Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Mittwoch, 05.06.2019
Blatt 9

Übungen zur Algebra

Aufgabe 44.[2+2+3 Punkte] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterring von $C^0(\mathbb{R})$, der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, ist:

(1) $\left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$

(2) $\left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R} \right\}$

(3) $\left\{ b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, b_i \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 45.[je 2 Punkte] Sei R ein beliebiger kommutativer Ring und $n, m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie folgende Homomorphismenräumen von Ringen:

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{C})$

(3) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}, R)$

(4) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(\mathbb{Z}[t], R)$

Aufgabe 46.[1+4 Punkte] Sei $S \subset [0,1]$ eine beliebige Teilmenge.

(1) Zeigen Sie, dass $I_S := \{f \in C^0([0,1]) \mid f(s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$ ein Ideal in $C^0([0,1])$ ist.

(2) Ist jedes Ideal in $C^0([0,1])$ von der Form I_S?

Aufgabe 47.[je 1 Punkt] Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ringe. Zeigen Sie:

(1) $A := A_1 \times \cdots \times A_n$ kann mit der Struktur eines Rings versehen werden,

(2) $A^* = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$.

Aufgabe 48.[je 3 Punkte] Sei K ein beliebiger Körper und

$$K[\![x]\!] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\middle|\; a_n \in K \right\}$$

Beachten Sie, dass $K[x]$ eine Teilmenge von $K[\![x]\!]$ ist.

(1) Definieren Sie Summe und Produkt auf dieser Menge, welche auf der Teilmenge $K[x]$ mit den bereits bekannten Operationen übereinstimmen. Beweisen Sie, dass damit $K[\![x]\!]$ ein Ring ist. $K[\![x]\!]$ heißt *Ring der formalen Potenzreihen* in x.

(2) Zeigen Sie, dass für dessen Einheiten gilt:

$$(K[\![x]\!])^* = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\middle|\; a_0 \neq 0 \right\}$$

Bitte wenden!

(3) Für $K = \mathbb{R}$ definieren wir folgende Teilmenge von $\mathbb{R}[\![x]\!]$:

$$\mathbb{R}\{x\} := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[\![x]\!] \;\middle|\; \exists \rho > 0, \text{ sodass die Reihe für } |x| < \rho \text{ konvergiert} \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}\{x\}$ ein Unterring von $\mathbb{R}[\![x]\!]$ ist. $\mathbb{R}\{x\}$ heißt *Ring der konvergenten Potenzreihen* in x.

Aufgabe 49 (Bonus).[6 Punkte] Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}[\![x]\!]$ und $\mathbb{R}\{x\}$ Integritätsbereiche und darüber hinaus Euklidische Ringe sind.

Aufgabe 50 (Bonus).[2 Punkte] Sei G eine Gruppe und $\phi\colon A_5 \to G$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass entweder ϕ injektiv ist oder $\phi(g) = e$ für alle $g \in A_5$ ist.

Aufgabe 51 (Bonus).[2+1 Punkte] Sei $\phi\colon G \to H$ ein Homomorphismus zweier Gruppen.

(1) Zeigen Sie, dass für die Kommutatorgruppen $\phi(G') \subset H'$ gilt, sowie dass damit $\overline{\phi}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}, \overline{g} \mapsto \overline{\phi(g)}$ wohldefiniert ist.

(2) Beweisen Sie, dass wenn ϕ surjektiv ist, dann gilt $\phi(G') = H'$.

Aufgabe 52 (Bonus).[4 Punkte] Seien p, q zwei Primzahlen, die nicht unbedingt verschieden sein müssen. Weiter, sei G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Aufgabe 53 (Bonus).[4 Punkte] Sei G eine Gruppe der Ordnung 500. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.
Hinweis: Was können Sie über die 5-Sylow-Untergruppen von G sagen?

Abgabe: Dienstag, 18.06.2019, 9:00 Uhr.