Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

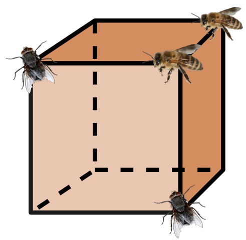
SS 2019
Mittwoch, 22.05.2019
Blatt 7

Übungen zur Algebra

Aufgabe 31.[5 Punkte] Gegeben sei ein Quadrat , das in 3×3 Felder unterteilt ist. Nun soll jedes Feld entweder gelb oder blau gefärbt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Färbungen bis auf Drehung des Quadrats.

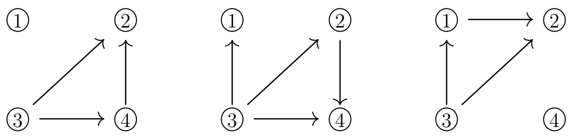
Hier sind drei mögliche Färbungen, wobei die erste und letzte als gleich angesehen werden.

Aufgabe 32.[6 Punkte] Gegeben sei ein Holzwürfel, sowie je zwei ununterscheidbare Fliegen und Bienen. Bestimmen Sie, wieviele Möglichkeiten es bis auf Drehung des Würfels gibt, diese Insekten auf seinen Ecken zu platzieren.



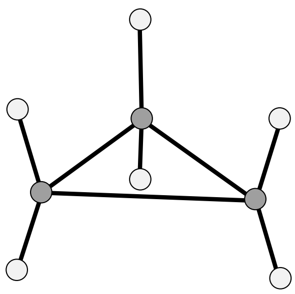
Eine mögliche Konfiguration.

Aufgabe 33.[6 Punkte] Gegeben seien vier Punkte in der Ebene. Es dürfen je zwei verschiedene Punkte durch maximal einen Pfeil $\textcircled{i} \longrightarrow \textcircled{j}$ verbunden werden. Dabei seien mehrfache Pfeile oder Pfeile in beide Richtungen $\textcircled{i} \rightleftarrows \textcircled{j}$ nicht zugelassen. Es handelt sich also um einen gerichteten Graphen mit einfachen Kanten und ohne Schlaufen. Bestimmen Sie, wieviele solche Konfigurationen möglich sind, bis auf Permutation der vier Punkte.



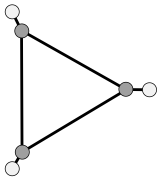
Drei mögliche Graphen, wobei der erste und letzte als gleich angesehen werden.

Aufgabe 34.[5 Punkte] Von einem Molekül ist die räumliche Anordnung ihrer Atome bekannt:



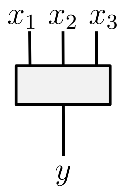
Bitte wenden!

Von oben betrachtet zeigt sich, dass dieses Molekül eine D_3-Symmetrie aufweist:



Wir nehmen an, dass über die Atome folgendes bekannt ist: Jedes der sechs äußeren Atome ○ kann entweder H oder Li sein, wohingegen für jedes der drei inneren Atome ● entweder C oder Si in Frage kommt. Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen solchen Moleküle bis auf Symmetrie.

Aufgabe 35 (Bonus).[7 Punkte] Ein $(3,1)$-Element ist ein elektronisches Bauteil mit drei Eingängen x_1, x_2, x_3 sowie einem Ausgang y.



Falls Spannung am Eingang x_i anliegt, dann sagen wir, dass x_i den Wert 1 hat, ansonsten hat x_i den Wert 0.
Die Funktionsweise eines solchen $(3,1)$-Elements wird vollständig durch eine Funktion $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}, (x_1,x_2,x_3) \mapsto y = f(x_1,x_2,x_3)$ beschrieben. Dabei bedeutet der Funktionswert 1 (bzw. 0), dass am Ausgang Strom (bzw. kein Strom) fließt. Zwei $(3,1)$-Elemente zu den Funktionen f und g sollen als äquivalent angesehen werden, wenn gilt:

- $f(x_1,x_2,x_3) = g\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\big)$ mit $\sigma \in \Sigma_3$;
- $f(x_1,x_2,x_3) = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, wobei $\bar{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Bestimmen Sie, wieviele verschiedene $(3,1)$-Elemente es unter diesen Identifikationen gibt.

Abgabe: Dienstag, 28.05.2019, 9:00 Uhr.