Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Freitag, 12.07.2019
Blatt 13– Lösungen

Übungen zur Algebra

Aufgabe 79. Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$$

mit der Matrizenaddition und -Multiplikation ein Körper mit vier Elementen ist.

Lösung. Dass K aus vier Elementen besteht, ist klar. Zu den Körpereigenschaften:

- Addition: Dass $(K,\ +) \subset (\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2),\ +)$ eine kommutative Gruppe bildet, ist auch klar.
- Multiplikation: Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in K$$

  und

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Somit erzeugt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Menge $K \setminus \{0\}$. Insbesondere gilt $(K \setminus \{0\},\ \cdot) \cong \mathbb{Z}_3$ und somit ist die Multiplikation kommutativ.
- Distributivität: Dies folgt aus der Distributivität der Matrizenmultiplikation.

Aufgabe 80. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als $\mathbb{Q}$–Vektorräume, aber nicht als Körper isomorph sind.

Lösung. Wir haben folgende Isomorphismen als Vektorräume:

$$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \ \mid\ a, b \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}^2 \cong \left\{a + b\sqrt{2} \ \middle|\ a, b \in \mathbb{Q}\right\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

allerdings: $(x^2 + 1)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, aber <u>nicht</u> in $\mathbb{Q}(i)$.
Alternativ: Für einen Isomorphismus Φ müsste gelten: $\Phi(i)^2 = -1$, aber es gibt kein Element in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 81. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\gamma = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Q}$.

Lösung. Es gilt:

$$(x-\sqrt{2}-i)(x-\sqrt{2}+i) = (x^2-2\sqrt{2}x+3) \in \mathbb{R}[x]$$

Somit ist $p(x) = (x^2+2\sqrt{2}x+3)$ das Minimalpolynom von γ über $\mathbb{R}$.
Daraus folgt:

$$(x^2-2\sqrt{2}x+3)(x^2+2\sqrt{2}x+3) = x^4+6x^2+9-8x^2 = x^4-2x^2+9 \in \mathbb{Q}[x]$$

ist das Minimalpolynom von γ über $\mathbb{Q}$, denn:
Das Polynom p hat die vier Nullstellen $\sqrt{2}-i$, $-\sqrt{2}-i$, $\sqrt{2}+i$ und $-\sqrt{2}+i$. Somit ist keine der Nullstellen in $\mathbb{Q}$, also kann p kein Produkt aus je einem Polynom von Grad 1 und Grad 3 sein. Außerdem gilt:

$$(x+\sqrt{2}+i)(x+\sqrt{2}-i) = (x^2+2\sqrt{2}x+3) \notin \mathbb{Q}[x]$$
$$(x+\sqrt{2}+i)(x-\sqrt{2}-i) = (x^2-1-2\sqrt{2}i) \notin \mathbb{Q}[x]$$
$$(x+\sqrt{2}+i)(x-\sqrt{2}+i) = (x^2-2ix-3) \notin \mathbb{Q}[x]$$

Also kann p kein Produkt aus zwei Polynomen von Grad 2 sein (die Nullstellen müssen über $\mathbb{C}$ übereinstimmen). Somit ist p irreduzibel.