: $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 1$ und $1' \mapsto 2' \mapsto 3' \mapsto 4' \mapsto 1'$. Da beide Bahnen aus 4 Ecken bestehen, gibt es keine Möglichkeit, die Fliegen und Bienen so zu verteilen, dass die Konfigurationen fix unter g bleibt. Damit ist $\chi((1\ 2\ 3\ 4)) = 0$ wie auch für jeden anderen 4-Zykel $(i\ j\ k\ l)$.
$g = (1\ 3)(2\ 4)$: Das ist die selbe Drehung wie vorhin allerdings um den Winkel π. Hier sind die Bahnen der Ecken unter der Wirkung von g: $1 \mapsto 3 \mapsto 1$, $2 \mapsto 4 \mapsto 2$, $1' \mapsto 3' \mapsto 1'$ und $2' \mapsto 4' \mapsto 2'$. Das sind vier Bahnen mit je zwei Elementen. Damit ist $\chi((1\ 3)(2\ 4)) = 4 \cdot 3 = 12$ (analog zum Fall $g = (1\ 2)$), wie auch für jede andere Komposition von zwei disjunkten Transpositionen $(i\ j)(k\ l)$.
Die Konjugationsklasse von $(1\ 3)(2\ 4)$ besteht aus 3 Elementen.

Eingesetzt in die Bahnformel erhalten wir

$$|M/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{24} \cdot (420 + 6 \cdot 12 + 0 + 0 + 3 \cdot 12) = \frac{1}{2} \cdot (35 + 6 + 3) = 22$$

verschiedene Möglichkeiten, die vier Insekten auf dem Holzwürfel zu platzieren.

Aufgabe 33.[6 Punkte] Gegeben seien vier Punkte in der Ebene. Es dürfen je zwei verschiedene Punkte durch maximal einen Pfeil ⓘ $\longrightarrow$ ⓙ verbunden werden. Dabei seien mehrfache Pfeile oder Pfeile in beide Richtungen ⓘ $\rightleftarrows$ ⓙ nicht zugelassen. Es handelt sich also um einen gerichteten Graphen mit einfachen Kanten und ohne Schlaufen. Bestimmen Sie, wieviele solche Konfigurationen möglich sind, bis auf Permutation der vier Punkte.



Drei mögliche Graphen, wobei der erste und letzte als gleich angesehen werden.

Lösung. Zwischen zwei Ecken ⓘ und ⓙ ist folgendes möglich:

ⓘ ⓙ	ⓘ $\longrightarrow$ ⓙ	ⓘ $\longleftarrow$ ⓙ
$a_{ij} = 0$	$a_{ij} = +1$	$a_{ij} = -1$

Um nun alle möglichen Paare (i, j) aufzuzählen, ohne diese doppelt zu werten, können wir stets $i < j$ annehmen. Also ist die Menge aller möglichen Graphen

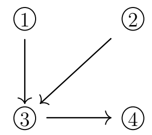
$$M = \{(a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}) \mid a_{ij} \in \{0, +1, -1\}\}$$

Da wir die Ecken beliebig vertauschen dürfen, operiert $G = \Sigma_4$ auf dieser Menge durch

$$\sigma \bullet a_{ij} = \begin{cases} a_{\sigma(i),\sigma(j)} & \text{falls } \sigma(i) < \sigma(j); \\ -a_{\sigma(i),\sigma(j)} & \text{falls } \sigma(i) > \sigma(j). \end{cases}$$

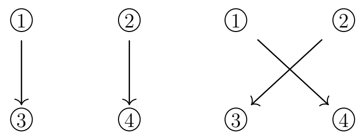
Für die Bahnformel bestimmen wir nun die Fixpunktmengen zu $g \in G$.

$g = e$: Hier werden alle Elemente von M fix gelassen, es ist $|M| = 3^6$.
$g = (1\ 2)$: Da g einen Pfeil zwischen ① und ② umdrehen würde, muss für eine fix gelassene Konfiguration $a_{12} = 0$ sein. Falls es einen Pfeil zwischen ① und ③ oder ④ gibt, dann muss es einen solchen Pfeil auch zwischen ② und ③ bzw. ④ geben. Also muss $a_{13} = a_{23}$ und $a_{14} = a_{24}$ sein. Ein eventueller Pfeil zwischen ③ und ④ bleibt unter g unverändert.



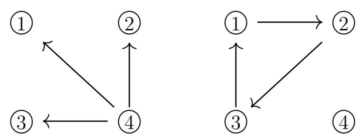
Eine Konfiguration, die $g = (1\ 2)$ fix lässt.

Insgesamt sind für eine unter g fixen Konfiguration $a_{12} = 0$, sowie a_{13}, a_{14} und a_{34} beliebig wählbar (aber a_{23} und a_{24} bereits bestimmt). Damit ist $\chi((1\ 2)) = 3^3$.
Die Konjugationsklasse von $(1\ 2)$ umfasst 6 Elemente.
$g = (1\ 2)(3\ 4)$: Mit demselben Argument wie vorhin darf es keinen Pfeil zwischen ① und ②, sowie zwischen ③ und ④ geben. Also ist $a_{12} = a_{34} = 0$. Wenn es einen Pfeil zwischen ① und ③ gibt, dann muss es auch einen Pfeil zwischen ② und ④ geben, aslo ist $a_{13} = a_{24}$. Analog muss gelten $a_{14} = a_{23}$.



Zwei Konfigurationen, die $g = (1\ 2)(3\ 4)$ fix lässt.

Insgesamt sind für eine unter g fixen Konfiguration $a_{12} = a_{34} = 0$, sowie a_{13} und a_{14} frei wählbar (aber a_{23} und a_{24} dadurch bereits bestimmt). Damit ist $\chi((1\,2)(3\,4)) = 3^2$.
Die Konjugationsklasse von $(1\ 2)(3\ 4)$ umfasst 3 Elemente.
$g = (1\ 2\ 3)$: Wenn es einen Pfeil von einer Ecke ①, ② oder ③ nach ④ gibt (oder zurück), dann gleich von allen drei Ecken nach ④ (bzw. zurück). Also muss $a_{14} = a_{24} = a_{34}$ sein. Wenn es einen Pfeil zwischen ① und ② gibt, dann muss es denselben Pfeil zwischen ② und ③, sowie den umgekehrten[!] Pfeil zwischen ① und ③ geben. Also muss $a_{12} = a_{23} = -a_{13}$ sein.



Zwei Konfigurationen, die $g = (1\ 2\ 3)$ fix lässt.

Ingesamt sind für eine unter g fixen Konfiguration a_{14} und a_{12} frei wählbar (und die restlichen dadurch bestimmt). Damit ist $\chi((1\ 2\ 3)) = 3^2$.
Die Konjugationsklasse von (1 2 3) umfasst 8 Elemente.
$g = (1\ 2\ 3\ 4)$: Mit ähnlichen Argumenten wie im vorigen Fall sehen wir, dass $a_{12} = a_{23} = a_{34} = -a_{14}$ sein muss. Da ein eventueller Pfeil zwischen ① und ③ unter g zunächst auf einen Pfeil zwischen ② und ④ wird, und anschließend zu einem Pfeil zwischen ③ und ①, darf es keinen Pfeil zwischen ① und ③ geben. Es ist also $a_{13} = 0$. Mit demselben Argument erhalten wir $a_{24} = 0$.

$$\begin{tikzcd} \textcircled{1} \arrow[d] & \textcircled{2} \arrow[l] \\ \textcircled{3} \arrow[r] & \textcircled{4} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Eine Konfiguration, die $g = (1\ 2\ 3\ 4)$ fix lässt.

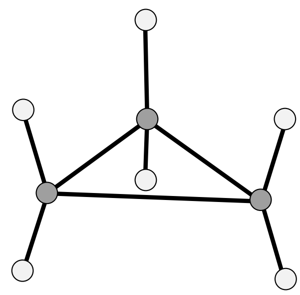
Insgesamt ist für eine unter g fixen Konfiguration nur a_{12} frei wählbar (und dadurch a_{23}, a_{34} und a_{14} bestimmt), sowie $a_{13} = a_{24} = 0$. Damit ist $\chi((1\ 2\ 3\ 4)) = 3$.
Die Konjugationsklasse von (1 2 3 4) umfasst 6 Elemente.

Eingesetzt in die Bahnformel erhalten wir

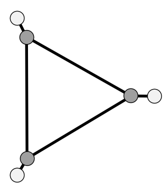
$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{24} \cdot (3^6 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3) = 42$$

verschiedene solche Graphen.

Aufgabe 34.[5 Punkte] Von einem Molekül ist die räumliche Anordnung ihrer Atome bekannt:



Von oben betrachtet zeigt sich, dass dieses Molekül eine D_3-Symmetrie aufweist:



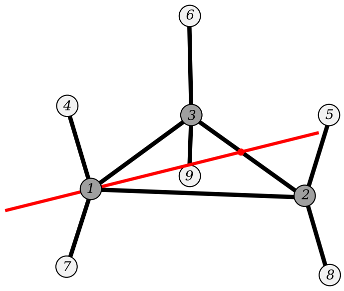
Wir nehmen an, dass über die Atome folgendes bekannt ist: Jedes der sechs äußeren Atome ○ kann entweder H oder Li sein, wohingegen für jedes der drei inneren Atome ● entweder C oder Si in Frage kommt. Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen solchen Moleküle bis auf Symmetrie.

Lösung. Die Menge aller solchen Moleküle ist (nachdem durchnumeriert wurde)

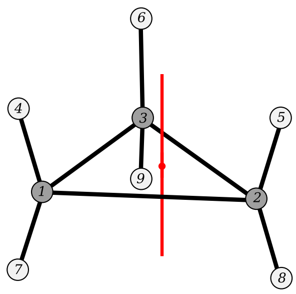
$$M = \{(a_1, \ldots, a_9) \mid a_1, a_2, a_3 \in \{\mathsf{C}, \mathsf{Si}\}, a_4, \ldots, a_9 \in \{\mathsf{H}, \mathsf{Li}\}\}$$

Die operierende Gruppe G ist hier $D_3 \cong \Sigma_3$.
Für die Bahnformel bestimmen wir die Fixpunktmengen zu $g \in G$.

$g = e$: Hier ist die Fixpunktmenge ganz M mit $|M| = 2^9$.
$g = (1\ 2)$: Hier wird um folgende Achse um π gedreht:



Diese Drehung vertauscht die Atome folgendermaßen: $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3 \mapsto 2$, $4 \mapsto 7 \mapsto 4$, $5 \mapsto 9 \mapsto 5$, $6 \mapsto 8 \mapsto 6$. Alle diese Bahnen der Atome müssen mit den gleichen Elementen besetzt werden. Also ist a_1 beliebig, $a_2 = a_3$, $a_4 = a_7$, $a_5 = a_9$ und $a_6 = a_8$. Insgesamt ist für eine unter g fixen Konfiguration a_1, a_2, a_3, a_5, a_6 frei wählbar (und dadurch a_3, a_7, a_9 und a_8 bestimmt). Damit ist $\chi((1\ 2)) = 2^5$.
Die Konjugationsklasse von $(1\ 2)$ umfasst 3 Elemente.
$g = (1\ 2\ 3)$: Hier wird um folgende Achse um $\frac{2\pi}{3}$ gedreht:



Diese Drehung vertauscht die Atome folgendermaßen: $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 4$ und $7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 7$. Es dürfen also a_1, a_4 und a_7 frei gewählt werden, die restlichen Atome sind dadurch schon bestimmt. Damit ist $\chi((1\ 2\ 3)) = 2^3$.
Die Konjugationsklasse von $(1\ 2\ 3)$ umfasst 2 Elemente.

Eingesetzt in die Bahnformel erhalten wir

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{6} \cdot (2^9 + 3 \cdot 2^5 + +2 \cdot 2^3) = 104$$

verschiedene Moleküle.

Alternative Interpretation der Angabe: Eventuell kann die Angabe auch so verstanden werden, dass die Transpositionen wie $g = (1\ 2)$ Spiegelungen des Moleküls entsprechen. In diesem Fall vertauscht $g = (1\ 2)$ die Atome folgendermaßen: $1 \mapsto 1$, $4 \mapsto 4$, $7 \mapsto 7$, $2 \mapsto 3 \mapsto 2$, $5 \mapsto 6 \mapsto 5$ und $8 \mapsto 9 \mapsto 8$. Also können a_1, a_2, a_4, a_5, a_7

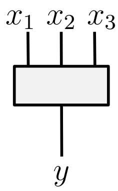
und a_8 beliebig gewählt werden (und a_3, a_6, a_9 sind dann schon bestimmt). Damit ist $\chi((1\ 2)) = 2^6$.

Da die Wirkung von $g = e$ und $g = (1\ 2\ 3)$ wie oben beschrieben ist, setzen wir in die Bahnformel ein, und erhalten

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{6} \cdot (2^9 + 3 \cdot 2^6 + +2 \cdot 2^3) = 120$$

Moleküle, die als verschieden angesehen werden.

Aufgabe 35 (Bonus).[7 Punkte] Ein $(3,1)$-Element ist ein elektronisches Bauteil mit drei Eingängen x_1, x_2, x_3 sowie einem Ausgang y.



Falls Spannung am Eingang x_i anliegt, dann sagen wir, dass x_i den Wert 1 hat, ansonsten hat x_i den Wert 0.
Die Funktionsweise eines solchen $(3,1)$-Elements wird vollständig durch eine Funktion $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto y = f(x_1, x_2, x_3)$ beschrieben. Dabei bedeutet der Funktionswert 1 (bzw. 0), dass am Ausgang Strom (bzw. kein Strom) fließt.
Zwei $(3,1)$-Elemente zu den Funktionen f und g sollen als äquivalent angesehen werden, wenn gilt:

- $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ mit $\sigma \in \Sigma_3$;
- $f(x_1, x_2, x_3) = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, wobei $\bar{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Bestimmen Sie, wieviele verschiedene $(3,1)$-Elemente es unter diesen Identifikationen gibt.

Lösung. Da es sich hier nur um eine Bonusaufgabe handelt, werden hier nur ein paar Eckpunkte der Aufgabe angeführt. Die Menge M besteht hier aus 256 Elementen. Die operierende Gruppe $G = \Sigma_3 \times \mathbb{Z}_2$ hat 12 Elemente. Als Vertreter der Konjugationsklassen können $(e, \bar{0}), (e, \bar{1}), ((1\ 2), \bar{0}), ((1\ 2), \bar{1}), ((1\ 2\ 3), \bar{0})$ und $((1\ 2\ 3), \bar{1})$ gewählt werden. Mithilfe der Bahnformel erhalten wir

$$|M/G| = \frac{1}{12} \cdot (2^8 + 2^4 + 3 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2) = 46$$

$(3,1)$-Elemente, die als verschieden angesehen werden.