ALGEBRAISCHE $\mathcal{D}$-MODULN

OLAF M. SCHNÜRER

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 2
1.1. Gegenstand der Vorlesung 2
1.2. Motivation 2
1.2.1. Motivation aus der nichtkommutativen Algebra 2
1.2.2. Motivation aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 3
1.3. Geschichtliches und Anwendungen 4
1.4. Zur verwendeten Literatur 4
1.5. Danksagung 5
1.6. Konventionen und grundlegende Definitionen 5
2. Die Weyl-Algebra 6
2.1. Definition und erste Eigenschaften der Weyl-Algebra 6
2.2. Kanonische Basis der Weyl-Algebra 9
2.3. Definition von Algebren durch Erzeuger und Relationen 11
2.4. Beschreibung der Weyl-Algebra durch Erzeuger und Relationen 14
2.5. Filtrierte und graduierte Ringe 16
2.6. Filtrierte und graduierte Moduln 23
2.7. Moduln über der Weyl-Algebra 29
2.7.1. Lineare Differentialgleichungen 30
3. Ringe von Differentialoperatoren 33
3.1. Differentialoperatoren 33
3.2. Differentialoperatoren von $\mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ 38
4. Dimension und Multiplizität von Moduln 43
4.1. Hilbert-Poincaré-Reihe 44
4.2. Ganzwertige Polynome 48
4.3. Hilbert-Polynom 51
4.4. Dimension und Multiplizität für Moduln über filtrierten Ringen 53
4.5. Bernstein-Ungleichung 63
4.6. Holonome Moduln 65
4.6.1. Kompositionsreihen und Moduln endlicher Länge 67
4.6.2. Weiter mit holonomen Moduln 69
4.7. Bernstein-Sato-Polynom und meromorphe Fortsetzung 70
4.7.1. Vorbereitungen 70
4.7.2. Das Bernstein-Sato-Polynom 74
4.7.3. Etwas Funktionentheorie 77

Date: 8. Februar 2019.
Skript zur Vorlesung „Algebraische $\mathcal{D}$-Moduln“ im Wintersemester 2018/19 an der Universität Paderborn.

4.7.4. Meromorphe Fortsetzung mit Hilfe des Bernstein-Sato-Polynoms 81
5. Hilbert-Dimension eines Moduls und Krull-Dimension seines Trägers 84
5.1. Träger eines Moduls 84
5.2. Hilfreiche Filtrierung für endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen 89
5.3. Krull-Dimension des Trägers und Hilbert-Dimension eines Moduls 89
6. Charakteristische Varietät 94
6.1. Definition und erste Eigenschaften der charakteristischen Varietät 94
6.2. Symplektische Geometrie und Bernstein-Ungleichung 99
6.3. Krull-Dimension der charakteristischen Varietät als Bernstein-Dimension 105
7. Inverses und direktes Bild für Moduln über Weyl-Algebren 115
7.1. Inverses Bild oder Pullback 115
7.2. Direktes Bild oder Pushforward 120
7.3. Inverses Bild (Beispiel einer Inklusion) 121
7.4. Direktes Bild (dasselbe Beispiel einer Inklusion) 124
7.5. Kashiwaras Äquivalenz 126
Anhang A. Etwas homologische Algebra 130
Literatur 143

1. Einleitung

1.1. Gegenstand der Vorlesung.

1.1.1. Gegenstand dieser Vorlesung ist die Theorie von Ringen von Differentialoperatoren und von Moduln über solchen Ringen. Ringe von Differentialoperatoren oder Garben solcher Ringe werden oft mit dem Buchstaben $\mathcal{D}$ bezeichnet; daher der Name $\mathcal{D}$-Modul. Wir behandeln algebraische $\mathcal{D}$-Moduln; es gibt eine eng verwandte Theorie analytischer $\mathcal{D}$-Moduln, in der man statt polynomialer Koeffizienten holomorphe Koeffizienten verwendet.

1.2. Motivation.

1.2.1. Die Motivation kommt mindestens aus zwei Gebieten:

(a) der „nichtkommutativen“ Algebra, also dem Studium nichtkommutativer Ringe und der Moduln über solchen Ringen,
(b) der algebraischen Analysis, also dem Studium partieller Differentialgleichungen mit algebraischen Mitteln.

Unabhängig von diesen Motivationen ist die Theorie algebraischer $\mathcal{D}$-Moduln eine interessante eigenständige Disziplin.

1.2.1. *Motivation aus der nichtkommutativen Algebra.*

1.2.2. Sei $\mathcal{F}$ der Vektorraum aller glatten Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Für alle $f = f(x) \in \mathcal{F}$ gilt

$$\partial(x \cdot f) = \partial(x) \cdot f(x) + x \cdot \partial(f) = f(x) + x \cdot \partial(f)$$

wobei wir die Kurzschreibweise $\partial := \frac{\partial}{\partial x}$ verwenden. Betrachten wir die beiden $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen *Ableiten nach* x

$$\partial \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

und *Multiplikation mit x*

$$\begin{aligned} \hat{x} \colon \mathcal{F} &\to \mathcal{F}, \\ f(x) &\mapsto x \cdot f(x), \end{aligned}$$

so gilt also

$$[\partial, \hat{x}] := \partial \circ \hat{x} - \hat{x} \circ \partial = \mathrm{id}_{\mathcal{F}} = 1$$

als Endomorphismen von $\mathcal{F}$. Mit anderen Worten kommutieren die beiden Endomorphismen ∂ und $\hat{x}$ nicht: Ihr Kommutator ist Eins (= das Einselement von $\mathrm{End}(\mathcal{F})$).

Die *Weyl-Algebra* ist die von diesen beiden Elementen erzeugte Unteralgebra

$$D(1) := \langle \hat{x}, \partial \rangle_{\mathbb{C}\text{-Algebra}}$$

von $\mathrm{End}(\mathcal{F})$. Sie ist ein interessantes Beispiel einer nicht-kommutativen Algebra.[1] Ihre Elemente sind die Differentialoperatoren auf $\mathbb{C}$ mit polynomialen Koeffizienten. Analog werden wir die *n-te Weyl-Algebra* $D(n)$ kennenlernen.

Diese Algebren sind natürliche Beispiele nichtkommutativer Ringe, wie man sie in der nichtkommutativen Algebra studiert.

1.2.2. *Motivation aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.*

1.2.3. Betrachte eine lineare Differentialgleichung, beispielsweise

$$x\partial^2(f) - \partial(f) - 4x^3 f = 0. \tag{1.2.1}$$

Dann definiert

$$P := \hat{x}\partial^2 - \partial - 4\hat{x}^3$$

ein Element der Weyl-Algebra $D(1)$, und die obige Differentialgleichung läßt sich kurz als $P(f) = 0$ schreiben. Dem Element P ordnen wir den Quotient

$$M := D(1)/D(1)P$$

von $D(1)$ nach dem von P erzeugten Linksideal zu. Dies ist ein $D(1)$-Modul. Leicht zeigt man, dass Auswerten bei Eins eine Bijektion (oder genauer einen Isomorphismus von Vektorräumen)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D(1)}(M, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{F} \mid P(f) = 0\}, \\ \varphi &\mapsto \varphi(\overline{1}). \end{aligned}$$

zwischen der Menge der $D(1)$-Modulmorphismen von M nach $\mathcal{F}$ und der Menge der Lösungen der Differentialgleichunge $P(f) = 0$ in $\mathcal{F}$ liefert (siehe Proposition 2.7.16). In dieser Bijektion kann P ein beliebiges Element von $D(1)$ sein, und man kann $\mathcal{F}$ durch einen beliebigen $D(1)$-Modul ersetzen, etwa durch die Menge aller holomorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.[2]

[1] Operatoren, deren Kommutator (ein Vielfaches von) Eins ist, spielen in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle (Matrizenmechanik, Unschärferelation), was auch historisch zum Studium der Weyl-Algebra geführt hat, siehe etwa [Lit33].

[2] Hierbei operieren ∂ und $\hat{x}$ in der offensichtlichen Weise. Der kritische Leser wird bemerken, dass man etwas arbeiten muss, um zu zeigen, dass dies wirklich eine $D(1)$-Modulstruktur definiert. Sobald man die Beschreibung der Weyl-Algebra durch Erzeuger und Relationen kennt (siehe Satz 2.4.1), ist dies leicht zu zeigen.

Man kann also den $D(1)$-Modul M als algebraische Variante der Differentialgleichung (1.2.1) auffassen und so diese Differentialgleichung mit algebraischen Methoden studieren. Man legt sich dabei nicht auf einen konkreten Raum fest, in dem man nach Lösungen sucht. Beispielsweise hat die Differentialgleichung (1.2.1) keine polynomiale Lösung, aber die holomorphe Lösung e^{x^2}. Ein einfacheres Beispiel ist die Funktion e^x, die die Differentialgleichung $\partial(f) - f = 0$ erfüllt. Obwohl transzendente Funktionen wie e^x oder e^{x^2} keine reguläre Funktionen im Sinne der algebraischen Geometrie sind (sie sind durch unendliche Potenzreihen gegeben, und nicht durch Polynome), kann man manche von ihnen algebraisch mit Hilfe der von ihnen erfüllten Differentialgleichungen und der zugeordneten $D(1)$-Moduln studieren.

Allgemeiner liefert jedes System von linearen partiellen Differentialgleichungen (mit polynomialen Koeffizienten) auf $\mathbb{C}^n$ einen Modul über der Weyl-Algebra $D(n)$. Noch allgemeiner betrachtet man $\mathcal{D}$-Moduln auf glatten komplexen algebraischen Varietäten; lokal kann man diese durch Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen beschreiben. In diesem Sinne kann man $\mathcal{D}$-Moduln als partielle Differentialgleichungen in der algebraischen Geometrie auffassen und dann mit deren Methoden studieren.

1.3. **Geschichtliches und Anwendungen.**

1.3.1. Die Theorie von (analytischen und algebraischen) $\mathcal{D}$-Moduln wurde in weiten Teilen von Mikio Sato, Masaki Kashiwara und Joseph Bernstein entwickelt.

1.3.2. Wichtige Anwendungen der Theorie von $\mathcal{D}$-Moduln:

- Meromorphe Fortsetzung gewisser (analytischer, distributionswertiger) Funktionen auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ auf ganz $\mathbb{C}$. Dieses Problem wurde von Gelfand auf dem ICM 1954 gestellt. Eine elegante Lösung von Bernstein verwendet das Bernstein(-Sato)-Polyom (siehe Abschnitt 4.7); aus diesem Polynom erhält man eine Funktionalgleichung, die die Fortsetzung erlaubt (siehe [KL00]).
- Riemann-Hilbert-Korrespondenz (Deligne, Kashiwara, Mebkhout). Sie geht auf das Hilbert-Riemann-Problem (= Hilberts 21. Problem) zurück, das grob gesagt fragt, ob es auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ zu vorgeschriebenen Monodromien an endlich vielen Punkten reguläre Differentialgleichungen gibt, deren Lösungen diese Monodromien haben. Die Riemann-Hilbert Korrespondenz ist eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie regulärer holonomer $\mathcal{D}$-Moduln und der Kategorie perverser Garben (siehe [HTT08]).
- Beweis der Kazhdan-Lusztig Vermutung (durch Beilinson und Bernstein, und unabhängig durch Brylinski und Kashiwara). Die Multiplizitäten, mit denen gewisse einfache Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra in den sogenannten Verma-Moduln vorkommen, sind durch die Werte der Kazhdan-Lusztig-Polynome bei Eins gegeben. Der Beweis beruht auf einer geometrischen Beschreibung dieser Darstellungen durch reguläre holonome $\mathcal{D}$-Moduln auf der Fahnenvarietät und der Riemann-Hilbert-Korrespondenz (siehe [HTT08]). Dies ist die Keimzelle der geometrischen Darstellungstheorie.
- Die Theorie gemischer Hodge-Moduln von Saito basiert unter anderem auf der Theorie von $\mathcal{D}$-Moduln. Diese Theorie von Saito stellt eine weite Verallgemeinerung der klassischen Hodge-Theorie dar.

1.4. **Zur verwendeten Literatur.**

Die Vorlesung basiert hauptsächlich auf dem Vorlesungsskript „Lectures on Algebraic Theory of D-Modules“ von Dragan Miličić; auch das Buch

[Cou95] von S. C. Coutinho war hilfreich. Die klassische Quelle ist Bernsteins unpubliziertes Skript „Algebraic Theory of D-modules“. Andere Quellen sind [HTT08], [BGK+87], [Tra10], [GM99, Ch. 8], das Vorlesungsskript „The algebraic theory of D-modules“ von Dmitry Gourevitch. Nützlich für mein Verständnis der Anwendung des Bernstein-Sato-Polynoms zur meromorphen Fortsetzung waren [KL00, Kapitel 8] und das Vorlesungsskript „Introduction to algebraic $\mathcal{D}$-modules“ von Ayoub. Alle angegebenen Skripten findet man leicht im Internet.

1.5. **Danksagung.** Für Anregungen, Hinweise und Korrekturen danke ich Jan Büthe und Oliver Schnürer.

1.6. **Konventionen und grundlegende Definitionen.**

1.6.1. Das Symbol k bezeichnet stets einen Körper der Charakteristik Null, falls nicht explizit anders angegeben. Oft nehmen wir zusätzlich an und sagen dies dann auch, dass k algebraisch abgeschlossen ist; als Faustregel ist dies immer dann der Fall, wenn wir geometrisch argumentieren. Der Leser mag annehmen, dass k der Körper der komplexen Zahlen ist.

1.6.2. Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Die Symbole $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bezeichnen die ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. Wir schreiben bisweilen 0 statt $\{0\}$.

1.6.3. Die Notation $S \subset T$ bedeutet, dass S eine Teilmenge von T ist. Die Notation $S \subsetneq T$ bedeutet, dass S eine echte Teilmenge von T ist. Sind S und T Teilmengen einer gegebenen Menge, so schreiben wir $S - T$ für die Menge aller Elemente von S, die nicht in T liegen.

1.6.4. Ringe haben ein Einselement und sind assoziativ, aber nicht notwendig kommutativ. Morphismen von Ringen (= Ringmorphismen = Ringhomomorphismen = Homomorphismen von Ringen) bilden das Einselement auf das Einselement ab.

Definition 1.6.5. Sei r ein Element eines Ringes R. Ein Element $s \in R$ heißt **linksinvers zu** r bzw. **rechtsinvers zu** r wenn $sr = 1$ bzw. $rs = 1$ gilt. Wir nennen r **invertierbar** oder eine **Einheit**, falls r ein Linksinverses und ein Rechtsinverses besitzt. Ist r eine Einheit, so hat r genau ein Linksinverses und genau ein Rechtsinverses, diese beiden Elemente stimmen überein und werden als das **Inverse** von r bezeichnet und als r^{-1} notiert.

Es bezeichnet $R^\times$ die Menge der Einheiten von R.

Definition 1.6.6. Das **Zentrum** eines Ringes R ist $\mathrm{Z}(R) = \{r \in R \mid rs = sr \text{ für alle } s \in R\}$. Dieser Begriff ist nur für nichtkommutative Ringe interessant.

Definition 1.6.7. Gegeben zwei Elemente r, s eines Ringes R ist $[r, s] := rs - sr$ ihr **Kommutator**. Auch dieser Begriff ist nur für nichtkommutative Ringe interessant.

Definition 1.6.8. Ist R ein Ring, so ist ein **Linksideal** von R eine Untergruppe I von R mit $rI \subset I$ für alle $r \in R$. Analog ist ein **Rechtsideal** eine abelsche Untergruppe I mit $Ir \subset I$ für alle $r \in R$. Wenn wir von einem **Ideal** sprechen, meinen wir stets ein **beidseitiges** Ideal, also eine abelsche Untergruppe, die sowohl ein Links- als auch ein Rechtsideal ist.

Definition 1.6.9. Ein Ring heißt **Integritätsbereich**, falls er nicht der Nullring ist und falls das Produkt zweier Elemente, die von Null verschieden sind, wieder von Null verschieden ist: Für alle $r, s \in R - 0$ gilt $rs \neq 0$.

1.6.10. Sei R ein Ring. Da wir nicht annehmen, dass R kommutativ ist, müssen wir zwischen **R-Linksmoduln** und **R-Rechtsmoduln** unterscheiden. Da wir meist mit Linksmoduln arbeiten, meinen wir im folgenden mit einem **Modul** stets einen Linksmodul. Trotzdem sprechen wir bisweilen von Linksmoduln.

Definition 1.6.11. Ist R ein Ring, so bezeichnet $\mathrm{Mod}(R)$ die Kategorie aller R-Moduln, und $\mathrm{mod}(R)$ bezeichnet die (volle Unter-)Kategorie aller endlich erzeugten R-Moduln. Ist R linksnoethersch, so ist $\mathrm{mod}(R)$ abgeschlossen unter Quotienten und Untermoduln und stimmt mit der Kategorie aller noetherschen R-Moduln überein.

1.6.12. Sei R ein kommutativer Ring. Eine **R-Algebra** (= Algebra über R) ist ein Ring A zusammen mit einem Morphismus $\sigma\colon R \to A$ von Ringen mit $\sigma(R) \subset \mathrm{Z}(A)$, welcher **Strukturmorphismus** heißt. Das ist dasselbe wie ein R-Modul A zusammen mit einer R-bilinearen assoziativen Verknüpfung $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, für die es eine Eins gibt (also ein Element $e \in A$ mit $ea = a = ae$ für alle $a \in A$.

Gegeben R-Algebren A und B ist ein Morphismus von R-Algebren (= A-Algebrenmorphismus = R-Algebrenhomomorphismen = Homomorphismen von R-Algebren = Abbildung von R-Algebren) ein Morphismus $\varphi\colon A \to B$ von Ringen, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\ & R \arrow[ul, "\sigma_A"] \arrow[ur, "\sigma_B"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei σ_A und σ_B die jeweiligen Strukturmorphismen sind. Alternativ ist es ein R-Modulmorphismus $\varphi\colon A \to B$, der $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ und $\varphi(1) = 1$ erfüllt.

Definition 1.6.13. Sei R ein Ring. Sein **opponierter Ring** R^{op} ist wie folgt definiert: Die zugrundeliegende abelsche Gruppe ist R, jedoch ist die Multiplikation durch $\cdot^{\mathrm{op}}\colon R^{\mathrm{op}} \times R^{\mathrm{op}} \to R^{\mathrm{op}}$, $(r,s) \mapsto r \cdot^{\mathrm{op}} s := sr$, definiert. Gegeben ein Element $r \in R$ ist es manchmal geschickt, die Notation r^{op} für dassselbe Element, aufgefasst als Element von R^{op}, zu verwenden. Ist R kommutativ, so ist die Identität $R \xrightarrow{\sim} R^{\mathrm{op}}$ ein Isomorphismus von Ringen.

Ist R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra, so ist ihre **opponierte R-Algebra** A^{op} analog definiert.

1.6.14. Sprechen wir von einer Algebra, so ist stets eine k-Algebra gemeint. Sprechen wir von einem Vektorraum, so ist stets ein k-Vektorraum gemeint. Analog sind Begriffe wie lineare Abbildung, lineare Unabhängigkeit, Linearkombination, Basis ohne weitere Spezifikation stets bezüglich k zu verstehen.

1.6.15. Ist A eine R-Algebra mit Strukturmorphismus σ, so wird A durch die Skalarmultiplikation $r.a := \sigma(r)a$ zu einem R-Modul. Insbesondere ist jede Algebra in kanonischer Weise ein Vektorraum.

1.6.16. Jede Algebra kann als Lie-Algebra aufgefasst werden, indem man als Lie-Klammer den Kommutator nimmt (und die Multiplikation der Algebra vergißt): Ist A eine Algebra, so ist der Vektorraum A zusammen mit dem Kommutator $[,]\colon A \times A \to A$ eine Lie-Algebra.

1.6.17.
- Sind S und T zwei Mengen, so bezeichnet $\mathrm{Set}(S,T)$ die Menge aller Abbildungen von S nach T.
- Sei R ein Ring. Sind V und W zwei R-Moduln (= R-Linksmoduln), so bezeichnet $\mathrm{Hom}_R(V,W)$ die Menge aller R-linearen Abbildungen von V nach W. Im Fall $R = \mathsf{k}$ schreiben wir abkürzend $\mathrm{Hom}(V,W) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(V,W)$. Es sind $\mathrm{End}_R(V)$ und $\mathrm{End}(V)$ analog definiert.
- $\mathrm{Hom}_{-R}(V,W)$ für Rechtsmoduln?
- Sei R ein kommutativer Ring. Sind A und B zwei R-Algebren, so bezeichnet $\mathrm{Alg}_R(A,B)$ die Menge aller Algebrenmorphismen von A nach B. Im Fall $R = \mathsf{k}$ schreiben wir abkürzend $\mathrm{Alg}(A,B) := \mathrm{Alg}_R(A,B)$.

1.6.18. Die Notation $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet die Potenzmenge einer Menge M.

1.6.19. Die Symbole $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \xrightarrow{\sim}$ bezeichnen injektive, surjektive, bijektive Abbildungen von Mengen oder Ringen oder Moduln oder ähnlichen Strukturen.

1.6.20. Bei Definitionen werden die Konjunktionen „wenn“ und „falls“ traditionell stets im Sinne von „genau dann, wenn“ verwendet. Wir schließen uns dieser Tradition an.

1.6.21. Das Kronecker-Delta δ_{ij} ist ein von zwei Variablen i,j abhängiges Symbol, das für $i = j$ Eins ist und sonst Null.

2. Die Weyl-Algebra

2.1. Definition und erste Eigenschaften der Weyl-Algebra.

2.1.1. Sei

$$\mathsf{k}[\underline{X}] := \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$$

die Menge aller Polynome in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten im Grundkörper k der Charakteristik Null, für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$. Diese Menge ist in wohlbekannter Weise einer kommutative Algebra (über k). Als Vektorraum hat sie die Monome $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$, für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, als Basis. Für $n > 0$ hat sie also abzählbare Dimension. Jedes Polynom $f \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ kann als $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha X^\alpha$ geschrieben werden, wobei die Koeffizienten $f_\alpha \in \mathsf{k}$ eindeutig bestimmt sind und nur endlich viele dieser Koeffizienten ungleich Null sind. Schreiben wir ein Polynom in dieser Form, so ist stets implizit vorausgesetzt, dass nur endlich viele f_α ungleich Null sind.

Definition 2.1.2 (partielle Ableitung)**.** Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die **(formale, partielle) Ableitung nach** X_i definiert als die eindeutige k-lineare Abbildung

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}\colon \mathsf{k}[\underline{X}] \to \mathsf{k}[\underline{X}]$$

mit

$$\partial_i(X^\alpha) = \alpha_i X^{\alpha - e_i} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

wobei $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$ das n-Tupel natürlicher Zahlen ist, dessen einziger von Null verschiedener Eintrag eine Eins an der i-ten Position ist, und die folgende Konvention verwendet wird: Gilt $\alpha_i = 0$, so interpretieren wir den (formal nicht definierten) Ausdruck $\alpha_i X^{\alpha - e_i} = 0 X^{\alpha - e_i}$ als Null.

2.1.3. Die in der Analysis definiert partielle Ableitung ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\partial_i \colon \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}),$$

wobei $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ den Vektorraum aller glatten (= unendlich oft differenzierbaren) Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Jedem Polynome $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ kann man die polynomiale Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, zuordnen. Auf diese Weise erhält man eine lineare Abbildung $\mathbb{R}[\underline{X}] \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Diese ist injektiv, da $\mathbb{R}$ ein unendlicher Körper ist (siehe Aufgabe 2.2.9), und verträgt sich mit der „algebraischen“ und der „analytischen“ partiellen Abbildung in dem Sinne, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial_i"] & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \arrow[d, "\partial_i"] \\
\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \arrow[r, hook] & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Analoges gilt für $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}$.

Lemma 2.1.4. *Es gilt*

$$\partial_i(fg) = \partial_i(f)g + f\partial_i(g) \tag{2.1.1}$$

in $\mathsf{k}[\underline{X}]$ *für alle* $f, g \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ *und* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Der Ausdruck auf beiden Seiten der behaupteten Gleichung ist linear in f für fixiertes g. Ebenso ist er linear in g für fixiertes f. Deswegen genügt es, die Formel für $f = X^\alpha$ und $g = X^\beta$ nachzurechnen, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\partial_i(X^\alpha X^\beta) = \partial_i(X^{\alpha+\beta}) = (\alpha_i + \beta_i)X^{\alpha+\beta-e_i} &= \alpha_i X^{\alpha+\beta-e_i} + \beta_i X^{\alpha+\beta-e_i} \\
&= \alpha_i X^{\alpha-e_i} X^\beta + X^\alpha \beta_i X^{\beta-e_i} = \partial_i(X^\alpha)X^\beta + X^\alpha \partial_i(X^\beta).
\end{aligned}$$

□

2.1.5. Ist $f \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ ein Polynom, so notieren wir die lineare Abbildung *Multiplikation mit* f als

$$\begin{aligned}
\hat{f} \colon \mathsf{k}[\underline{X}] &\to \mathsf{k}[\underline{X}], \\
g &\mapsto fg.
\end{aligned}$$

Da $\mathsf{k}[\underline{X}]$ kommutativ ist, ist es egal, ob wir von rechts oder von links multiplizieren.

2.1.6. Sei $\mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = \mathrm{End}_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}[\underline{X}])$ die Menge aller Endomorphismen des Vektorraums $\mathsf{k}[\underline{X}]$. Dies ist eine Algebra (dieselbe Aussage gilt für die Menge der Endomorphismen eines beliebigen Vektorraums): Das Einselement ist die Identitätsabbildung, also $1 = \mathrm{id}_{\mathsf{k}[\underline{X}]}$, das Nullelement ist die Nullabbildung. Diese Algebra ist nicht kommutativ, falls $n \geq 1$ gilt.

Der Strukturmorphismus $\mathsf{k} \to \mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}])$, $a \mapsto a\mathrm{id}_{\mathsf{k}[\underline{X}]}$, ist injektiv. Wir können somit k als Unterring (oder Unteralgebra) von $\mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}])$ auffassen.

Die oben eingeführten Abbildungen $\partial_i, \hat{f}, \hat{X}_i$ sind Elemente von $\mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}])$.

2.1.7. Gegeben eine Algebra A und eine Teilmenge $T \subset A$ ist die **von T erzeugte Unteralgebra von** A per definitionem die kleinste Unteralgebra von A, die alle Elemente von T enthält; sie wird als $\langle T \rangle_{\mathrm{Algebra}}$ notiert. Eine solche kleinste Unteralgebra existiert in der Tat, wie man sofort aus den folgenden beiden alternativen Beschreibungen von $\langle T \rangle_{\mathrm{Algebra}}$ folgert:

(a) Als Schnitt aller Unteralgebren, die T enthalten:

$$\langle T\rangle_{\text{Algebra}} = \bigcap_{B \text{ Unteralgebra von } A \text{ mit } T \subset B} B.$$

(b) Als Menge aller (endlichen) Linearkombination von (endlichen) Produkten von Elementen von T:

$$\langle T\rangle_{\text{Algebra}} = \{t_1 t_2 \cdots t_n \mid n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in T\}.$$

Das Einselement ist das leere Produkt, genauer das Produkt über die leere Folge von Elementen von T.

Definition 2.1.8. Die **Weyl-Algebra** (zum Parameter $n \in \mathbb{N}$) oder **n-te Weyl-Algebra** $D(n)$ ist[3] die von den Elementen $\hat{X}_1, \ldots \hat{X}_n$, $\partial_1, \ldots, \partial_n$ erzeugte Unteralgebra von $\mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}])$, in Formeln

$$D(n) := \langle \hat{X}_i, \partial_i \mid i = 1, \ldots, n\rangle_{\text{Algebra}} \subset \mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}]).$$

2.1.9. Es gilt $1 = \mathrm{id}_{\mathsf{k}[\underline{X}]} \in D(n)$, da wir von einer Algebra verlangen, dass sie eine Eins besitzt. Insbesondere gilt $\mathsf{k} \subset D(n)$.

2.1.10. Es besteht $D(n)$ genau aus allen Linearkombinationen von endlichen Produkten der Elemente $\hat{X}_1, \ldots \hat{X}_n$, $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

2.1.11. Beispielsweise sind

$$7\partial_1^2 \hat{X}_3^3 \partial_2 X_2 = 7\partial_1\partial_1\hat{X}_3\hat{X}_3\hat{X}_3\partial_2 X_2 = 7\partial_1 \circ \partial_1 \circ \hat{X}_3 \circ \hat{X}_3 \circ \hat{X}_3 \circ \partial_2 \circ X_2$$

$$3\partial_1 \hat{X}_1^2 - 3\hat{X}_1\partial_1^2 + 1,$$

$$\hat{f}, \quad \text{für } f \in \mathsf{k}[X_1, X_2, X_3],$$

Elemente von A_3.

2.1.12. Wir werden in Kürze zwei weitere äquivalente Beschreibungen der Weyl-Algebra $D(n)$ kennenlernen: Zum einen werden wir sie durch Erzeuger und Relationen beschreiben (siehe Satz 2.4.1), zum anderen als Algebra von Differentialoperatoren des Polynomrings $\mathsf{k}[\underline{X}]$ (siehe Satz 3.2.6).

Lemma 2.1.13. *Für alle $f \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gelten die Gleichheiten*

$$\partial_i \circ \hat{f} - \hat{f} \circ \partial_i = \widehat{\partial_i(f)},$$
$$\partial_i \circ \partial_j = \partial_j \circ \partial_i$$

in $\mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}])$*. Mit Hilfe des Kommutators (siehe Definition 1.6.7) schreiben sie sich wie folgt:*

$$[\partial_i, \hat{f}] = \widehat{\partial_i(f)}, \tag{2.1.2}$$
$$[\partial_i, \partial_j] = 0.$$

Beweis. Die erste Gleichheit folgt sofort aus Lemma 2.1.4. Die zweite Gleichung gilt, da beide Seiten der behaupteten Gleichung auf jedem der Monome X^α, für $\alpha \in \mathbb{N}^n$, denselben Wert annehmen, wie man leicht nachrechnet. □

[3] Will man den Grundkörper betonen, so mag man $D_{\mathsf{k}}(n)$ schreiben. Oft wird auch die Notation A_n verwendet, etwa in [Cou95], oder $A_n(\mathsf{k})$.

Ende der 1. Vorlesung am 8.10.2018.

Hausaufgaben:

(1) [Cou95, Aufgabe I.4.2] (kanonische Form ist Darstellung bezüglich der kanonischen Basis)
(2) Aufgabe 2.1.15
(3) [Cou95, Aufgabe I.4.7] ($\mathrm{SL}_2(K) \to \mathrm{Aut}(D(1))$)+Aufgabe 2.4.5
(4) Aufgabe 2.3.16

2.1.14. In $D(n)$ gelten die Formeln

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0, \tag{2.1.3}$$

$$[\partial_i, \partial_j] = 0, \tag{2.1.4}$$

$$[\partial_i, \hat{X}_j] = \delta_{ij} \tag{2.1.5}$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Die erste Formel ist offensichtlich (oder eine Konsequenz aus Aufgabe 2.2.8); die beiden anderen Formeln folgen sofort aus Lemma 2.1.13, wenn man dort $f = X_j$ einsetzt und $\partial_i(X_j) = \delta_{ij}$ verwendet. Außerdem verwenden wir $\hat{1} = 1 = \mathrm{id}_{\mathsf{k}[\underline{X}]}$ und $\hat{0} = 0$.

Aufgabe 2.1.15. Sei M ein $D(n)$-Modul, für $n \geq 1$. Ist M endlichdimensional, so gilt bereits $M = 0$.

Hinweis: Die Spur eines jeden Kommutators ist Null.

Aufgabe 2.1.16. Sei $\mathsf{k} = \mathbb{C}$. Finde eine nichttriviale Differentialgleichung, die von der Funktion x^2e^x erfüllt wird, also ein $P \in \mathrm{D}(1) - 0$ mit $P(x^2e^x) = 0$.

2.2. **Kanonische Basis der Weyl-Algebra.**

Konvention 2.2.1. Gegeben $\beta \in \mathbb{N}^n$ setze $\partial^\beta := \partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}\cdots\partial_n^{\beta_n}$. Die Reihenfolge der Faktoren ist hierbei egal; insbesondere gilt $\partial^\beta\partial^\gamma = \partial^{\beta+\gamma}$ für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$.

Definition 2.2.2. Elemente von $\mathbb{N}^n$ werden als **Multi-Indizes** bezeichnet. Gegeben ein Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ist

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

seine **Länge**. Außerdem vereinbaren wir die Notation

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

Beachte $\alpha! \in \mathbb{N}_{>0}$ da $0! = 1$.

2.2.3. Da k Charakteristik Null hat, ist $\mathbb{Q}$ eine Teilmenge von k. Insbesondere können wir $\alpha!$ als Element von $\mathsf{k} - 0$ auffassen.

Konvention 2.2.4. Ab jetzt schreiben wir oft X_i statt $\hat{X}_i$ und hoffen, dass aus dem Zusammenhang klar ist, ob X_i als Element von $\mathsf{k}[\underline{X}]$ oder von $D(n)$ (bzw. $\mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}])$) aufzufassen ist. Gegeben $f \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ schreiben wir allgemeiner oft f statt $\hat{f}$ und fassen das Polynom f so als Element von $D(n)$ auf. Der Ausdruck X^α kann also ein Element von $\mathsf{k}[\underline{X}]$ oder von $D(n)$ bezeichnen.

Manchmal kann man durch Klammern sinnvoll andeuten, wo ein Element lebt. Der Ausdruck $\partial^\beta(X^\gamma)$ ist als Element von $\mathsf{k}[\underline{X}]$ aufzufassen, während $\partial^\beta X^\gamma$ als Element von $D(n)$ aufzufassen ist. Im Zweifelsfall sollte man explizit angeben, wo man arbeitet.

Lemma 2.2.5 (Vorbereitung für Satz 2.2.7)**.** *Seien $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ mit $|\gamma| \leq |\beta|$. Dann gilt*

$$\partial^\beta(X^\gamma) = \begin{cases} \gamma! & \text{falls } \beta = \gamma, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

in $\mathsf{k}[\underline{X}]$.

Beweis. Wir führen Induktion über die Länge $|\beta|$ von β. Für $|\beta| = 0$ (und auch $|\beta| = 1$) ist die Aussage offensichtlich korrekt. Gelte $|\beta| > 0$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\beta_i > 0$. Dann gilt

$$\partial^\beta(X^\gamma) = \partial^{\beta - e_i}(\partial_i(X^\gamma)) = \partial^{\beta - e_i}(\gamma_i X^{\gamma - e_i})$$

Ist $\gamma_i = 0$, so ist dies Null, und wir sind im Fall $\beta \neq \gamma$. Ist $\gamma_i > 0$, so gilt per Induktion (da $|\gamma - e_i| = |\gamma| - 1 \leq |\beta| - 1 = |\beta - e_i|$) fort:

$$\partial^{\beta - e_i}(\gamma_i X^{\gamma - e_i}) = \begin{cases} \gamma_i(\gamma - e_i)! = \gamma! & \text{falls } \beta - e_i = \gamma - e_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

2.2.6. Wir erinnern daran, dass die Algebra $D(n)$ automatisch ein Vektorraum ist (siehe 1.6.15).

Satz 2.2.7. *Die Elemente $X^\alpha \partial^\beta$, für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, bilden eine Basis der Weyl-Algebra $D(n)$ (als Vektorraum), d. h.*

$$D(n) = \bigoplus_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} \mathsf{k} X^\alpha \partial^\beta.$$

*Sie heißt **kanonische** Basis.*

Insbesondere ist $D(n)$ als $\mathsf{k}[\underline{X}]$-(Links-)Modul frei mit Basis ∂^β, für $\beta \in \mathbb{N}^n$, d. h. $D(n) = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}} \mathsf{k}[\underline{X}]\partial^\beta$.

Beweis. Die $X^\alpha \partial^\beta$ bilden ein Erzeugendensystem: Jedes Element von $D(n)$ ist eine Linearkombination von Produkten der Elemente $\hat{X}_1, \ldots \hat{X}_n$, $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Es ist zu zeigen, dass jedes solche Produkt eine Linearkombination der angegebenen Elemente ist. Dies folgert man sofort aus der Relation (2.1.5): Man kann jeden Unterausdruck $\partial_i X_j$ durch $X_j \partial_i + \delta_{ij}$ ersetzen und so sukzessive alle partiellen Ableitungen nach rechts wandern lassen, wobei man im Fall $i = j$ einen neuen Summanden kreiert.

Die $X^\alpha \partial^\beta$ sind linear unabhängig: Sei $T = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial_\beta$ eine endliche Linearkombination mit Koeffizienten $c_{\alpha\beta} \in \mathsf{k}$, die nicht alle Null sind. Zu zeigen ist $T \neq 0$.

In der endlichen nichtleeren Menge

$$E := \{\beta \in \mathbb{N}^n \mid \text{es gibt ein } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } c_{\alpha\beta} \neq 0\}$$

sei γ ein Element mit minimaler Länge $|\gamma|$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ mit $c_{\alpha\beta} \neq 0$ gilt also $|\gamma| \leq |\beta|$ und damit $\partial_\beta(X^\gamma) = \delta_{\beta\gamma}\gamma!$ nach Lemma 2.2.5. Es folgt

$$T(X^\gamma) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} c_{\alpha\beta} X^\alpha \partial_\beta(X^\gamma) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma! c_{\alpha\gamma} X^\alpha \quad \text{in } \mathsf{k}[\underline{X}].$$

Dieses Element ist nicht Null, da $\gamma! \neq 0$ in k gilt, da es ein $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $c_{\alpha\gamma} \neq 0$ gibt und da die Monome X^α, für $\alpha \in \mathbb{N}^n$, eine Basis des $\mathsf{k}[\underline{X}]$ bilden. Es gilt also $T(X^\gamma) \neq 0$ und somit $T \neq 0$.

Die letzte Behauptung ist nun offensichtlich. □

Aufgabe 2.2.8. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathsf{k}[\underline{X}] &\to D(n), \\ f &\mapsto \hat{f}, \end{aligned}$$

ist ein injektiver Morphismus von Algebren. Insbesondere gelten $[\hat{f}, \hat{g}] = 0$ und $\widehat{af+g} = a\hat{f} + \hat{g}$ für alle $f, g \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ und $a \in \mathsf{k}$.

Aufgabe 2.2.9 (Polynome als polynomiale Funktionen)**.** Betrachte den Algebrenmorphismus

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n] &\to \mathrm{Set}(\mathsf{k}^n, \mathsf{k}), \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

der einem Polynom die offensichtlich Abbildung zuordnet. Die Abbildungen in seinem Bild heißen *polynomiale Abbildungen* oder *Funktionen*.

(a) Seien k ein unendlicher Körper beliebiger Charakteristik (zum Beispiel ein Körper der Charakteristik Null wie $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, oder ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper) und $f \in \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ für alle $x \in \mathsf{k}^n$. Dann gilt bereits $f = 0$ in $\mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Mit anderen Worten ist φ injektiv. Dies bedeutet, dass man $k[X_1, \dots, X_n]$ mit seinem Bild, dem Ring der polynomialen Funktionen auf k^n, identifizieren kann.
Hinweis: Induktion.

(b) Ist k ein endlicher Körper, so ist φ nicht injektiv. Bestimme den Kern von φ.
Hinweis: Rate ein Ideal I, das vermutlich der Kern von φ ist (und jedenfalls in diesem Kern liegt). Zeige, dass φ surjektiv ist, und zähle die Elemente von $\mathsf{k}[\underline{X}]/I$ und von $\mathrm{Set}(\mathsf{k}^n, \mathsf{k})$.

Aufgabe 2.2.10. Die Zuordnung $T_i \mapsto \partial_i$ definiert einen injektiven Morphismus

$$\mathsf{k}[T_1, \dots, T_n] \to D(n)$$

von Algebren.

Aufgabe 2.2.11. Eventuell hier bereits Aufgabe 2.7.21.

2.3. **Definition von Algebren durch Erzeuger und Relationen.** [4]

Definition 2.3.1. Sei T eine Menge, die wir uns als Alphabet vorstellen. Ein **Wort in** T ist eine Tupel $w = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in T^m$ von Elementen von T, wobei $m \in \mathbb{N}$ die **Länge** des Wortes ist. Man schreibt ein solches Wort oft als $t_1 t_2 \cdots t_m$. Das leere Tupel () ist ein Wort der Länge Null.

Lemma 2.3.2. *Sei T eine Menge. Der freie Vektorraum*

$$\mathsf{k}\langle T \rangle := \bigoplus_{\substack{m \in \mathbb{N}, \\ (t_1, \dots, t_m) \in T^m}} \mathsf{k} t_1 \cdots t_m$$

über der Menge aller Wörter in T wird wie folgt zu einer Algebra:

[4] Alle Ergebnisse dieses Abschnitts 2.3 gelten sinngemäß, wenn man den Körper k durch einen kommutativen Ring R ersetzt: Begriffe wie Vektorraum, lineare Abbildung, Algebra, Algebrenmorphismus, etc. sind durch R-Modul, R-lineare Abbildung, R-Algebra, Morphismus von R-Algebren, etc. zu ersetzen.

- *Multiplikation ist die eindeutige bilineare Abbildung* $\mathsf{k}\langle T\rangle \times \mathsf{k}\langle T\rangle \to \mathsf{k}\langle T\rangle$*, die ein Paar* $(w, v) = (t_1 \cdots t_m, s_1 \cdots s_l)$ *von Wörtern (aufgefasst als Elemente von* $\mathsf{k}\langle T\rangle$*) auf ihre* ***Konkatenation*** $wv := t_1 \cdots t_m s_1 \cdots s_l$ *abbildet.*

Sei $\mathrm{can}\colon T \to \mathsf{k}\langle T\rangle$ *die durch* $t \mapsto t$ *definierte Abbildung von Mengen.*

Die Algebra $\mathsf{k}\langle T\rangle$ *(bzw. genauer das Paar* $(\mathsf{k}\langle T\rangle, \mathrm{can})$*) heißt* ***freie Algebra über der Menge*** T *oder* ***freie Algebra mit Erzeugern*** T*, denn sie hat die folgende* universelle Eigenschaft*:*

Gegeben eine beliebige Algebra A *und eine beliebige Abbildung* $\varphi\colon T \to A$ *von Mengen gibt es genau einen Algebrenmorphismus* $\psi\colon \mathsf{k}\langle T\rangle \to A$ *mit* $\psi \circ \mathrm{can} = \varphi$*; die Situation ist im folgenden kommutativen Diagramm illustriert.*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\mathrm{can}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathsf{k}\langle T\rangle \arrow[r, dotted, "\exists!\psi"'] & A \end{tikzcd}$$

2.3.3. Elemente des freien Vektorraums $\mathsf{k}\langle T\rangle$ werden als Linearkombinationen von Wörtern in T geschrieben, z. B. $3() + 5(t_1, t_2) - 6(s_1, s_2, s_3) = 3() + 5t_1t_2 - 6s_1s_2s_3$.

Beweis. Die Aussage, das $\mathsf{k}\langle T\rangle$ eine Algebra wird, ist unkompliziert. Das Einselement dieser Algebra ist $()$.

Zur universellen Eigenschaft: Gegeben A und φ definieren wir $\psi\colon \mathsf{k}\langle T\rangle \to A$ als die eindeutige lineare Abbildung mit $\psi(t_1 \cdots t_m) = \varphi(t_1) \cdots \varphi(t_m)$ für alle Wörter $t_1 \cdots t_m$ in T. Man rechnet sofort nach, dass ψ ein Ringmorphismus und damit ein Algebrenmorphismus mit $\psi \circ \mathrm{can} = \varphi$ ist.

Ist umgekehrt $\psi'\colon \mathsf{k}\langle T\rangle \to A$ ein Algebrenmorphismus mit $\psi' \circ \mathrm{can} = \varphi$, so gilt

$$\psi'(t_1 \cdots t_m) = \psi'(t_1) \cdots \psi'(t_m) = \psi'(\mathrm{can}(t_1)) \cdots \psi'(\mathrm{can}(t_m)) = \varphi(t_1) \cdots \varphi(t_m).$$

Da ψ' eine lineare Abbildung ist, folgt $\psi' = \psi$. □

2.3.4. Die universelle Eigenschaft läßt sich äquivalent wie folgt formulieren: Für jede Algebra A ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Alg}(\mathsf{k}\langle T\rangle, A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Set}(T, A), \\ \psi &\mapsto \psi \circ \mathrm{can}, \end{aligned}$$

bijektiv. Die Menge auf der linken Seite bezeichnet die Menge aller Algebrenmorphismen von $\mathsf{k}\langle T\rangle$ nach A, die Menge auf der rechten Seite die aller Abbildungen von Mengen von T nach A (siehe 1.6.17).

2.3.5. Wir schreiben $\mathsf{k}\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ statt $\mathsf{k}\langle\{t_1, \ldots, t_n\}\rangle$. Hierbei nimmt man immer implizit an, dass die $t_1, \ldots, t_n$ paarweise verschieden sind.

2.3.6. Es gilt $xyz \neq x^2y$ in $\mathsf{k}\langle x, y\rangle$.

Aufgabe 2.3.7 (Freie Algebra über einer Menge)**.** Sei T eine Menge. Ein Paar $(B, \beta\colon T \to B)$, bestehend aus einer Algebra B und einer Abbildung $\gamma\colon T \to B$ von Mengen heißt **freie Algebra über** T, falls es für jede Algebra A und jede Abbildung $\varphi\colon T \to A$ von Mengen genau einen Algebrenmorphismus $\psi\colon B \to A$ mit $\psi \circ \beta = \varphi$ gibt.

Die Existenz einer freien Algebra über T wurde in Lemma 2.3.2 gezeigt.

Eindeutigkeit freier Algebren: Seien $(B, \beta\colon T \to B)$ und $(C, \gamma\colon T \to C)$ freie Algebren über T. Zeige, dass es genau einen Isomorphismus $\mu\colon B \to C$ von Algebren mit $\mu \circ \beta = \gamma$ gibt. Dies bedeutet, dass eine freie Algebra über T eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus[5] ist. Deswegen ist es gerechtfertigt, von *der* freien Algebra über T zu sprechen.

Aufgabe 2.3.8. Falls freier Vektorraum unbekannt: Formuliere die universelle Eigenschaft des freien Vektorraums $\mathsf{k}T$ über einer Menge T.

Aufgabe 2.3.9. Falls Tensorprodukte und Tensoralgebra bekannt: Sei $V = \mathsf{k}S$ der freie Vektorraum über einer Menge S. Dann sind die Tensoralgebra $\mathrm{T}\,V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{T}^n\,V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V \otimes \cdots \otimes V$ und $\mathsf{k}\langle S\rangle$ kanonisch isomorph als Algebren.

Definition 2.3.10. Sei A eine Algebra (oder ein Ring) und sei $R \subset A$ eine Teilmenge. Dann bezeichne $\langle R\rangle$ das von R erzeugte *beidseitige* Ideal von A, also das kleinste beidseitige Ideal in A, das R enthält, oder äquivalent die Menge aller Summen von Produkten der Form arb mit $a, b \in A$ und $r \in R$.

Definition 2.3.11. Sei T eine Menge und $R \subset \mathsf{k}\langle T\rangle$ eine Teilmenge. Dann nennt man

$$\mathsf{k}\langle T\rangle/\langle R\rangle = \frac{\mathsf{k}\langle T\rangle}{\langle R\rangle}$$

die **Algebra mit Erzeugern** T **und Relationen** R. Abkürzend schreibt man

$$\mathsf{k}\langle t_1, \ldots, t_m\rangle/\langle r_1, \ldots, r_l\rangle := \mathsf{k}\langle\{t_1, \ldots, t_m\}\rangle/\langle\{r_1, \ldots, r_l\}\rangle$$

und analog für beliebige Familien $(t_i)_{i\in I}$ von Erzeugern und $(r_j)_{j\in J}$ von Relationen. Hierbei nimmt man immer implizit an, dass die t_i, für $i \in I$, paarweise verschieden sind.

2.3.12. Der Begriff *Relationen* ist so zu verstehen, dass jedes Element $r \in R$ in $\frac{\mathsf{k}\langle T\rangle}{\langle R\rangle}$ die Relation $r = 0$ liefert.

2.3.13 (Universelle Eigenschaft)**.** Ist A eine beliebige Algebra und $\varphi\colon T \to A$ eine Abbildung von Mengen, so dass die „die Bilder der Elemente von T die Relationen aus R erfüllen“, d. h. der eindeutige Algebrenmorphismus $\psi\colon \mathsf{k}\langle T\rangle \to A$ mit $\psi \circ \mathrm{can} = \varphi$ erfüllt $\psi(R) = 0$, so gibt es genau einen Algebrenmorphismus

$$\mathsf{k}\langle T\rangle/\langle R\rangle \to A,$$

dessen Verknüpfung mit der Abbildung $T \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathsf{k}\langle T\rangle \twoheadrightarrow \mathsf{k}\langle T\rangle/\langle R\rangle$ die vorgegeben Abbildung φ ist. Dies folgt sofort aus der universellen Eigenschaft der freien Algebra (siehe Lemma 2.3.2) und der universellen Eigenschaft des Quotienten einer Algebra nach einem beidseitigen Ideal.

Beispiel 2.3.14 (Polynomalgebra als durch Erzeuger und Relationen definierte Algebra)**.** Die wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \frac{\mathsf{k}\langle t_1, \ldots, t_n\rangle}{\langle t_i t_j - t_j t_i \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}\rangle} &\xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n], \\ t_i &\mapsto X_i, \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Algebren. (Der Beweis ist dem Leser überlassen.) Da die angegebenen Relationen besagen, dass in der Algebra links $t_i t_j = t_j t_i$ gilt, wird diese Algebra auch als $\frac{\mathsf{k}\langle t_1, \ldots, t_n\rangle}{\langle t_i t_j = t_j t_i\rangle}$ notiert. Ähnliche Notation findet man auch in anderen Situationen.

[5] der mit den jeweiligen Abbildungen von T verträglich ist

Aufgabe 2.3.15. Beweise die Behauptung in Beispiel 2.3.14.

Aufgabe 2.3.16. Finde eine „möglichst einfache“ Basis der Algebra $\frac{\mathsf{k}\langle X,Y\rangle}{\langle YX=1\rangle}$ als Vektorraum. Das Element X dieser Algebra hat ein Linksinverses, nämlich Y, aber kein Rechtsinverses. Diese Beispiel zeigt, dass man bei der Definition einer Einheit sowohl die Existenz eines Linksinversen als auch die eines Rechtsinversen verlangen muss.

2.4. **Beschreibung der Weyl-Algebra durch Erzeuger und Relationen.**

Satz 2.4.1 (Beschreibung der Weyl-Algebra durch Erzeuger und Relationen)**.** *Die Abbildung*

$$\frac{\mathsf{k}\langle x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\rangle}{\left\langle \begin{matrix}[x_i,x_j],\\ [y_i,y_j],\\ [y_i,x_j]-\delta_{ij}\end{matrix} \;\middle|\; i,j\in\{1,\dots,n\}\right\rangle} \xrightarrow{\sim} D(n),$$
$$x_i \mapsto X_i,$$
$$y_i \mapsto \partial_i,$$

ist ein Isomorphismus von Algebren.

Beweis. Sei B die angegebene, durch Erzeuger und Relationen definierte Algebra. Die angegebene Abbildung ist ein wohldefinierter Algebrenmorphismus, denn die angegebenen Bilder X_i, ∂_i der Erzeuger x_i, y_i erfüllen nach 2.1.14 die angegebenen Relationen (dies verwendet die universelle Eigenschaft 2.3.13). Sie ist nach Definition der Weyl-Algebra surjektiv.

Aus den angegebenen Relationen folgt leicht, dass die Elemente $x^\alpha y^\beta := x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1}\cdots y_n^{\beta_n}$, für $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, ein Erzeugendensystem des Vektorraums B bilden. Sie sind aber sogar linear unabhängig und bilden somit eine Basis, denn sie gehen unter der angegebenen Abbildung auf die Basis $(X^\alpha\partial^\beta)_{\alpha,\beta}$ von $D(n)$ (siehe Satz 2.2.7). Die Behauptung folgt, denn unsere Abbildung ist linear und bildet eine Basis von B auf eine Basis von $D(n)$ ab. □

Ende der 2. Vorlesung am 10.10.2018.

2.4.2 (Universelle Eigenschaft der Weyl-Algebra)**.** Aus Satz 2.4.1 folgt unmittelbar: Ist A eine beliebige Algebra, so ist

$$\mathrm{Alg}(D(n),A) \xrightarrow{\sim} \left\{ (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)\in A^{2n} \;\middle|\; \begin{matrix}[a_i,a_j]=0,\\ [b_i,b_j]=0,\\ [b_i,a_j]=\delta_{ij}\end{matrix} \text{ für alle } i,j\in\{1,\dots,n\} \right\},$$
$$\varphi \mapsto (\varphi(X_1),\dots,\varphi(X_n),\varphi(\partial_1),\dots,\varphi(\partial_n)),$$

eine Bijektion von Mengen. In Worten ist ein Algebrenmorphismus $D(n)\to A$ eindeutig durch die Bilder der Erzeuger X_i,∂_i festgelegt, und umgekehrt definiert jede Wahl von potentiellen Bilder dieser Ereuger genau dann einen Algebrenmorphismus, wenn die Kommutatoren der gewählten Elemente die oben angegebenen Bedingungen erfüllen.

Satz 2.4.3. *Die Weyl-Algebra $D(n)$ ist isomorph zu ihrer opponierten Algebra $D(n)^{\mathrm{op}}$ (siehe Definition 1.6.13). Explizit definiert*

$$D(n) \xrightarrow{\sim} D(n)^{\mathrm{op}},$$
$$X_i \mapsto X_i = X_i^{\mathrm{op}},$$
$$\partial_i \mapsto -\partial_i = -\partial_i^{\mathrm{op}}$$

einen Isomorphismus von Algebren. Dieser heißt ***Hauptantiautomorphismus***[6] *(englisch* principal antiautomorphism*).*

Beweis. Wir verwenden Satz 2.4.1 bzw. die Variante 2.4.2. Wir müssen zeigen, dass die angegebenen Bilder der Erzeuger X_i, ∂_i die nötigen Relationen erfüllen. Für beliebige Elemente a, b einer Algebra A gilt in A^{op}

$$[a^{\mathrm{op}}, b^{\mathrm{op}}] = a^{\mathrm{op}} \cdot^{\mathrm{op}} b^{\mathrm{op}} - b^{\mathrm{op}} \cdot^{\mathrm{op}} a^{\mathrm{op}} = (ba)^{\mathrm{op}} - (ab)^{\mathrm{op}} = [b, a]^{\mathrm{op}},$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} [X_i^{\mathrm{op}}, X_j^{\mathrm{op}}] &= [X_j, X_i]^{\mathrm{op}} = 0^{\mathrm{op}} = 0, \\ [-\partial_i^{\mathrm{op}}, -\partial_j^{\mathrm{op}}] &= [\partial_j, \partial_i]^{\mathrm{op}} = 0, \\ [-\partial_i^{\mathrm{op}}, X_j^{\mathrm{op}}] &= -[X_j, \partial_i]^{\mathrm{op}} = [\partial_i, X_j]^{\mathrm{op}} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Dies liefert eine Algebrenmorphismus $\varphi\colon D(n) \to D(n)^{\mathrm{op}}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Außerdem ist $\varphi^{\mathrm{op}}\colon D(n)^{\mathrm{op}} \to (D(n)^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = D(n)$ offensichtlich invers zu φ.[7] $\square$

2.4.4 (Fourier-Automorphismus)**.** Der **Fourier-Automorphismus** ist der Algebrenisomorphismus (siehe Aufgabe 2.4.5)

$$\begin{aligned} D(n) &\xrightarrow{\sim} D(n), \\ X_i &\mapsto \partial_i, \\ \partial_i &\mapsto -X_i. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4.5. Zeige, dass der Fourier-Automorphismus in 2.4.4 wohldefiniert und bijektiv ist. Zeige, dass seine vierte Potenz die Identität ist. Ist sein Quadrat die Abbildung, die jedes Element auf sein Negatives schickt? Folgere $[X_i, \partial^\beta] = -\beta_i \partial^{\beta - e_i}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Aufgabe 2.4.6. Sei (V, ω) symplektischer Vektorraum mit $\dim V = 2n$. Dann sind die Weyl-Algebra $D(n)$ und $\frac{T(V)}{\langle v \otimes u - u \otimes v - \omega(v,u) \mid u, v \in V \rangle}$ als Algebren isomorph.

Aufgabe 2.4.7. Es gilt $D(n) = D(1) \otimes \cdots \otimes D(1)$ als Algebren.

Aufgabe 2.4.8. Ist A eine Algebra, dann ist der Kommutator

$$\begin{aligned} [,]\colon A \times A &\to A, \\ (a, b) &\mapsto [a, b] := ab - ba, \end{aligned}$$

bilinear, und es gelten die folgenden Rechenregeln für alle $a, b, c \in A$:

$$\begin{aligned} [a, a] &= 0, \\ [a, b] &= -[b, a], \\ [a, [b, c]] &= [[a, b], c] + [b, [a, c]]. \end{aligned}$$

[6] Der Wortbestandteil *anti* kommt daher, dass die Abbildung in der opponierten Algebra landet.

[7] Wir verwenden hier, dass man nicht nur die opponierte einer Algebra (oder eines Ringes) bilden kann, sondern auch den opponierten eines Algebrenmorphismus. Genauer ist $(-)^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Alg} \to \mathrm{Alg}$ ein Funktor. Dieser Funktor ist invers zu sich selbst, also involutiv.

Dies zeigt, dass der Vektorraum zusammen mit $[,]$ eine Lie-Algebra ist (die letzte Rechenregel heißt **Jacobi-Identität**, die zweite folgt aus der ersten). Außerdem gelten

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c],$$
$$[ab, c] = [a, c]b + a[b, c].$$

Aufgabe 2.4.9. Eventuell hier bereits Aufgaben zu $D(n)$-Modulen, also Aufgaben 2.7.11 und 2.7.12.

2.5. **Filtrierte und graduierte Ringe.**

Definition 2.5.1. Sei A ein Ring. Eine **aufsteigende Filtrierung von** A ist eine Familie $FA = (F_pA)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Untergruppen von A mit

(a) $F_pA \subset F_{p+1}A$ für alle $p \in \mathbb{Z}$,
(b) $1 \in F_0A$,
(c) $F_pA \cdot F_qA \subset F_{p+q}A$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

Da wir in dieser Vorlesung (fast) nur mit aufsteigenden Filtrierungen arbeiten, nennen wir eine solche Filtrierung schlicht **Filtrierung**. Man nennt einen Ring zusammen mit einer Filtrierung einen **filtrierten Ring**

Seien (A, FA) und (B, FB) filtrierte Ringe. Ein Ringmorphismus $\varphi\colon A \to B$ heißt **Morphismus filtrierter Ringe**, falls $\varphi(F_pA) \subset F_pB$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir erhalten die Kategorie filtrierter Ringe (die Verknüpfung ist offensichtlich).

Eine Filtrierung heißt

(a) **ausschöpfend**, falls $A = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_pA$,
(b) **nicht-negativ**[8], falls $F_{-1}A = 0$ gilt.
(c) **hausdorffsch** (oder **separiert**), falls $\bigcap_{p\in\mathbb{Z}} F_pA = \{0\}$ gilt.

2.5.2. Insbesondere ist F_0A automatisch ein Unterring (bzw. eine Unteralgebra) von A.

2.5.3. Jede nicht-negative Filtrierung ist offensichtlich hausdorffsch.

Konvention 2.5.4. Formal ist ein filtrierter Ring ein Paar (A, FA). Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Filtrierung gemeint ist, oder wenn ihre konkrete Bezeichnung unwichtig ist, läßt man FA oft weg und sagt schlicht, dass A ein filtrierter Ring ist.

Definition 2.5.5. Ersetzt man in Definition 2.5.1 *Ring* durch *Algebra* und *Untergruppe* durch *Untervektorraum*, so erhält man den Begriff einer Filtrierung einer Algebra, einer filtrierten Algebra und eines Morphismus filtrierter Algebren.[9]

Warnung 2.5.6. Der Begriff einer Filtrierung eines Rings unterscheidet sich vom Begriff einer Filtration $A = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots$ eines kommutativen Ringes A (in der kommutativen Algebra), wo alle $\mathfrak{a}_p$ als *Ideale* von A vorausgesetzt sind. Eine solchen Filtration liefert per

$$F_pA := \begin{cases} \mathfrak{a}_{-p} & \text{falls } p \le 0, \\ A & \text{falls } p \ge 0. \end{cases}$$

[8] Dies ist ad hoc Terminologie.

[9] Ist R ein kommutativer Ring, so ist der Begriff einer filtrierten R-Algebra analog definiert, indem man R-Untermoduln betrachtet.

eine (ausschöpfende) Filtrierung von A. Ist beispielsweise I ein Ideal in A, so liefert die I-adische Filtration $A = I^0 \supset I = I^2 \supset I^2 \supset \dots$ eine Filtrierung auf A, die man als I-adische Filtrierung bezeichnen mag.

Beispiel 2.5.7. Auf der Polynomalgebra $A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ definiert

$$F_p A := \{a \in A \mid \deg(a) \leq p\} = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, \\ |\alpha| \leq p}} \mathsf{k} X^\alpha,$$

für $p \in \mathbb{Z}$, eine ausschöpfende nicht-negative Filtrierung.

Beispiel 2.5.8 (Triviale Filtrierungen)**.** Ist A ein Ring, so definiert $F_p A = A$ eine Filtrierung auf A. Ebenso definiert $F_p A = 0$ für $n < 0$ und $F_p A = A$ für $n \geq 0$ eine Filtrierung auf A.

Satz 2.5.9 (Bernstein-Filtrierung)**.** *Auf der Weyl-Algebra $D(n)$ definiert*

$$\begin{aligned} B_p D(n) &= \langle X^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| + |\beta| \leq p \rangle_\mathsf{k} \\ &= \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta, \in \mathbb{N}^n, \\ |\alpha| + |\beta| \leq p}} \mathsf{k} X^\alpha \partial^\beta, \end{aligned}$$

*eine ausschöpfende nicht-negative Filtrierung $BD(n)$, wobei $\langle - \rangle_\mathsf{k}$ das Erzeugnis als (k-)Vektorraum meint und die zweite Gleicheit Satz 2.2.7 verwendet. Sie heißt **Bernstein-Filtrierung**. Sie erfüllt zusätzlich*

$$[B_p D(n), B_q D(n)] \subset B_{p+q-2} D(n) \tag{2.5.1}$$

für alle $d, e \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $A = D(n)$. Wir zeigen die Aussagen $B_p A \cdot B_q A \subset B_{p+q} A$ und $[B_p A, B_q A] \subset B_{p+q-2} A$. Alle anderen Behauptungen sind offensichtlich.

Wir zeigen zunächst die Hilfsaussage

$$[\partial^\beta, X^\gamma] \in B_{|\beta| + |\gamma| - 2} A \tag{2.5.2}$$

für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ per Induktion über $|\beta|$. Im Fall $|\beta| = 0$ (also $\partial^\beta = 1$) ist die Aussage trivial. Im Fall $|\beta| = 1$, also $\partial^\beta = \partial_i$, für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, gilt nach Lemma 2.1.13

$$[\partial^\beta, X^\gamma] = [\partial_i, X^\gamma] = \partial_i(X^\gamma) = \gamma_i X^{\gamma - e_i} \in B_{|\gamma| - 1} A = B_{|\beta| + |\gamma| - 2} A.$$

Gelte $|\beta| \geq 2$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\beta_i > 0$. Sei $\beta' := \beta - e_i$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} [\partial^\beta, X^\gamma] &= [\partial^{\beta'} \partial_i, X^\gamma] \\ \text{(Aufgabe 2.4.8)} \quad &= \partial^{\beta'} [\partial_i, X^\gamma] + [\partial^{\beta'}, X^\gamma] \partial_i \\ \text{(Lemma 2.1.13)} \quad &= \partial^{\beta'} \gamma_i X^{\gamma - e_i} + [\partial^{\beta'}, X^\gamma] \partial_i \\ &= \underbrace{[\partial^{\beta'}, \gamma_i X^{\gamma - e_i}]}_{\in B_{|\beta| + |\gamma| - 4} A} + \gamma_i X^{\gamma - e_i} \partial^{\beta'} + \underbrace{[\partial^{\beta'}, X^\gamma]}_{\in B_{|\beta| + |\gamma| - 3} A} \partial_i \in B_{|\beta| + |\gamma| - 2} A, \end{aligned}$$

wobei wir am Ende die Induktionsannahme verwenden. Dies zeigt die Hilfsaussage.

Seien beliebige Multi-Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$ gegeben. Mit der Hilfsaussage erhalten wir

$$X^\alpha \partial^\beta X^\gamma \partial^\delta = X^\alpha X^\gamma \partial^\beta \partial^\delta + X^\alpha \underbrace{[\partial^\beta, X^\gamma]}_{\in B_{|\beta| + |\gamma| - 2}} \partial^\delta \in B_{|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|}$$

Daraus folgt sofort $B_pA \cdot B_qA \subset B_{p+q}A$, d. h. $BD = (B_pA)_{d\in\mathbb{Z}}$ definiert in der Tat eine Filtrierung. Außerdem erhalten wir

$$X^\alpha \partial^\beta X^\gamma \partial^\delta = X^{\alpha+\gamma}\partial^{\beta+\delta} \quad \text{im Quotientenvektorraum } \frac{B_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|}}{B_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|-2}}. \tag{2.5.3}$$

Das Element auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ändert sich nicht, wenn wir α mit γ und β mit δ vertauschen. Somit folgt $X^\alpha\partial^\beta X^\gamma\partial^\delta = X^\gamma\partial^\delta X^\alpha\partial^\beta$ in diesem Quotientenraum, d. h. $[X^\alpha\partial^\beta, X^\gamma\partial^\delta] \in B_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|-2}$. Dies zeigt $[B_pA, B_qA] \subset B_{p+q-2}A$. □

Definition 2.5.10. Sei A ein Ring. Eine **Graduierung von** A ist eine Familie $(A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Untergruppen von A mit

(a) $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$,
(b) $A^p \cdot A^q \subset A^{p+q}$ für alle $p, q \in A$.

Man nennt einen Ring zusammen mit einer Graduierung einen **graduierten Ring**

Die Kategorie graduierter Ringe ist in offensichtlicher Weise definiert: Ein Morphismen $A = \bigoplus A^p \to B = \bigoplus B^p$ graduierter Ringe ist ein Ringmorphismus $\varphi\colon A \to B$ mit $\varphi(A^p) \subset B^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Die Elemente von A^p heißen **homogen vom Grad** p.[10] Ein Element $a \in A$ heißt **homogen**, wenn es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $a \in A^p$ gibt; im Fall $a \neq 0$ ist ein solches n eindeutig bestimmt. Eine Graduierung heißt

(a) **nicht-negativ**[11], falls $A^p = 0$ für alle $p < 0$ gilt.

Definition 2.5.11. Ersetzt man in Definition 2.5.1 *Ring* durch *Algebra* und *Untergruppe* durch *Untervektorraum*, so erhält man den Begriff einer Graduierung einer Algebra, einer graduierten Algebra und eines Morphismus graduierter Algebren.[12]

Aufgabe 2.5.12. Sei $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein graduierter Ring. Dann gilt $1 \in A^0$.

Aufgabe 2.5.13. Sei $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein graduierter Ring. Ein Linksideal $I \subset A$ heißt **homogen**, falls für alle Elemente $x \in I$ gilt: Ist $x = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x_p$ die eindeutige Darstellung mit $x_p \in A^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ (wobei nur endlich viele x_p von Null verschieden sind), so gilt $x_p \in I$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. (Abstrakt kann man diese Bedingung auch als $I = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}(I \cap A^p)$ schreiben.) Zeige:

(a) Ein Linksideal $I \subset A$ ist genau dann homogen, wenn es von homogenen Elementen erzeugt ist.

Analoges gilt offenbar für Rechtsideale und (beidseitige) Ideale.

(b) Ist $I \subset A$ ein homogenes (beidseitiges) Ideal, so ist A/I in natürlicher Weise ein graduierter Ring und $A \to A/I$ ist ein Morphismus graduierter Ringe.

Beispiel 2.5.14. Auf der Polynomalgebra $A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ definiert

$$A^p := \bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n,\\ |\alpha|=p}} \mathsf{k}X^\alpha,$$

[10] Das Nullelement ist homogen von allen Graden.

[11] Dies ist ad hoc Terminologie.

[12] Ist R ein kommutativer Ring, so ist der Begriff einer graduierten R-Algebra analog definiert, indem man R-Untermoduln betrachtet.

für $p \in \mathbb{Z}$, eine Graduierung auf A, genannt **Standardgraduierung**. Ihre p-te Kompomente A^p besteht aus den homogenen Polynomen vom Grad p (sowohl im oben definierten Sinne als auch im vermutlich vom Leser erwarteten Sinne).

Man kann dieses Beispiel variieren: Beispielsweise kann man für jedes Element X_i ein Zahl $d_i \in \mathbb{Z}$ wählen und dann eine eindeutige Graduierung definieren, so dass jedes X_i homogen vom Grad d_i ist.

Proposition 2.5.15. *Sei (A, FA) ein filtrierter Ring. Setze*[13] [14]

$$\operatorname{gr}^p A := \operatorname{gr}^p_F A := \frac{F_p A}{F_{p-1} A}.$$

Dann gibt es auf der abelschen Gruppe

$$\operatorname{gr} A := \operatorname{gr}_F A := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \operatorname{gr}^p A$$

genau eine Multiplikation mit

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab} \quad \text{oder genauer} \quad \overline{a}^{\operatorname{gr}^p A} \cdot \overline{b}^{\operatorname{gr}^q A} = \overline{ab}^{\operatorname{gr}^{p+q} A}$$

*für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle $a \in F_p A$, $b \in F_q A$, die $\operatorname{gr} A$ zu einem Ring macht. Genauer ist $\operatorname{gr} A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \operatorname{gr}^p A$ ein graduierter Ring und heißt der **zu** A **assoziierte graduierte Ring** oder genauer der **zum filtrierten Ring** (A, FA) **assoziierte graduierte Ring**.* [15] *Analoges gilt für filtrierte Algebren.*

Ende der 3. Vorlesung am 15.10.2018.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 2.5.12
Hinweis: Sei $1 = a_{-N} + \cdots + a_0 + \cdots + a_N$ mit $a_p \in A^p$. Zu zeigen ist $a_p = 0$ für alle $p \neq 0$.
(2) Aufgabe 2.5.13
(3) Aufgabe 2.5.36
(4) Aufgabe 2.5.37

Beweis. Dem Leser überlassen. Die Existenz eines Eins-Elements in $\operatorname{gr} A$ folgt aus der Bedingung $1 \in F_0 A$. □

Beispiel 2.5.16. Versehen wir $\mathsf{k}[X]$ oder $\mathsf{k}[[X]]$ mit der (X)-adischen Filtrierung (siehe Warnung 2.5.6), so ist die assoziierte graduierte Algebra in kanonischer Weise als graduierte Algebra zur Polynomalgebra $\mathsf{k}[X]$ isomorph, wobei X homogen vom Grad -1 ist.

2.5.17. Aus der Definition eines filtrierten Ringes folgt $[F_p A, F_q A] \subset F_p A \cdot F_q A + F_q A \cdot F_p A \subset F_{p+q} A$. Gilt schärfer $[F_p A, F_q A] \subset F_{p+q-1} A$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, so ist $\operatorname{gr} A$ kommutativ; genauer sind diese beiden Bedingungen äquivalent: Seien $a \in F_p A$ und $b \in F_q A$ mit zugehörigen Klassen $\overline{a} \in \operatorname{gr}^p A$ und $\overline{b} \in \operatorname{gr}^q A$. Dann ist $ab - ba = [a, b] \in F_{p+q-1} A$ zu $\overline{a}\overline{b} - \overline{a}\overline{b} = \overline{ab - ba} = 0$ in $\operatorname{gr}^{p+q} A$ äquivalent.

[13] Es ist eigentlich üblich und wohl logischer, gr^p_F zu schreiben, aber ich bin so an obere Indizes für graduierte Ringe gewöhnt.

[14] Formal korrekter wäre $\operatorname{gr}^p_{FA} A$ oder $\operatorname{gr}^p(A, FA)$ statt $\operatorname{gr}^p_F A$.

[15] Wir folgen der Tradition und schreiben $\operatorname{gr}^p A$ statt $(\operatorname{gr} A)^p$.

Für die Bernstein-Filtrierung gilt nach Satz 2.5.9 eine noch schärfere Inklusion; insbesondere folgt, dass $\operatorname{gr}_B D(n)$ kommutativ ist. Genauer ist $\operatorname{gr}_B D(n)$ ein Polynomring, wie wir sogleich in Satz 2.5.19 sehen werden.

Bemerkung 2.5.18. Ist $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein graduierter Ring, so definiert $F_pA := \bigoplus_{q\le p} A^q$, für $p \in \mathbb{Z}$, eine Filtrierung auf A. Dies ist der **zu A assoziierte filtrierte Ring**. Der zu diesem filtrierten Ring assoziierte graduierte Ring $\operatorname{gr}^F A$ ist als graduierter Ring kanonisch isomorph zu A.

Satz 2.5.19 (Zur Bernstein-Filtrierung assoziierte graduierte Algebra)**.** *Betrachte die Bernstein-Filtrierung $(B_pD(n))_{p\in\mathbb{Z}}$ auf der Weyl-Algebra $D(n)$. Die linearen Abbildungen*

$$\psi_p\colon B_pD(n) \to \mathsf{k}[X_1,\dots,X_n,\xi_1,\dots,\xi_n],$$
$$\sum_{|\alpha|+|\beta|\le p} c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta \mapsto \sum_{|\alpha|+|\beta|=p} c_{\alpha\beta}X^\alpha\xi^\beta,$$

für $p \in \mathbb{Z}$, induzieren einen Isomorphismus

$$\psi\colon \operatorname{gr}_B D(n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[X_1,\dots,X_n,\xi_1,\dots,\xi_n]$$

von graduierten Algebren, wobei die Graduierung der Polynomalgebra auf der rechten Seite die Standardgraduierung ist, d. h. alle X_i und ξ_i sind homogen vom Grad 1.

Beweis. Es ist klar, dass ψ_p zu einem Isomorphismus

$$\operatorname{gr}^p D(n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[X_1,\dots,X_n,\xi_1,\dots,\xi_n]^p$$

von Vektorräumen faktorisiert. Die direkte Summe (= das Koprodukt) all dieser Isomorphismen ist die angegebene Abbildung ψ, die somit ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Klar ist $\psi(1) = 1$. Zu zeigen bleibt, dass ψ mit den jeweiligen Multiplikationen verträglich ist. Gegeben $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ bezeichne $\overline{X^\alpha\partial^\beta}$ die Klasse von $X^\alpha\partial^\beta \in B_{|\alpha|+|\beta|}D(n)$ in $\operatorname{gr}^{|\alpha|+|\beta|} D(n)$. All diese Elemente bilden offensichtlich eine Basis von $\operatorname{gr}_B D(n)$.

Wir erinnern daran, dass $[B_pD(n), B_qD(n)] \subset B_{p+q-2}D(n)$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt (siehe (2.5.1) in Satz 2.5.9). Dies hat zur Folge, dass $\operatorname{gr}_B D(n)$ kommutativ ist (siehe 2.5.17). Für beliebige $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$ gilt somit

$$\overline{X^\alpha\partial^\beta}\cdot\overline{X^\gamma\partial^\delta} = \overline{X^\alpha}\cdot\overline{\partial^\beta}\cdot\overline{X^\gamma}\cdot\overline{\partial^\delta} = \overline{X^\alpha}\cdot\overline{X^\gamma}\cdot\overline{\partial^\beta}\cdot\overline{\partial^\delta} = \overline{X^{\alpha+\gamma}\partial^{\beta+\delta}} \quad \text{in } \operatorname{gr}^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|} D(n).$$

Daraus folgt

$$\psi(\overline{X^\alpha\partial^\beta}\cdot\overline{X^\gamma\partial^\delta}) = \psi(\overline{X^{\alpha+\gamma}\partial^{\beta+\delta}}) = X^{\alpha+\gamma}\xi^{\beta+\delta} = X^\alpha\xi^\beta\cdot X^\gamma\xi^\delta = \psi(\overline{X^\alpha\partial^\beta})\cdot\psi(\overline{X^\gamma\partial^\delta}).$$

Also ist ψ mit den Multiplikationen verträglich und somit ein Isomorphismus von Algebren. □

Lemma 2.5.20. *Sei A ein Ring mit einer hausdorffschen ausschöpfenden Filtrierung. Ist $\operatorname{gr} A$ nullteilerfrei (bzw. ein Integritätsbereich, vgl. Definition 1.6.9), so ist auch A nullteilerfrei (bzw. ein Integritätsbereich).*

Beweis. Sei $FA = (F_pA)_{p\in\mathbb{Z}}$ die Filtrierung auf A. Seien $a, b \in A - 0$. Da die Filtrierung ausschöpfend ist, liegt a in einem F_pA. Da die Filtrierung hausdorffsch ist und $a \neq 0$ gilt, liegt a nicht in allen F_pA. Also gibt es ein (eindeutiges) $p \in \mathbb{Z}$ mit $a \in F_pA - F_{p-1}A$. Sei $q \in \mathbb{Z}$ analog mit $b \in F_qA - F_{q-1}A$.

Sei $\operatorname{gr} A$ nullteilerfrei. Aus $\overline{a} \in \operatorname{gr}^p A - \{0\}$ und $\overline{b} \in \operatorname{gr}^q A - \{0\}$ folgt $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} \neq 0$ in $\operatorname{gr}^{p+q} A \subset \operatorname{gr} A$, d. h. $ab \in F_{p+q}A - F_{p+q-1}A$, also insbesondere $ab \neq 0$. Also ist A nullteilerfrei.

Ist $\operatorname{gr} A$ nicht der Nullring, also $\operatorname{gr} A \neq 0$, so folgt $F_0 A \neq 0$ und damit $A \neq 0$, d. h. A ist nicht der Nullring. Somit ist mit $\operatorname{gr} A$ auch A ein Integritätsbereich. □

Korollar 2.5.21 (zu Satz 2.5.19)**.** *Die Weyl-Algebra $D(n)$ ist ein Integritätsbereich.*

Beweis. Wir verwenden die ausschöpfende, nicht-negative Bernstein-Filtrierung auf $D(n)$ (siehe Satz 2.5.9). Nach Satz 2.5.19 ist die zugehörige assoziierte graduierte Algebra eine Polynomalgebra, also ein Integritätsbereich. Nach Lemma 2.5.20 ist dann bereits $D(n)$ ein Integritätsbereich. □

Aufgabe 2.5.22. Die Umkehrung der Aussage von Lemma 2.5.20 gilt nicht.

Hinweis: Definiere auf $\mathsf{k}[X]$ eine geeignete Filtrierung (indem sie die Standardfiltrierung leicht verändern).

Aufgabe 2.5.23. Es gibt genau eine Graduierung auf der Weyl-Algebra $D(1)$, so dass X homogen vom Grad 1 ist und ∂ homogen vom Grad -1. Eine analoge Graduierung gibt es auf $D(n)$.

Definition 2.5.24. Der **Bernstein-Grad** $\operatorname{Bdeg}(T)$ eines Elements $T \in D(n)$ ist im Falle $T \neq 0$ die eindeutige natürliche Zahl p mit $T \in B_p D(n) - B_{p-1} D(n)$; im Falle $T = 0$ sei der Bernstein-Grad $-\infty$.

2.5.25. Schreibt man $T = \sum t_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta$ für eindeutig bestimmte Koeffizienten $t_{\alpha\beta} \in \mathsf{k}$, von denen höchstens endlich viele ungleich Null sind, so gilt

$$\operatorname{Bdeg}(T) = \begin{cases} \max\{|\alpha| + |\beta| \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, t_{\alpha\beta} \neq 0\} & \text{falls } T \neq 0, \\ -\infty & \text{falls } T = 0. \end{cases}$$

Konvention 2.5.26. Das Symbol $-\infty$ ist im Folgenden in offensichtlicher Weise zu interpretieren: Es gelten $-\infty \leq n$ und $-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty$ für alle $p \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

2.5.27. Das folgende Lemma (jedenfalls die Aussagen (a) und (c)) zeigt, dass sich der Bernstein-Grad wie der von Polynomalgebren über Körpern gewohnte Grad verhält.

Lemma 2.5.28. *Für alle $S, T \in D(n)$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\operatorname{Bdeg}(S+T) \leq \max(\operatorname{Bdeg}(S), \operatorname{Bdeg}(T))$ *mit Gleichheit im Falle* $\operatorname{Bdeg}(S) \neq \operatorname{Bdeg}(T)$*;*
(b) $\operatorname{Bdeg}([S,T]) \leq \operatorname{Bdeg}(S) + \operatorname{Bdeg}(T) - 2$*;*
(c) $\operatorname{Bdeg}(ST) = \operatorname{Bdeg}(S) + \operatorname{Bdeg}(T)$*.*

Beweis. Die erste Behauptung ist offensichtlich. Die zweite Behauptung folgt aus der Inklusion (2.5.1) in Satz 2.5.9.

Wir zeigen die dritte Behauptung. Ohne Einschränkung können wir $S \neq 0 \neq T$ annehmen. Sei $s = \operatorname{Bdeg}(S)$ und $t = \operatorname{Bdeg}(T)$, also $\overline{S} = \overline{S}^{\operatorname{gr}^s D(n)} \neq 0$ und $\overline{T} = \overline{T}^{\operatorname{gr}^t D(n)} \neq 0$. Da $\operatorname{gr} D(n)$ nach Satz 2.5.19 ein Integegritätsbereich ist, folgt $\overline{ST} = \overline{S} \cdot \overline{T} \neq 0$ in $\operatorname{gr}^{s+t} D(n)$, also $ST \in B_{s+t} D(n) - B_{s+t-1} D(n)$, d. h. $\operatorname{Bdeg}(ST) = s + t$. □

Satz 2.5.29. *Die Einheiten von $D(n)$ sind genau die Einheiten von k, in Formeln $D(n)^\times = \mathsf{k}^\times = \mathsf{k} - 0$. Genauer ist ein Element von $D(n)$ genau dann linksinvertierbar (bzw. rechstinvertierbar), wenn es in $\mathsf{k}^\times$ liegt.*

Beweis. Seien $S, T \in D(n)$ mit $ST = 1$. Dann gilt $0 = \mathrm{Bdeg}(1) = \mathrm{Bdeg}(ST) = \mathrm{Bdeg}(S) + \mathrm{Bdeg}(T)$ nach Lemma 2.5.28. Daraus folgt $\mathrm{Bdeg}(S) = 0 = \mathrm{Bdeg}(T)$, also $S, T \in \mathsf{k}^\times$. □

Definition 2.5.30. Ein Ring (oder eine Algebra) A heißt **einfach**, falls er nicht der Nullring ist und falls $\{0\}$ und A die einzigen (beidseitigen) Ideale von A sind.

Warnung 2.5.31. Es gibt auch den Begriff eines *halbeinfachen* Ringes. Halbeinfache Ringe sind im allgemeinen nicht einfach, und einfache Ringe sind im allgemeinen nicht halbeinfach.

Satz 2.5.32. *Die Weyl-Algebra $D(n)$ ist eine einfache Algebra.*

Beweis. Sei $I \subset D(n)$ ein beidseitiges Ideal. Gelte $I \neq 0$. Unter allen Elementen von $I - 0$ sei T ein Element von minimalem Bernstein-Grad.

Wegen $[\partial_i, T] = \partial_i T - T\partial_i \in I$ und $\mathrm{Bdeg}([\partial_i, T]) \leq \mathrm{Bdeg}(\partial_i) + \mathrm{Bdeg}(T) - 2 = \mathrm{Bdeg}(T) - 1$ (siehe Lemma 2.5.28) und der Wahl von T folgt $[\partial_i, T] = 0$. Analog zeigt man $[X_i, T] = 0$.

Schreibe $T = \sum t_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta$. Für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$[\partial_i, X^\alpha \partial^\beta] = [\partial_i, X^\alpha]\partial^\beta + X^\alpha \underbrace{[\partial_i, \partial^\beta]}_{=0} = \alpha_i X^{\alpha - e_i} \partial^\beta,$$

wobei die letzte Gleichung Lemma 2.1.13 verwendet, also

$$0 = [\partial_i, T] = \sum t_{\alpha\beta} \alpha_i X^{\alpha - e_i} \partial^\beta.$$

Es folgt $t_{\alpha\beta}\alpha_i = 0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und alle i. Aus $t_{\alpha\beta} \neq 0$ folgt also $\alpha = 0$. Somit gilt $T = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} t_{0,\beta} \partial^\beta$.

Man zeigt (per Induktion oder mit dem Fourier-Automorphismus, siehe Aufgabe 2.4.5)

$$[X_i, \partial^\beta] = -\beta_i \partial^{\beta - e_i}.$$

Es folgt

$$0 = [X_i, T] = -\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} t_{0,\beta} \beta_i \partial^{\beta - e_i}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aus $t_{0,\beta} \neq 0$ folgt also $\beta = 0$. Somit gilt $T = t_{0,0} \in \mathsf{k}$. Wegen $T \neq 0$ folgt $I = D(n)$. □

2.5.33. Littlewoods Theorem X in [Lit33] lautet: *No second modulus is compatible with the modulus $px - xp - 1$.* In moderner Sprache bedeutet dies wohl: Keine weitere Relation ist mit der Relation $px - xp - 1$ verträglich.

Dies ist schlicht die Aussage, dass die durch die Relation $[\partial, X] = 1$ definierte Weyl-Algebra $D(1)$ einfach ist. Verlangt man nämlich eine weitere Relation, die nicht schon aus dieser Relation folgt - bildet man also den Quotienten nach dem von dieser neuen Relation erzeugten Ideal -, so kollabiert $D(1)$ zum Nullring.

Warnung 2.5.34. Ein kommutativer Ring ist genau dann einfach, wenn er ein Körper ist. Die analoge Aussage für nichtkommutative Ringe, in der man Körper durch Schiefkörper ersetzt, ist nicht richtig: Zwar ist jeder Schiefkörper einfach, jedoch ist nicht jeder einfache nichtkommutative Ring ein Schiefkörper: Die Weyl-Algebra $D(n)$, für $n \geq 1$, ist ein Beispiel eines nichtkommutativen einfachen Integritätsbereichs, der kein Schiefkörper ist.

Bemerkung 2.5.35. Ist R ein einfacher Ring und $\varphi\colon R \to S$ ein Ringmorphismus, so ist φ injektiv, sofern S nicht der Nullring ist. Dies liegt daran, dass der Kern von φ ein beidseitiges Ideal von R. Ist dieses Ideal das Nullideal, so ist φ injektiv. Stimmt dieses Ideal mit R überein, so gilt $1_S = \varphi(1_R) = 0$ und somit $S = 0$.

Insbesondere ist also jeder Algebrenendomorphismus der Weylalgebra injektiv.

Aufgabe 2.5.36 ([Cou95, Exercise II.4.9])**.** Die erste Weyl-Algebra $D(1)$ ist kein „Hauptlinksidealring“: Das Linksideal $\mathfrak{a} := D(1)\partial^2 + D(1)(X\partial - 1)$ von $D(1)$ ist nicht zyklisch, es gibt also keine Element $a \in D(1)$ mit $\mathfrak{a} = D(1)a$.

Hinweis: Nutze den Bernsteingrad. Jedes Element von $\mathfrak{a} - 0$ hat Bernsteingrad ≥ 2.

Aufgabe 2.5.37 ([Cou95, Exercise II.4.10])**.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi\colon D(1)^2 &\to D(1), \\ (a, b) &\mapsto a\partial + bX, \end{aligned}$$

ist ein Morphismus von $D(1)$-Moduln. (Fasst man Elemente von $D(1)^2$ als Zeilenvektoren auf, so ist sie durch *Rechts*multiplikation mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} \partial \\ X \end{pmatrix}$ gegeben.) Sie ist surjektiv, und die Projektion $D(1)^2 \to D(1)$ auf die zweite Komponente liefert einen Isomorphismus zwischen dem Kern $\operatorname{Ker}(\pi)$ von π und dem Linksideal $\mathfrak{a} := D(1)\partial^2 + D(1)(X\partial - 1)$ von $D(1)$ (das schon in der vorigen Aufgabe 2.5.36 auftauchte). Falls projektive Moduln bekannt: Folgere, dass $\mathfrak{a}$ als $D(1)$-Modul projektiv ist.

Aufgabe 2.5.38. Beweise Korollar 2.5.21 unter Verwendung des Bernstein-Grades.

Aufgabe 2.5.39. Sei (A, FA) ein ausschöpfend nicht-negativ filtrierter Ring, so dass $\operatorname{gr} A$ nullteilerfrei ist. Dann stimmen die Einheiten von A mit denen von F_0A überein, in Formeln $A^\times = (F_0A)^\times$.

Dies liefert eine Variante des Beweises, dass $D(n)^\times = \mathsf{k}^\times$ gilt.

2.6. **Filtrierte und graduierte Moduln.**

2.6.1. Wir führen bereits hier filtrierte Moduln ein, um zu zeigen, dass die Weyl-Algebra noethersch ist (siehe Satz 2.6.20). Filtrierte Moduln werden dann wieder in 4.4 wichtig. Wir erinnern daran, dass Moduln stets Linksmoduln sind.

Definition 2.6.2. Sei (A, FA) ein filtrierter Ring und M ein A-Modul. Eine **Filtrierung von** M oder genauer eine **aufsteigende, mit der Filtrierung von** A **kompatible Filtrierung von** M ist eine Familie $FM = (F_pM)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Untergruppen von M mit

(a) $F_pM \subset F_{p+1}M$ für alle $p \in \mathbb{Z}$,
(b) $F_pA.F_qM \subset F_{p+q}M$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

Ein **filtrierter Modul** über dem filtrierten Ring A ist ein A-Modul M zusammen mit einer solchen Filtrierung.

Seien (M, FM) und (N, FN) filtrierte A-Moduln. Eine Morphismus $f\colon M \to N$ von A-Moduln heißt **Morphismus filtrierter** A**-Moduln**, falls $f(F_pM) \subset F_pN$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir erhalten die Kategorie $\operatorname{filtMod}(A)$ filtrierter A-Moduln.

Eine Filtrierung von M heißt

(a) **ausschöpfend**, falls $M = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_pM$,

(b) **bei Null beginnend**[16], falls es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $F_pM = 0$ gibt.
(c) **hausdorffsch** (oder **separiert**), falls $\bigcap_{p\in\mathbb{Z}} F_pM = \{0\}$ gilt.

Ende der 4. Vorlesung am 17.10.2018.

2.6.3. Insbesondere ist jedes F_pM automatisch ein F_0A-Modul. Jede bei Null beginnende Filtrierung ist hausdorffsch.

Beispiel 2.6.4. Jeder filtrierte Ring ist ein filtrierter Modul über sich selbst.

Beispiel 2.6.5. Sei (A, FA) ein nicht-negativ filtrierter Ring und sei M ein A-Modul. Sei $T \subset M$ eine Teilmenge, etwa $T = \{m_1, \ldots, m_\ell\}$ für Elemente. Dann definiert

$$F_pM := \begin{cases} 0 & \text{falls } p < 0, \\ F_pA.T & \text{falls } p \geq 0, \end{cases}$$

eine nicht-negative Filtrierung auf M. Sie ist ausschöpfend, falls FA ausschöpfend ist und M von T als A-Modul erzeugt ist.

2.6.6. Ein filtrierter Modul über einer filtrierten Algebra ist per definitionem ein filtrierter Modul über dem unterliegenden filtrierten Ring. Alle Komponenten einer Filtrierung auf einem solchen Modul sind automatisch Vektorräume.

2.6.7. Wir haben Filtrierungen für Ringe (bzw. Algebren) und Moduln eingeführt. Wenn nötig, so spricht man von Ring-Filtrierungen (bzw. Algebren-Filtrierungen) bzw. Modul-Filtrierungen.

Definition 2.6.8. Sei $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein graduierter Ring und M ein A-Modul. Eine **Graduierung von** M ist eine Familie $(M^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Untergruppen mit

(a) $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} M^p$,
(b) $A^p \cdot M^q \subset M^{p+q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

Ein **graduierter Modul** über dem graduierten Ring A ist ein A-Modul zusammen mit einer solchen Graduierung.

Die Kategorie $\mathrm{grMod}(A)$ graduierter A-Moduln ist in offensichtlicher Weise definiert: Ein Morphismen $M = \bigoplus M^p \to N = \bigoplus N^n$ graduierter A-Moduln ist ein Morphismus $f\colon M \to N$ von A-Moduln mit $f(M^p) \subset N^n$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Die Elemente von M^p heißen **homogen vom Grad** n.[17] Ein Element $m \in M$ heißt **homogen**, wenn es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $m \in M^p$ gibt; im Fall $m \neq 0$ ist ein solches n eindeutig bestimmt.

2.6.9. Ein graduierter Modul über einer graduierten Algebra ist per definitionem ein graduierter Modul über dem unterliegenden graduierten Ring. Alle Komponenten einer Graduierung auf einem solchen Modul sind automatisch Vektorräume.

2.6.10. Im Folgenden schreiben wir manche Resultate nur für filtrierte oder graduierte Ringe und Moduln darüber auf; sie gelten meist analog für filtrierte oder graduierte Algebren und deren Moduln.

[16] Dies ist ad hoc Terminologie.
[17] Das Nullelement ist homogen von allen Graden.

2.6.11. Sei (M, FM) ein filtrierter Modul über dem filtrierten Ring A. Setzt man $\operatorname{gr}^p M := \operatorname{gr}^p_F M := \frac{F^p M}{F^{p-1} M}$, so wird $\operatorname{gr}(M) := \operatorname{gr}_F M := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \operatorname{gr}^p M$ in offensichtlicher Weise ein graduierter $\operatorname{gr} A$-Modul. Ist $f\colon M \to N$ ein Morphismus filtrierter A-Moduln, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{gr}(f)\colon\ \operatorname{gr}(M) &\to \operatorname{gr}(N), \\ \operatorname{gr}^p M \ni \overline{m} &\mapsto \overline{f(m)} \in \operatorname{gr}^p N, \end{aligned}$$

ein Morphismus graduierter $\operatorname{gr} A$-Moduln. Wegen $\operatorname{gr}(f \circ g) = \operatorname{gr}(f) \circ \operatorname{gr}(g)$ und $\operatorname{gr}(\operatorname{id}_{(M,FM)}) = \operatorname{id}_{\operatorname{gr}(M)}$ definiert dies einen Funktor

$$\operatorname{gr}\colon\ \operatorname{filtMod}(A) \to \operatorname{grMod}(\operatorname{gr} A).$$

Lemma 2.6.12 (Induzierte Filtrierungen auf Untermoduln und Quotienten)**.** *Sei (M, FM) ein filtrierter Modul über einem filtrierten Ring (A, FA).*

(a) Sei $\iota\colon U \hookrightarrow M$ ein injektiver Morphismus von A-Moduln. Dann wird U durch $F_p U := \iota^{-1}(F_p M) =$ „$U \cap F_p M$“ ein filtrierter A-Modul und ι ein Morphismus filtrierter A-Moduln.

(b) Sei $\pi\colon M \twoheadrightarrow Q$ ein surjektiver Morphismus von A-Moduln. Dann wird Q durch $F_p Q := \pi(F_p M)$ ein filtrierter A-Modul und π ein Morphismus filtrierter A-Moduln. Gilt $Q = M/U$, so gilt $F_p Q = \frac{F_p M + U}{U}$.

Beweis. Klar. □

2.6.13. Filtrierungen sind flexibler als Graduierungen. Graduierungen sind leichter handhabbar, zum Beispiel ist die Kategorie $\operatorname{grMod}(A)$ abelsch, die Kategorie $\operatorname{filtMod}(A)$ nicht (siehe Aufgabe 2.6.25). Induzierte Graduierungen gibt es im Gegensatz zu induzierten Filtrierungen selten; es gibt sie nur auf *homogenen* Untermoduln (die Definition eines solchen Untermoduls ist analog zu der eines homogenen Ideals, vgl. Aufgabe 2.5.13).

Lemma 2.6.14. *Sei M ein filtrierter Modul über einem filtrierten Ring A. Sei $0 \to U \to M \to Q \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Versehen wir U und Q mit den von M induzierten Filtrierungen, so ist*

$$0 \to \operatorname{gr} U \to \operatorname{gr} M \to \operatorname{gr} Q \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz.[18]

Beweis. Diagrammjagd (ohne Einschränkung ist U ein Untermodul von M und es gilt $Q = M/U$). □

Konvention 2.6.15. Sagen wir, dass ein filtrierter (bzw. graduierter) Modul M über einem filtrierten (bzw. graduierten) Ring A endlich erzeugt bzw. noethersch bzw. ... ist, so meint dies die Eigenschaft von M als „normalem“, d. h. unfiltriertem (bzw. ungraduiertem), A-Modul.

Definition 2.6.16. Ein Modul M über einem Ring R heißt **noethersch**, wenn jeder Untermodul endlich erzeugt ist.[19] [20]

[18] Dies bedeutet, dass diese Sequenz als Sequenz von (ungraduierten) A-Moduln exakt ist. Äquivalent bedeutet dies, dass für jedes $p \in \mathbb{Z}$ die Sequenz $0 \to \operatorname{gr}^p U \to \operatorname{gr}^p M \to \operatorname{gr}^p Q \to 0$ von abelschen Gruppen ($= \mathbb{Z}$-Moduln) (oder A^0-Moduln) exakt ist. Äquivalent ist auch die Forderung, dass es sich um eine exakte Sequenz in der abelschen Kategorie $\operatorname{grMod}(A)$ handelt.

[19] Insbesondere ist M selbst endlich erzeugt.

[20] Äquivalente Bedingungen sind:

Lemma 2.6.17. *Sei M ein filtrierter Modul über einem filtrierten Ring A, wobei die Filtrierung von M bei Null beginnend und ausschöpfend sei. Dann gelten:*

(a) Ist $\operatorname{gr} M$ endlich erzeugt als $\operatorname{gr} A$-Modul, so ist M endlich erzeugt als A-Modul.
(b) Ist $\operatorname{gr} M$ noethersch als $\operatorname{gr} A$-Modul, so ist M noethersch als A-Modul.

Beweis. (a): Sei FM die Filtrierung auf M. Seien $m_1, \dots, m_\ell \in \operatorname{gr} M$ endlich viele Erzeuger von $\operatorname{gr} M$ als $\operatorname{gr} A$-Modul. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass alle m_i homogen sind, d. h. $m_i \in \operatorname{gr}^{d_i} M$ für geeignete $d_i \in \mathbb{Z}$. Sei $\hat{m}_i \in F_{d_i} M$ ein Lift von m_i, d. h. $\hat{m}_i = m_i$ in $\operatorname{gr}^{d_i} M$. Betrachte den (endlich erzeugten) A-Untermodul $U := A\hat{m}_1 + \dots + A\hat{m}_\ell$ von M. Versieh U und M/U mit den induzierten Filtrierungen (siehe Lemma 2.6.12). Nach Lemma 2.6.14 liefert die kurze exakte Sequenz $0 \to U \to M \to M/U \to 0$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{gr} U \to \operatorname{gr} M \to \operatorname{gr} M/U \to 0.$$

Wegen $\hat{m}_i \in F_{d_i} U = U \cap F_{d_i} M$ liegen alle Erzeuger m_i bereits in $\operatorname{gr} U$. Es folgt $\operatorname{gr} U = \operatorname{gr} M$, also $\operatorname{gr} M/U = 0$. Da die Filtrierung auf M/U ebenfalls bei Null beginnend und ausschöpfend ist, folgt induktiv $M/U = 0$, also $M = U$. Mit U ist somit M endlich erzeugt als A-Modul. Ende der 5. Vorlesung am 22.10.2018.

(b): Sei $U \subset M$ ein A-Untermodul. Zu zeigen ist, dass U endlich erzeugt ist. Versehen wir U mit der induzierten Filtrierung, so ist $\operatorname{gr} U$ nach Lemma 2.6.14 ein $\operatorname{gr} A$-Untermodul von $\operatorname{gr} M$. Da $\operatorname{gr} M$ noethersch ist, ist $\operatorname{gr} U$ als $\operatorname{gr} A$-Modul endlich erzeugt. Teil (a) zeigt somit, dass U als A-Modul endlich erzeugt ist. Somit ist M noethersch. □

Beispiel 2.6.18. Wir geben ein Beispiel, dass man in Lemma 2.6.17 die Bedingung „bei Null beginnend“ nicht durch „hausdorffsch“ ersetzen kann. Man versehe $\mathsf{k}[X]$ und $\mathsf{k}[[X]]$ jeweils mit der I-adischen Filtrierung (siehe Warnung 2.5.6). Diese Filtrierungen sind hausdorffsch und ausschöpfend, aber nicht bei Null startend. Dann kann man $\mathsf{k}[[X]]$ als filtrierten Modul über dem filtrierten Ring $\mathsf{k}[X]$ auffassen. Dann ist $\operatorname{gr} \mathsf{k}[[X]]$ ein endlich erzeugter $\operatorname{gr} \mathsf{k}[X]$-Modul, genauer ist er von dem Element $\overline{1} \in \mathsf{k} = \operatorname{gr}^0 \mathsf{k}[[X]]$ erzeugt (da der (injektive) Morphismus $\mathsf{k}[X] \to \mathsf{k}[[X]]$ einen Isomorphismus $\operatorname{gr} \mathsf{k}[X] \to \operatorname{gr} \mathsf{k}[[X]]$ induziert). Jedoch ist $\mathsf{k}[[X]]$ nicht endlich erzeugt als $\mathsf{k}[X]$-Modul (warum? vermutlich aus Dimensionsgründen).

Definition 2.6.19. Ein Ring heißt **linksnoethersch**, wenn jedes Linksideal endlich erzeugt ist, wenn der Ring also als (Links-)Modul über sich selbst ein noetherscher Modul ist. Ein Ring heißt **rechtsnoethersch**, wenn jedes Rechtsideal endlich erzeugt ist (äquivalent: wenn sein opponierter Ring linksnoethersch ist). Ein Ring heißt **noethersch**, wenn er rechts- und linksnoethersch ist.

Satz 2.6.20. *Die Weyl-Algebra $D(n)$ ist noethersch (= links- und rechtsnoethersch).*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $D(n)$ linksnoethersch ist. Betrachte die Bernstein-Filtrierung $BD(n)$ (siehe Satz 2.5.9). Nach Lemma 2.6.17 genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{gr}_B D(n)$ als Modul über sich selbst linksnoethersch ist. Wegen $\operatorname{gr}_B D(n) \cong \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ (siehe

(a) (Aufsteigende-Ketten-Bedingung) Jede durch die natürlichen Zahlen indizierte aufsteigende Kette $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$ von Untermoduln von M wird stationär, d. h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n = U_{n+1} = \dots$.
(b) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M besitzt ein maximales Element.

Satz 2.5.19) folgt dies aber aus Hilberts Basissatz: Ein Polynomring $R[X_1, \ldots, X_n]$ in endlich vielen Variablen über einem noetherschen kommutativen Ring R ist noethersch.

Um zu sehen, dass $D(n)$ auch rechtsnoethersch ist, kann man sich entweder überlegen, dass das obige Argument analog für Rechtsmoduln statt für Linksmoduln durchgeht. Alternativ kann man so argumentieren: Da $D(n)$ isomorph zu $D(n)^{\mathrm{op}}$ ist (siehe Satz 2.4.3), ist $D(n)^{\mathrm{op}}$ linksnoethersch. Dies bedeutet, dass $D(n)$ rechtsnoethersch ist. □

Definition 2.6.21. Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heißt **artinsch**, falls jede durch die natürlichen Zahlen indizierte absteigende Kette $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ von Untermoduln von M stationär wird.

Definition 2.6.22. Ein Ring heißt **linksartinsch** (bzw. **rechtsartinsch**, wenn er als (Links-)Modul (bzw. Rechtsmodul) über sich selbst artinsch ist.

Lemma 2.6.23. *Die Weyl-Algebra $D(n)$ ist für $n \geq 1$ weder linksartinsch noch rechtsartinsch.*

Beweis. Sei $D = D(n)$ und betrachte die absteigende Folge

$$D \supset D\partial_1 \supset D\partial_1^2 \supset \ldots \supset D\partial_1^i \supset D\partial_1^{i+1} \supset \ldots$$

von Linksidealen in D. Diese Folge wird nicht stationär:[21] Wenn $\partial_1^i \in D\partial_1^{i+1}$ gilt, so gibt es ein $T \in D$ mit $\partial_1^i = T\partial_1^{i+1}$, also $(1 - T\partial_1)\partial_1^i = 0$. Da D ein Integritätsbereich ist, folgt $1 = T\partial_1$. Also ist ∂_1 linksinvertierbar in D. Die linksinvertierbaren Elemente von D sind aber genau die Elemente von k, aber $\partial_1 \notin \mathsf{k}$. Also ist $D(n)$ nicht linksartinsch.

Analog zeigt man, dass $D(n)$ nicht rechtsartinsch ist. □

2.6.24. Der Beweis von Lemma 2.6.23 zeigt allgemeiner: Sei R ein Ring und $f \in R$ ein Element mit den folgenden Eigenschaften: Es gibt kein $x \in R - 0$ mit $xf = 0$ (f ist kein Rechts-Nullteiler). Es gibt kein $x \in R$ mit $xf = 1$ (f ist nicht linksinvertierbar). Dann ist R nicht linksartinsch, denn $A \supset Af \supset Af^2 \supset \ldots \supset Af^i \supset Af^{i+1} \supset \ldots$ ist eine echt absteigende Kette von Linksidealen.

Aufgabe 2.6.25. Sei A ein Ring und $f\colon M \to N$ ein Morphismus von A-Moduln. Sei $K := \mathrm{Ker}(f) := \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ der Kern von f und $B := f(M) := \{n \in N \mid \exists m \in M : f(m) = n\}$ das Bild von f. Dann existiert genau ein Morphismus $\overline{f}$ von A-Moduln, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N \\ & M/K \arrow[r, "\overline{f}"] & B \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei π und ι die offensichtlichen Morphismen von A-Moduln sind.

(a) Der Morphismus $\overline{f}$ ist ein Isomorphismus von A-Moduln.

(b) Seien $A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p$ ein graduierter Ring, M und N graduierte A-Moduln, und f ein Morphismus graduierter A-Moduln. Zeige (bzw. denke so lange darüber nach, bis Du

[21] Alternativ kann man auch so argumentieren: Alle Elemente aus $D\partial_1^{i+1}$ annihilieren das Element $x_1^i \in \mathsf{k}[\underline{X}]$, aber $\partial_1^i(x_1^i) = i!$ (siehe Lemma 2.2.5). Also gilt $\partial_1^i \in D\partial_1^i - D\partial_1^{i+1}$.

davon überzeugt bist), dass K, M/K, B und N/B in natürlicher Weise graduierte A-Moduln sind, und dass $\overline{f}$ ein Isomorphismus[22] graduierter A-Moduln ist.

(c) Seien (A, FA) ein filtrierter Ring, M und N filtrierte A-Moduln, und f ein Morphismus filtrierter A-Moduln. Versehen sie M/K mit der von M induzierten Quotientenmodulfiltrierung und B mit der von B induzierten Untermodulfiltrierung (siehe Lemma 2.6.12). Zeige, dass $\overline{f}$ im Allgemeinen *kein* Isomorphismus filtrierter A-Moduln ist.

Hinweis: Es gibt ein Gegenbeispiel mit $A = A^0 = \mathbb{Z}$, $F_{-1}A = 0 \subset F_0A = A$, $M = N = \mathbb{Z}$, aber $FM \neq FN$.

Diese Aufgabe zeigt im Wesentlichen, dass die Kategorie $\mathrm{grMod}(A)$ graduierter Moduln über einem graduierten Ring $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ abelsch ist, die Kategorie filtrierter Moduln $\mathrm{filtMod}(A)$ über einem filtrierten Ring (A, FA) jedoch nicht.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 2.6.25
(2) Aufgabe 2.7.12
(3) + (4) Suche zwei für Dich interessante Aufgaben aus:
- Aufgabe 2.7.5
- Diagrammjagd-Übung: Beweis von Lemma 2.6.14 sauber aufschreiben.
- Beweise die Dir unbekannten Aussagen aus Aufgabe 2.6.26.
- Aufgabe 2.7.18
- Aufgabe 2.7.9
- [Cou95, Aufgabe V.4.7]: Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann bildet die Menge $\mathcal{H}(U)$ der holomorphen Funktionen auf U in natürlicher Weise einen $D(1)$-Modul (vgl. Aufgabe 2.7.11). Zeige, dass $\mathcal{H}(U)$ kein zyklischer $D(1)$-Modul ist.
  [Cou95]s Hinweis: Sei $h \in \mathcal{H}(U)$ ein Erzeuger. Dann ist h nicht konstant und es gilt $e^h \notin D(1).h$.
  Gerne wüßte ich, wie man die Aussage des Hinweises zeigt. (Meine Lösung verwendet ein Kardinalitätsargument.)
- Zeige, das der projektive $D(1)$-Modul $\mathfrak{a}$ aus Aufgabe 2.5.37 nicht frei ist. (Möglicher Lösungsweg: Sei $\mathfrak{a} \cong D(1)^{\oplus I}$ ein Isomorphismus. Dann folgt $2 \leq |I| < \infty$, also $\mathfrak{a} \cong D(1)^n$ für ein $n \geq 2$. Aus der zitierten Aufgabe folgt $D(1)^2 \cong D(1)^{n+1}$ (Der Rest des Lösungswegs zeigt im Wesentlichen, dass linksnoethersche Ringe die *invariant basis number (IBN) property* haben.) Die Komposition $D(1)^{n+1} \to D(1)^2 \cong D(1)^{n+1}$, wobei die erste Abbildung die Projektion auf die ersten beiden Koordinaten ist, ist ein surjektiver, aber nicht injektiver Endomorphismus. Allgemein ist aber jeder surjektive Endomorphismus eines noetherschen Moduls bijektiv (darf ohne Beweis verwendet werden)).

Aufgabe 2.6.26. Sei R ein Ring.

(a) Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Folge von R-Moduln. Dann ist M noethersch genau dann, wenn M' und M'' noethersch sind.

(b) Endliche direkte Summen von noetherschen Moduln sind noethersch. Summanden noetherscher Moduln sind noethersch.

[22] Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ in einer Kategorie heißt Isomorphismus, falls es einen Morphismus $g\colon Y \to X$ in dieser Kategorie mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt.

(c) Sei R als linksnoethersch angenommen. Dann ist ein R-Modul genau dann noethersch, wenn er endlich erzeugt ist.

2.7. **Moduln über der Weyl-Algebra.**

Definition 2.7.1. Ein Modul M über einem Ring R heißt **zyklisch**, falls es ein $m \in M$ mit $Rm = M$ gibt, falls M also von einem Element als R-Modul erzeugt wird.

Definition 2.7.2. Sei M ein Modul über einem Integritätsbereich R. Eine Element $m \in M$ heißt **Torsionselement**, falls es ein $r \in R - 0$ mit $rm = 0$ gibt. Der R-Modul M heißt **Torsionsmodul**, falls alle $m \in M$ Torsionselemente sind.

Definition 2.7.3. Eine Modul M über einem Ring heißt **einfach**, falls M genau zwei Untermoduln hat, nämlich den Nullmodul und M. Äquivalent bedeutet dies, dass $M \neq 0$ gilt und dass für jeden Untermodul U von M schon $U = 0$ oder $U = M$ gilt.

Warnung 2.7.4. Man beachte, dass wir den Begriff *einfach* sowohl für Ringe als auch für Moduln definiert haben. Die Weyl-Algebra $D(n)$ ist ein einfacher Ring (siehe Satz 2.5.32), sie ist aber nicht einfach als Linksmodul über sich selbst.

Aufgabe 2.7.5. Sei R ein Ring, der als Linksmodul über sich selbst einfach ist. Dann ist R ein Schiefkörper, d. h. es gilt $R^\times = R - 0$.

Aufgabe 2.7.6. Jeder einfache Modul ist zyklisch.

2.7.7. Wegen $D(n) \subset \mathrm{End}(\mathsf{k}[\underline{X}])$ ist $\mathsf{k}[\underline{X}]$ ein $D(n)$-Modul.

Proposition 2.7.8. *Für $n \geq 1$ ist der $D(n)$-Modul $\mathsf{k}[\underline{X}]$ ein einfacher Torsionsmodul.*

Beweis. Es ist klar, dass 1 ein Erzeuger von $\mathsf{k}[\underline{X}]$ als $D(n)$-Modul ist. Ist $U \subset \mathsf{k}[\underline{X}]$ ein Untermodul mit $U \neq 0$, so sei $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha X^\alpha \in U - 0$. In $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid f_\alpha \neq 0\}$ sei β ein Element mit maximaler Länge $|\beta|$. Dann gilt $U \ni \partial^\beta(f) = \beta! f_\beta \neq 0$ (siehe Lemma 2.2.5). Es folgt $1 \in U$ und somit $U = \mathsf{k}[\underline{X}]$.

Sei $g \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \deg(g)$. Dann gilt $\partial_1^n \neq 0$ und $\partial_1^n(g) = 0$. Also ist g ein Torsionselement. $\square$

Aufgabe 2.7.9. Zeige, dass $\sum_{i=1}^n D(n)\partial_i$ ein maximales Linksideal von $D(n)$ ist.

Hinweis: Betrachte die Abbildung $D(n) \to \mathsf{k}[\underline{X}]$, $T \mapsto T(1)$, und verwende Proposition 2.7.8.

2.7.10. Seine $S_1, \ldots, S_n, T_1, \ldots, T_n$ Endomorphismen eines Vektorraums V, die $[S_i, S_j] = 0$, $[T_i, T_j] = 0$, $[S_i, T_j] = \delta_{ij}$ erfüllen. Dann gibt es genau eine $D(n)$-Modulstruktur auf V, die die gegebene Vektorraumstruktur erweitert, so dass X_i als S_i und ∂_i als T_i operiert. Dies folgt sofort aus 2.4.2.

Aufgabe 2.7.11. Sei $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ und sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge. Sei $\mathcal{F}$ der Vektorraum aller glatten/holomorphen/polynomialen Funktionen $U \to \mathbb{C}$. Zeige, dass es auf $\mathcal{F}$ genau eine $D(n)$-Modulstruktur gibt, die die gegebene Vektorraumstruktur erweitert, so dass X_i als Multiplikation mit der Funktion x_i (damit ist die Projektionsfunktion $U \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x_i$ gemeint) und ∂_i als partielle Ableitung im Sinne der Analysis operiert.

Hinweis: Verwende 2.7.10.

Bemerkung: Der Raum aller holomorphen Funktionen $\mathcal{H}(U)$ auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ hat als $D(1)$-Modul die folgenden Eigenschaften.

- $\mathcal{H}(U)$ ist nicht einfach: Beispielsweise bilden die polynomialen Funktionen einen echten Untermodul $\neq 0$.
- Die Torsionselemente sind genau die holomorphen Funktionen f, die eine nicht-triviale gewöhnliche Differentialgleichung mit polynomialen Koeffizienten erfüllen, für die es also ein $P \in D(1) - 0$ mit $P(f) = 0$ gibt.
- Nicht alle Elemente sind Torsionselemente: Ein Beispiel ist die holomorphe Funktion e^{e^x} (siehe [Cou95, Prop. 3.2 in Kap. 5.]).
- Ich kenne eine Lösung von [Cou95, Aufgabe V.4.7], wüßte aber gerne, wie man sie mit dem angegebenen Hinweis löst.

Aufgabe 2.7.12. Sei $S \subset \mathsf{k}[\underline{X}] = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Ist M ein $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul, so ist die Lokalisierung $S^{-1}M$ ein $S^{-1}\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul. Sei nun M ein $D(n)$-Modul. Indem wir M als $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul auffassen, erhalten wir den $S^{-1}\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul $S^{-1}M$.

Zeige, dass es auf $S^{-1}M$ genau eine $D(n)$-Modulstruktur gibt, die die offensichtliche $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modulstruktur erweitert und die Eigenschaft hat, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ S^{-1}M \arrow[r, "\partial_i"] & S^{-1}M \end{tikzcd}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ kommutiert.

Hinweis: Ableitungsregel für Quotienten (aus der Analysis) und 2.7.10.

2.7.1. *Lineare Differentialgleichungen.*

Definition 2.7.13. Ein **System von linearen (partiellen) Differentialgleichungen (mit polynomialen Koeffizienten)** ist eine Matrix $\mathcal{P} = (P_{st})_{1 \leq s \leq \ell, 1 \leq t \leq m} \in \mathrm{Mat}_{\ell \times m}(D(n))$. Oft schreibt man ein solches System als

$$\mathcal{P} = \begin{cases} P_{11} f_1 + \cdots + P_{1m} f_m & = 0, \\ \qquad \vdots & \\ P_{\ell 1} f_1 + \cdots + P_{\ell m} f_m & = 0, \end{cases} \quad \text{oder kurz} \quad \mathcal{P} f = 0. \tag{2.7.1}$$

Sei F ein $D(n)$-Modul. Eine **Lösung von $\mathcal{P}$ in F** ist ein Tupel $f = (f_1, \ldots, f_m) \in F^m$ mit $\sum_{t=1}^m P_{st} f_t = 0$ für alle $1 \leq s \leq \ell$ oder kurz $\mathcal{P} f = 0$, wenn wir f als Spaltenvektor auffassen. Die Menge all dieser Lösungen ist ein Vektorraum[23] und wird $\mathrm{Sol}_F(\mathcal{P})$ notiert.

Bemerkung 2.7.14. Im Fall $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ und $M = \mathcal{C}^\infty(U)$ (glatte Funktionen) oder $M = \mathcal{H}(U)$ (holomorphe Funktionen), für $U \subset \mathsf{k}^n$ offen, spezialisiert die obige Definition zu der üblichen Definition aus der Analysis.

[23] Weil wir es mit einem System von *linearen* Differentialgleichungen zu tun haben.

Definition 2.7.15. Wir setzen Definition 2.7.13 fort. Betrachte den $D(n)$-Modulmorphismus „Rechtsmultiplikation $\cdot\mathcal{P}$ eines Zeilenvektors mit $\mathcal{P}$“ (vgl. Aufgabe 2.7.21)

$$\begin{aligned} \cdot\mathcal{P}\colon D(n)^\ell &\to D(n)^m, \\ T = (T_1, \dots, T_\ell) &\mapsto (\dots, \sum_{s=1}^{\ell} T_s P_{st}, \dots) = (T_1, \dots, T_\ell)\mathcal{P} = T\mathcal{P}. \end{aligned}$$

Der Kokern $M_\mathcal{P} := \operatorname{Cok}(\cdot\mathcal{P})$ dieses Morphismus ist **der zu** $\mathcal{P} = (P_{st})_{1\le s\le \ell, 1\le t\le m}$ **assoziierte** $D(n)$**-Modul**.

Proposition 2.7.16. *Sei $\mathcal{P} = (P_{st})_{1\le s\le \ell, 1\le m} \in \operatorname{Mat}_{\ell\times m}(D(n))$ ein System linearer Differentialgleichungen. Sei $M_\mathcal{P}$ der assoziierte $D(n)$-Modul. Dann gilt für jeden $D(n)$-Modul F*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{D(n)}(M_\mathcal{P}, F) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Sol}_F(\mathcal{P}), \\ \varphi &\mapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)), \end{aligned}$$

als Vektorräume, wobei e_i die Klasse von $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ in $M_\mathcal{P}$ bezeichnet.

Beweis. Per Definition haben wir eine exakte Sequenz

$$D(n)^\ell \xrightarrow{\cdot\mathcal{P}} D(n)^m \to M_\mathcal{P} \to 0$$

von $D(n)$-Moduln. Wir wenden darauf den linksexakten Funktor

$$\operatorname{Hom}_{D(n)}(-, F)\colon \operatorname{Mod}(D(n))^{\mathrm{op}} \to \operatorname{Vect}$$

und erhalten Exaktheit der ersten Zeile im folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{D(n)}(D(n)^\ell, F) \arrow[d, "\sim"] & \operatorname{Hom}_{D(n)}(D(n)^m, F) \arrow[l, "(\cdot\mathcal{P})^* = (?\circ(\cdot\mathcal{P}))"'] \arrow[d, "\sim"] & \operatorname{Hom}_{D(n)}(M_\mathcal{P}, F) \arrow[l] \arrow[d, dotted, "\sim"] & 0 \arrow[l] \\ F^\ell & F^m \arrow[l, "\mathcal{P}\cdot"'] & \operatorname{Sol}_F(\mathcal{P}) \arrow[l] & 0. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\mathcal{P}\cdot$ ist Linksmultiplikation mit der Matrix $\mathcal{P}$, wenn wir Elemente von F^m und F^ℓ als Spaltenvektoren auffassen. Nach Definition von $\operatorname{Sol}_F(\mathcal{P})$ ist klar, dass die untere Zeile exakt ist. Die beiden senkrechten durchgezogenen Pfeile sind die Auswertungsisomorphismen (siehe Aufgabe 2.7.21). Es ist leicht zu sehen, dass das Diagramm kommutativ ist. Die Existenz des gestrichelten Isomorphismus, der das Diagramm zum Kommutieren bringt, ist dann klar. □

2.7.17. Seien Systeme $\mathcal{P} \in \operatorname{Mat}_{\ell\times m}(D(n))$ und $\mathcal{P}' \in \operatorname{Mat}_{\ell', m}(D(n))$ linearer Differentialgleichungen (in gleich vielen Unbekannten m) gegeben. Dann sind die assoziierten $D(n)$-Moduln $M_\mathcal{P}$ und $M_{\mathcal{P}'}$ genau dann isomorph, wenn die beiden Lösungsfunktoren

$$\operatorname{Sol}_?(\mathcal{P}), \operatorname{Sol}_?(\mathcal{P}')\colon \operatorname{Mod}(D(n)) \to \operatorname{Vect}$$

isomorph sind (dies verwendet das Yoneda-Lemma). Es wirkt schwieriger, eine äquivalente Bedingung für die Matrizen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ zu formulieren. Dies mag man dahingehend interpretieren, dass der assoziierte $D(n)$-Modul $M_\mathcal{P}$ ein „besseres“[24] mathematisches Objekt als das System $\mathcal{P}$ ist. Ähnlich steht der Begriff eines $D(n)$-Modulmorphismus $M_\mathcal{P} \to M_{\mathcal{P}'}$ zur

[24] Es kommt natürlich immer darauf an, woran man konkret interessiert ist.

Verfügung; was ein Morphismus $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ von Systemen von linearen Differentialgleichungen sein soll, ist nicht so offensichtlich.

Ende der 6. Vorlesung am 24.10.2018.

Aufgabe 2.7.18. Jeder endlich erzeugte $D(n)$-Modul ist zu einem System von linearen Differentialgleichungen assoziiert.

Hinweis: $D(n)$ ist noethersch.

Aufgabe 2.7.19 (Jedes unendliche System von Differentialgleichungen hat ein äquivalentes endliches Teilsystem)**.** Statt eines Systems (2.7.1) von endlich vielen linearen Differentialgleichungen mag man ein System

$$\mathcal{Q} = \Big\{ Q_{i1} f_1 + \cdots + Q_{im} f_m = 0, \quad \text{für } i \in I,$$

von unendlich vielen linearen Differentialgleichungen betrachten, wobei I eine unendliche Indexmenge ist. Zeige, dass es dann bereits eine endliche Indexmenge $E \subset I$ gibt, so dass für jeden $D(n)$-Modul F gilt: Genau dann ist $f \in F^m$ eine Lösung des obigen unendlichen Systems, wenn f eine Lösung des endlichen Systems

$$\Big\{ Q_{i1} f_1 + \cdots + Q_{im} f_m = 0 \quad \text{für } i \in E$$

ist.

Hinweis: $D(n)$ ist noethersch.

Aufgabe 2.7.20. Kapitel 6, Aufgaben 4.1, 4.2 in [Cou95]

Aufgabe 2.7.21. Sei R ein beliebiger (nichtkommutativer) Ring.

(a) Sei M ein R-Modul. Dann ist Auswerten bei $1 \in R$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(R, M) &\xrightarrow{\sim} M, \\ \varphi &\mapsto \varphi(1), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von abelschen Gruppen (von Vektorräumen, wenn R eine Algebra ist). Die Umkehrabbildung ordnte $m \in M$ die Abbildung „Rechtsmultiplikation mit m“ zu.

(b) Auswerten bei $1 \in R$ ist ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_R(R) &\xrightarrow{\sim} R^{\mathrm{op}}, \\ \varphi &\mapsto \varphi(1), \end{aligned}$$

von Ringen (von Algebren, wenn R eine Algebra ist).

(c) Folgere

$$\mathrm{Hom}_R(R^\ell, M) \xrightarrow{\sim} M^\ell.$$

Wenn man Elemente von R^ℓ als Zeilenvektoren schreibt und Elemente von M^ℓ als Spaltenvektoren, so ordnet die Umkehrabbildung einem Spaltenvektor $m \in M^\ell$ die Abbildung „Rechtsmultiplikation $\cdot m$ mit m“ zu.

(d) Folgere

$$\mathrm{Hom}_R(R^\ell, R^m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{\ell \times m}(R).$$

Wenn wir Elemente von R^ℓ und R^m als Zeilenvektoren schreiben, so ordnet die Umkehrabbildung einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\ell \times m}(R)$ die Abbildung „Rechtsmultiplikation $\cdot A$ mit A“ zu.

(e) Sind R-Modulmorphismen $R^\ell \xrightarrow{\alpha} R^m \xrightarrow{\beta} R^n$ durch Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{\ell\times m}(R)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$ beschrieben, so ist $\beta \circ \alpha$ durch AB beschrieben (die Reihenfolge ist also umgekehrt, vgl. (b))

3. Ringe von Differentialoperatoren

Wir diskutieren Differentialoperatoren einer kommutativen Algebra A. Das zur Zeit wichtigste Beispiel einer solchen Algebra ist die Polynomalgebra $\mathsf{k}[\underline{X}]$.

3.1. **Differentialoperatoren.**

Annahme 3.1.1. Im gesamten Abschnitt 3.1 sei A eine kommutative Algebra.

Lemma 3.1.2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A(A), \\ a &\mapsto (a\cdot\colon b \mapsto ab) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Algebren (auch von A-Algebren). Ihre Umkehrabbildung bildet $f \in \mathrm{End}_A(A)$ auf $f(1)$ ab.

Beweis. Das ist eine offensichtliche Rechnung. Die Behauptung folgt auch aus der allgemeineren Aussage in Aufgabe 2.7.21, wo der Ring nicht als kommutativ angenommen ist. □

3.1.3. Wegen $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A(A) \subset \mathrm{End}(A) = \mathrm{End}_{\mathsf{k}}(A)$ können und werden wir im folgenden A als Teilmenge aller Endomorphismen des Vektorraums A auffassen. Ein Element $a \in A$ wird also oft mit $a.$ identifiziert.

Definition 3.1.4. Eine **Derivation von** A ist ein Element $T \in \mathrm{End}(A) = \mathrm{End}_{\mathsf{k}}(A)$ mit

$$T(ab) = T(a)b + aT(b)$$

für alle $a, b \in A$. Die Menge aller Derivationen von A wird mit $\mathrm{Der}(A)$ bezeichnet.

3.1.5. Es gilt $T(1) = 0$, denn $T(1) = T(1 \cdot 1) = T(1) \cdot 1 + 1T(1) = 2T(1)$. Für $\lambda \in \mathsf{k}$ folgt $T(\lambda) = T(\lambda.1) = \lambda.T(1) = 0$.

3.1.6. In offensichtlicher Weise ist $\mathrm{Der}(A)$ ein A-Modul.

Satz 3.1.7. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathsf{k}[\underline{X}] = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\mathrm{Der}(\mathsf{k}[\underline{X}])$ einer freier $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul vom Rang n; genauer bilden die partiellen Ableitungen ∂_i, für $i \in \{1, \ldots, n\}$, eine $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Basis dieses Moduls, in Formeln*

$$\mathrm{Der}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathsf{k}[\underline{X}]\partial_i.$$

3.1.8. Es besteht $\mathrm{Der}(\mathsf{k}[\underline{X}])$ also aus den „Vektorfeldern“ auf k^n. Analog kann man $\mathrm{Der}(A)$ als „Vektorfelder“ ansehen, die man auf „Funktionen“ auf einem geeigneten Raum anwenden kann, der so konstruiert ist, dass diese Funktionen genau die Elemente von A sind.

Beweis. Nach Lemma 2.1.4 sind alle ∂_i Derivationen der Algebra $\mathsf{k}[\underline{X}]$. Sei $T \in \mathrm{Der}(\mathsf{k}[\underline{X}])$. Setze $p_i := T(X_i)$ und $S := \sum_{i=1}^n p_i\partial_i \in \mathrm{Der}(\mathsf{k}[\underline{X}])$. Dann gilt

$$S(X_j) = \sum_i p_i\partial_i(X_j) = \sum_i p_i\delta_{ij} = p_j = T(X_j).$$

Da $\mathsf{k}[\underline{X}]$ als Algebra von den Elementen $X_1, \ldots, X_n$ erzeugt ist und da jede Derivation auf $\mathsf{k}.1$ verschwindet (siehe 3.1.5), folgt $S = T$. Dies zeigt, dass die partiellen Ableitungen $\mathrm{Der}(\mathsf{k}[\underline{X}])$ als $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul erzeugen. Gelte $0 = \sum_{i=1}^n q_i \partial_i$, wobei $q_i \in \mathsf{k}[\underline{X}]$. Daraus folgt $0 = \sum_{i=1}^n q_i \partial_i(X_j) = \sum_i q_i \delta_{ij} = q_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dies zeigt die $\mathsf{k}[\underline{X}]$-lineare Unabhängigkeit der partiellen Ableitungen. □

3.1.9. Wir verwenden im Folgenden oft den Kommutator $[T, T'] := TT' - T'T = T \circ T' - T' \circ T$ für Elemente $T, T' \in \mathrm{End}(A)$. Der Vektorraum $\mathrm{End}(A)$ zusammen mit dieser Abbildung $[,]\colon \mathrm{End}(A) \times \mathrm{End}(A) \to \mathrm{End}(A)$ ist eine Lie-Algebra (siehe 1.6.16).

Lemma 3.1.10. *Für $T, T' \in \mathrm{Der}(A)$ gilt $[T, T'] \in \mathrm{Der}(A)$. Insbesondere ist $\mathrm{Der}(A)$ eine Unter-Lie-Algebra von $\mathrm{End}(A)$.*

Beweis. Für beliebige $a, b \in A$ gilt

$$\begin{aligned}
[T, T'](ab) &= T(T'(ab)) - T'(T(ab)) \\
&= T(T'(a)b + aT'(b)) - T'(T(a)b + aT(b)) \\
&= T(T'(a))b + T'(a)T(b) + T(a)T'(b)) + aT(T'(b)) \\
&\quad - T'(T(a))b - T(a)T'(b) - T'(a)T(b) - aT'(T(b)) \\
&= ([T, T'](a))b + a([T, T'](b)).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.1.11. Man drücke den Kommutator $[f\partial_i, g\partial_j]$ für $f, g \in \mathsf{k}[\underline{X}]$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ in der $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Basis $(\partial_\ell)_{\ell=1}^n$ aus.

Lemma 3.1.12. *Für $T \in \mathrm{End}(A) = \mathrm{End}_{\mathsf{k}}(A)$ gelten:*

(a) $T \in A = \mathrm{End}_A(A) \iff [T, a] = 0$ in $\mathrm{End}(A)$ für alle $a \in A$;
(b) $T \in \mathrm{Der}(A) \iff T(1) = 0$ in A und $[[T, a], b] = 0$ in $\mathrm{End}(A)$ für alle $a, b \in A$.

Beweis. Beide Behauptungen sind einfache Rechnungen. Wir zeigen die zweite, minimal schwierigere Aussage.

Sei $T \in \mathrm{Der}(A)$. Dann gilt $T(1) = 0$ nach 3.1.5. Für beliebige $a, b, c \in A$ berechnen wir (unter Verwendung der Kommutativität von A)

$$\begin{aligned}
[[T, a], b](c) &= [T, a](bc) - b[T, a](c) \\
&= T(abc) - aT(bc) - bT(ac) + baT(c) \\
&= T(a)bc - bT(a)c = 0
\end{aligned}$$

Gelten umgekehrt $T(1) = 0$ und $[[T, a], b] = 0$ für alle $a, b \in A$, so folgt

$$0 = [[T, a], b](1) = T(ab) - aT(b) - bT(a) + ba\underbrace{T(1)}_{=0},$$

also $T \in \mathrm{Der}(A)$. □

Definition 3.1.13. Sei $p \in \mathbb{N}$. Ein Element $T \in \mathrm{End}(A)$ heißt **(linearer) Differentialoperator der Ordnung $\leq p$ von** A, falls

$$[\ldots[[T, a_0], a_1], \ldots, a_p] = 0$$

in $\mathrm{End}(A)$ für alle $a_0, a_1, \ldots, a_p \in A$ gilt. Sei $F_p \operatorname{Diff}(A)$ die Menge aller Differentialoperatoren der Ordnung $\leq p$. Für $p < 0$ setzen wir $F_p \operatorname{Diff}(A) := 0$. Die Elemente von

$$\operatorname{Diff}(A) := \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} F_p \operatorname{Diff}(A)$$

heißen **Differentialoperatoren von** A.

3.1.14. Man kann $F_p \operatorname{Diff}(A)$ auch induktiv definieren: Setze $F_0 \operatorname{Diff}(A) := A \subset \mathrm{End}(A)$ und induktiv für $p > 0$

$$F_p \operatorname{Diff}(A) := \{T \in \mathrm{End}(A) \mid [T, a] \in F_{p-1} \operatorname{Diff}(A) \text{ für alle } a \in A\}.$$

3.1.15. Die „Reihenfolge der Klammerung“ in der Bedingung $[\ldots[[T, a_0], a_1], \ldots, a_p] = 0$ ist nicht relevant (wegen $[S, T] = -[T, S]$): Im Fall $p = 3$ ist beispielsweise $[a_3, [a_2, [[a_0, T], a_1]]] = 0$ eine äquivalente Forderung.

Satz 3.1.16. *Die Menge aller Differentialoperatoren* $\operatorname{Diff}(A)$ *ist eine Algebra, und*

$$F \operatorname{Diff}(A) := (F_p \operatorname{Diff}(A))_{p \in \mathbb{Z}}$$

definiert eine ausschöpfende, nicht-negative Filtrierung auf dieser Algebra, genannt ***Ordnungsfiltrierung****. Außerdem gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $F_0 \operatorname{Diff}(A) = A$ *als Algebren.*

(b)

$$\begin{aligned} F_1 \operatorname{Diff}(A) &\xrightarrow{\sim} A \oplus \operatorname{Der}(A), \\ T &\mapsto (T(1), T - T(1)), \\ a + S &\leftarrow\!\shortmid (a, S), \end{aligned}$$

als[25] *Vektorräume (und als Moduln über* $F_0 \operatorname{Diff}(A) = A$*).*

(c) $[F_p \operatorname{Diff}(A), F_q \operatorname{Diff}(A)] \subset F_{p+q-1} \operatorname{Diff}(A)$ *für alle* $p, q \in \mathbb{Z}$*; insbesondere ist* $\operatorname{gr}_F \operatorname{Diff}(A)$ *kommutativ.*

Beweis. Offensichtlich sind alle $F_p \operatorname{Diff}(A)$ Untervektorräume von $\mathrm{End}(A)$ mit $F_p \operatorname{Diff}(A) \subset F_{p+1} \operatorname{Diff}(A)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, und es gilt $\mathrm{id}_A \in F_0 \operatorname{Diff}(A)$. Wir müssen zeigen, dass

$$F_p \operatorname{Diff}(A) \circ F_q \operatorname{Diff}(A) \subset F_{p+q} \operatorname{Diff}(A) \tag{3.1.1}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt. Sobald dies gezeigt ist, ist klar, dass $\operatorname{Diff}(A)$ eine filtrierte Algebra ist; nach Definition ist klar, dass die Filtrierung $F \operatorname{Diff}(A)$ ausschöpfend und nicht-negativ ist. Die Aussagen (a) und (b) folgen sofort aus Lemma 3.1.12.

Wir zeigen (3.1.1) per Induktion über $p + q$. Für $p + q \leq 0$ ist die Aussage klar: Im Fall $p = q = 0$ folgt dies aus $A = F_0 \operatorname{Diff}(A)$, in allen anderen Fällen ist p oder q echt kleiner als Null und die Aussage ist trivial.

Gelten $S \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ und $T \in F_q \operatorname{Diff}(A)$. Für beliebiges $a \in A$ gilt dann

$$[ST, a] = [S, a]T + S[T, a].$$

Offensichtlich gelten $[S, a] \in F_{p-1} \operatorname{Diff}(A)$ und $[T, a] \in F_{q-1} \operatorname{Diff}(A)$. Per Induktion folgt $[S, a]T, S[T, a] \in F_{p+q-1} \operatorname{Diff}(A)$, also $[ST, a] \in F_{p+q-1} \operatorname{Diff}(A)$ und somit $ST \in F_{p+q} \operatorname{Diff}(A)$.

[25] Hier ist natürlich gemeint, dass die beiden angegebenen Abbildungen invers zueinander sind. Analoges gilt in vergleichbaren Situationen.

Wir zeigen (c) per Induktion über $p+q$. Für $p+q \leq 0$ ist die Aussage klar. Gelten $S \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ und $T \in F_q \operatorname{Diff}(A)$. Für beliebiges $a \in A$ gilt nach der Jacobi-Identität (siehe Aufgabe 2.4.8)

$$[[S,T],a] = [[S,a],T] + [S,[T,a]]$$

Aus $[S,a] \in F_{p-1}\operatorname{Diff}(A)$ und $[T,a] \in F_{q-1}\operatorname{Diff}(A)$ folgt per Induktion $[[S,a],T], [S,[T,a]] \in F_{p+q-2}\operatorname{Diff}(A)$, also $[[S,T],a] \in F_{p+q-2}\operatorname{Diff}(A)$ und somit $[S,T] \in F_{p+q-1}\operatorname{Diff}(A)$. □

3.1.17. Ein Ziel im folgenden Abschnitt 3.2 ist die Gleichheit $\operatorname{Diff}(\mathsf{k}[X_1,\dots,X_n]) = D(n)$ (siehe Satz 3.2.6). Wir werden dies aus der expliziten Bestimmung von $\operatorname{gr}_F \operatorname{Diff}(\mathsf{k}[X_1,\dots,X_n])$ folgern. Es sei bemerkt, dass die Inklusion $D(n) \subset \operatorname{Diff}(\mathsf{k}[X_1,\dots,X_n])$ bereits klar ist, denn alle Erzeuger von $D(n)$ als Algebra liegen schon in $F_1\operatorname{Diff}(\mathsf{k}[X_1,\dots,X_n])$ und $\operatorname{Diff}(\mathsf{k}[X_1,\dots,X_m])$ ist eine Algebra (siehe Satz 3.1.16).

Lemma 3.1.18. *Sei A eine kommutative Algebra und $p \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei $T \in F_p\operatorname{Diff}(A)$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq p$. Betrachte die Abbildung*

$$\begin{aligned} \sigma_p(T)\colon A^p &\to A, \\ (a_1,\dots,a_p) &\mapsto [\dots[[T,a_1],a_2],\dots,a_p], \end{aligned}$$

wobei der iterierte Kommutator a priori ein Differentialoperator der Ordnung ≤ 0 ist, aber per $F_0\operatorname{Diff}(A) = A$ als Element von A aufgefasst wird (siehe Satz 3.1.16.(a)). Dann gelten:

(a) Die Abbildung $\sigma_p(T)$ ist multilinear und symmetrisch.
(b) Es gilt genau dann $T \in F_{p-1}\operatorname{Diff}(A)$, wenn $\sigma_p(T) = 0$ gillt.
(c) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma_p\colon F_p\operatorname{Diff}(A) &\to \operatorname{Hom}(\mathrm{S}^p A, A), \\ T &\mapsto \sigma_p(T), \end{aligned}$$

ist A-linear, wobei die A-Modulstruktur auf $\operatorname{Hom}(\mathrm{S}^p A, A)$ von der auf dem Zielbereich A herrührt. (Hier bezeichnet S^pA die p-te symmetrische Potenz von A, also den Quotient von $\mathrm{T}^p A = A^{\otimes p}$ nach dem Untervektorraum, der von allen $a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_p - a_1 \otimes \dots \otimes a_{i+1} \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_p$ erzeugt wird.)

Beweis. Es ist klar, dass $\sigma_p(T)$ multilinear ist. Sei S ein Differentialoperator und seien $a, b \in A$. Dann gilt

$$0 = [S, \underbrace{[a,b]}_{=0}] = [[S,a],b] + [a,[S,b]],$$

also

$$[[S,a],b] = [[S,b],a].$$

Wir folgern

$$\sigma_p(T)(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},a_{i+2},\dots,a_p) = \sigma_p(T)(a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},a_i,a_{i+2},\dots,a_p).$$

Daraus folgt sofort, dass $\sigma_p(T)$ symmetrisch ist. Dies zeigt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt sofort aus der Definition eines Differentialoperators. Zur dritten Behauptung: Sei $b \in A$. Dann gilt $[bT,a_1] = [b,a_1]T + b[T,a_1] = b[T,a_1]$. Iterieren wir dieses Argument, so folgt zunächst $[b[T,a_1],a_2] = b[[T,a_1],a_2]$ und induktiv $\sigma_p(bT) = b\sigma_p(T)$. □

Ende der 7. Vorlesung am 29.10.2018.

Aufgabe 3.1.19. Seien $E \subset A$ eine Teilmenge, die A als (kommutative) Algebra erzeugt. Dann ist ein $T \in \operatorname{End}(A)$ genau dann in $F_p \operatorname{Diff}(A)$, wenn

$$[T, e] \in F_{p-1} \operatorname{Diff}(A)$$

für alle $e \in E$ gilt. (Hinweis: $[T, bc] = [T, b]c + b[T, c]$ für alle $b, c \in A$.)

Aufgabe 3.1.20. Sei $A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ und sei $p \in \mathbb{N}_{>0}$.

(a) Seien $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ und $a = (a_1, \dots, a_p) \in A^p$. Dann gilt

$$\sigma_p(\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p})(a) = [\dots[\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p}, a_1], \dots, a_p] = \sum_{\gamma \in S_p} \prod_{j=1}^{p} \partial_{i_j}(a_{\gamma(j)}).$$

Hinweis: Für beliebige $S \in \operatorname{Diff}(A)$ und $a \in a$ gilt $[\partial_i S, a] = \partial_i(a)S + \partial_i[S, a]$. Folgere daraus für $S \in F_{p-1} \operatorname{Diff}(A)$ per Induktion

$$[\dots[\partial_i S, a_1], \dots, a_p] = \sum_{j=1}^{p} \partial_i(a_j)[\dots[\partial_i S, a_1], \dots, \widehat{a_i}], \dots a_p],$$

wobei der Hut andeutet, dass der Ausdruck darunter weggelassen wird.

(b) Sei $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in k^n$. Setze $\ell := \zeta_1 X_1 + \cdots + \zeta_n X_n$. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| \leq p$, so dass $X^\alpha \partial^\beta \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ gilt. Folgere

$$\sigma_p(X^\alpha \partial^\beta)(\ell, \ell, \dots, \ell) = \begin{cases} p! X^\alpha \zeta^\beta & \text{falls } |\beta| = p, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3.1.21. Wir geben eine sehr allgemeine Definition einer Derivation. Seien R ein kommutativer Ring, A, B, C R-Algebren (die nicht also kommutativ angenommen sind), $\beta\colon A \to B$ und $\gamma\colon A \to C$ R-Algebrenmorphismen, $M = {}_B M_C$ ein B-C-Bimodul (also ein Links-B-Modul und Rechts-C-Modul, so dass die unterliegenden R-Modulstrukturen übereinstimmen - alternativ ist es ein $B \otimes_R C^{\mathrm{op}}$-Modul). Eine **$\beta$-$\gamma$-Derivation von A in** M ist eine R-lineare Abbildung $T\colon A \to M$ mit

$$T(aa') = \beta(a)T(a') + T(a)\gamma(a')$$

für alle $a, a' \in A$.

(a) Welcher Spezialfall ist Definition 3.1.4?

(b) (Jacobsons Trick - nützlich zur Definition von β-γ-Derivationen) Eine R-lineare Abbildung $T\colon A \to M$ ist genau dann eine β-γ-Derivation von A in M, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} A &\to \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & C \end{pmatrix}, \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} \beta(a) & T(a) \\ 0 & \gamma(a) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ein Ringmorphismus ist (hierbei ist $\begin{pmatrix} B & M \\ 0 & C \end{pmatrix} := \{\begin{pmatrix} b & m \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b \in B, m \in M, c \in C\}$ mit „Matrixmultiplikation“ als Ring aufzufassen).

Aufgabe 3.1.22. Sei A eine Algebra (wir nehmen hier nicht an, dass A kommutativ ist). Eine **Derivation** von A ist eine lineare Abbildung $T\colon A \to A$ mit $T(ab) = T(a)b + aT(b)$ für alle $a, b \in A$. (Im Sinne von Aufgabe 3.1.21 ist dies eine id-id-Derivation von A in $A = {}_A A_A$.)

(a) Für jedes $a \in A$ sind $[a, -]\colon A \to A$ und $[-, a]\colon A \to A$ Derivationen.
(b) Ist $T\colon A \to A$ eine Derivation, so gilt $T^m(ab) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} T^i(a) T^{m-i}(b)$.

3.2. Differentialoperatoren von $\mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

3.2.1. Wir betrachten nun den Fall $A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

Definition 3.2.2. Gegeben $p \in \mathbb{Z}$ und $T \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ definieren wir das **p-Symbol** $\operatorname{Sym}_p(T) \in A[\xi_1, \dots, \xi_n] = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ **von** T durch

$$\operatorname{Sym}_p(T) := \begin{cases} 0 & \text{falls } p < 0, \\ T & \text{falls } p = 0, \\ \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}} \sigma_p(T)(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}) \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_p} & \text{falls } p > 0. \end{cases}$$

Wir erhalten so eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Sym}_p\colon F_p \operatorname{Diff}(A) \to A[\xi_1, \dots, \xi_n], \tag{3.2.1}$$

die nach Lemma 3.1.18 sogar A-linear ist.

3.2.3. Für $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathsf{k}^n$ definiere

$$\ell_\zeta := \zeta_1 X_1 + \cdots + \zeta_n X_n \in A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$$

und

$$\tau_\zeta := [-, \ell]\colon \operatorname{Diff}(A) \to \operatorname{Diff}(A).$$

Jedes Element $P \in A[\underline{\xi}]$ können wir bei ζ auswerten (substituiere ξ_i durch ζ_i) und erhalten so ein Element $P(\zeta) \in A$. Gegeben $p > 0$ und $T \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned} \operatorname{Sym}_p(T)(\zeta) &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}} \sigma_p(T)(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}) \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \cdots \zeta_{i_p} \\ \text{(Lemma 3.1.18)} \qquad &= \frac{1}{p!} \sigma_p(T)(\ell_\zeta, \dots, \ell_\zeta) = \frac{1}{p!} [\dots [T, \ell_\zeta], \dots, \ell_\zeta] = \frac{1}{p!} \tau_\zeta^p(T). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Gleichheit

$$\operatorname{Sym}_p(T)(\zeta) = \frac{1}{p!} \tau_\zeta^p(T) \tag{3.2.2}$$

in A für alle $p \in \mathbb{N}$ (der Fall $p = 0$ war oben ausgenommen), alle $T \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ und alle $\zeta \in \mathsf{k}^n$.

Satz 3.2.4. *Sei $A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Die Abbildungen (3.2.1), für $p \in \mathbb{Z}$, induzieren einen Isomorphismus*

$$\operatorname{Sym}\colon \operatorname{gr}_F \operatorname{Diff}(A) \xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$$

*von graduierten Algebren, genannt **Symbolabbildung**, wobei die rechte Seite durch $\deg(X_i) = 0$ und $\deg(\xi_i) = 1$ graduiert ist.*

Beweis. Nach Lemma 3.1.18 ist klar, dass (3.2.1) zu einer A-linearen Abbildung

$$\mathrm{Sym}_p\colon \operatorname{gr}^p \operatorname{Diff}(A) \to A[\xi_1, \dots, \xi_n]^p.$$

faktorisiert, wobei die rechte Seite die Menge der homogenen Polynome (mit Koeffizienten in A) vom Grad p in den ξ_i bezeichnet. Die direkte Summe dieser Abbildungen ist die im Satz angegebene Abbildung Sym.

Wir zeigen zunächst, dass Sym mit den Multiplikationen verträglich ist. Seien $S \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ und $T \in F_q \operatorname{Diff}(A)$. Zu zeigen ist

$$\mathrm{Sym}_{p+q}(\overline{S} \cdot \overline{T}) = \mathrm{Sym}_p(\overline{S}) \cdot \mathrm{Sym}_q(\overline{T}), \tag{3.2.3}$$

wobei wir ohne Einschränkung $p, q \in \mathbb{N}$ annehmen können.

Mit der in 3.2.3 eingeführten Notation gilt für $\zeta \in \mathsf{k}^n$

$$\tau_\zeta(ST) = [ST, \ell_\zeta] = [S, \ell_\zeta]T + S[T, \ell_\zeta] = \tau_\zeta(S)T + S\tau_\zeta(T),$$

woraus per Induktion

$$\tau_\zeta^m(ST) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \tau_\zeta^i(S)\tau_\zeta^{m-i}(T)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt (vgl. Aufgabe 3.1.22). Nach (3.2.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sym}_{p+q}(ST)(\zeta) &= \frac{1}{(p+q)!}\tau_\zeta^{p+q}(ST) \\
&= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{i=0}^{p+q}\binom{p+q}{i}\tau_\zeta^i(S)\tau_\zeta^{p+q-i}(T) \\
\text{(da } S \in F_p\operatorname{Diff}(A) \text{ und } T \in F_q\operatorname{Diff}(A)\text{)} \qquad &= \frac{1}{(p+q)!}\binom{p+q}{p}\tau_\zeta^p(S)\tau_\zeta^q(T) \\
&= \frac{1}{p!\,q!}\tau_\zeta^p(S)\tau_\zeta^q(T) \\
&= (\mathrm{Sym}_p(S)(\zeta)) \cdot (\mathrm{Sym}_q(T)(\zeta)).
\end{aligned}$$

Da ζ beliebig war (und k als Körper der Charakteristik Null unendlich ist) folgt

$$\mathrm{Sym}_{p+q}(ST) = \mathrm{Sym}_p(S)\,\mathrm{Sym}_q(T).$$

Daraus folgt sofort Multiplikativität (3.2.3).

Nach Definition gelten $\mathrm{Sym}_0(X_i) = X_i$ und

$$\mathrm{Sym}_1(\partial_i) = \sum_{j=1}^n \sigma_1(\partial_i)(X_j)\xi_j = \sum_{j=1}^n [\partial_i, X_j]\xi_j = \xi_i.$$

Dank der gerade bewiesenen Multiplikativität folgt daraus

$$\mathrm{Sym}_{|\beta|}(X^\alpha \partial^\beta) = X^\alpha \xi^\beta \tag{3.2.4}$$

für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$. Insbesondere ist Sym surjektiv.

Es bleibt zu zeigen, dass Sym injektiv ist. Sei $T \in F_p \operatorname{Diff}(A)$ mit $\mathrm{Sym}_p(T) = 0$. Zu zeigen ist $T \in F_{p-1}\operatorname{Diff}(A)$.

Wir zeigen die Aussage per Induktion über p. Für $p \leq 0$ ist die Aussage trivial. Gelte $p > 0$. Laut Annahme $0 = \mathrm{Sym}_p(T)$ erhalten wir mit (3.2.2)

$$0 = \mathrm{Sym}_p(T)(\zeta + \lambda\eta) = \frac{1}{p!}\tau^p_{\zeta+\lambda\eta}(T)$$

für alle $\zeta, \eta \in \mathsf{k}^n$ und $\lambda \in \mathsf{k}$, also $\tau^p_{\zeta+\lambda\eta}(T) = 0$. Offensichtlich gelten

$$\tau_{\zeta+\lambda\eta} = [-, \ell_{\zeta+\lambda\eta}] = [-, \ell_\zeta + \lambda\ell_\eta] = \tau_\zeta + \lambda\tau_\eta$$

und

$$\tau_\zeta \circ \tau_\eta = [[-, \ell_\eta], \ell_\zeta] = [[-, \ell_\zeta], \ell_\eta] + [-, \underbrace{[\ell_\eta, \ell_\zeta]}_{=0}] = [[-, \ell_\zeta], \ell_\eta] = \tau_\eta \circ \tau_\zeta$$

d. h. die beiden Endomorphismen τ_ζ und τ_η kommutieren. Es folgt

$$0 = \tau^p_{\zeta+\lambda\eta}(T) = (\tau_\zeta + \lambda\tau_\eta)^p(T) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \underbrace{\tau^i_\zeta(\tau^{p-i}_\eta(T))}_{\in A} \lambda^{p-i}.$$

Fasst man diesen Ausdruck als Polynom in λ (mit Koeffizienten in A) auf, so folgt $\tau^i_\zeta(\tau^{p-i}_\eta(T)) = 0$ für alle $i \in \{0, \ldots, p\}$ (da k unendlich ist und alle Binomialkoeffizienten ungleich Null sind - beide Aussagen folgen aus der Annahme, dass k Charakteristik Null hat). Insbesondere erhalten wir

$$0 = \tau^{p-1}_\zeta(\tau_\eta(T)) = \tau^{p-1}_\zeta([T, \ell_\eta]) = (p-1)!\,\mathrm{Sym}_{p-1}([T, \ell_\eta])(\zeta)$$

für alle $\zeta, \eta \in \mathsf{k}^n$, also $\mathrm{Sym}_{p-1}([T, \ell_\eta]) = 0$ für alle $\eta \in \mathsf{k}^n$. Wegen $[T, \ell_\eta] \in F_{p-1}\,\mathrm{Diff}(A)$ liefert die Induktionsannahme $[T, \ell_\eta] \in F_{p-2}\,\mathrm{Diff}(A)$. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ergibt sich wegen $\ell_{e_i} = X_i$

$$[T, X_i] = [T, \ell_{e_i}] \in F_{p-2}\,\mathrm{Diff}(A).$$

Da die X_i die Algebra $A = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ erzeugen, folgt $T \in F_{p-1}\,\mathrm{Diff}(A)$ (siehe Aufgabe 3.1.19). Dies zeigt die Injektivität der Symbolabbildung. □

Bemerkung 3.2.5. So wie wir diverse Eigenschaften der Weyl-Algebra $D(n)$ aus der Kenntnis (siehe Satz 2.5.19) ihrer assoziierten graduierten Algebra (bezüglich der Bernstein-Filtrierung) gefolgert haben, kann man Eigenschaften von $\mathrm{Diff}(\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n])$ aus Satz 3.2.4 herleiten. Wir verzichten auf Grund des nächsten Ergebnisses darauf.

Satz 3.2.6. [26] *Die Weyl-Algebra besteht genau aus den Differentialoperatoren der Polynomalgebra, in Formeln*

$$D(n) = \mathrm{Diff}(\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]).$$

Für die Menge der Differentialoperatoren der Ordnung $\leq p$ gilt

$$F_p\,\mathrm{Diff}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = \bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\beta|\leq p} \mathsf{k}X^\alpha\partial^\beta, = \bigoplus_{\beta\in\mathbb{N}^n, |\beta|\leq p} \mathsf{k}[\underline{X}]\partial^\beta \tag{3.2.5}$$

als $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul bzw. Vektorraum.

[26] Siehe [Cou95, Kap. 3] für einen Alternativbeweis.

Beweis. Sei $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Der Isomorphism Sym aus Satz 3.2.4 bildet $X^\alpha \partial^\beta \in \operatorname{gr}^{|\beta|} \operatorname{Diff}(A)$ auf $X^\alpha \xi^\beta \in A[\underline{\xi}]^{|\beta|}$ ab, wie wir im Beweis dieses Satzes gesehen haben (siehe (3.2.4)). Daraus folgt, dass für jedes $p \in \mathbb{Z}$ die Elemente $X^\alpha \partial^\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und $|\beta| = p$ eine Basis von $\operatorname{gr}^p \operatorname{Diff}(A)$ bilden. Per Induktion folgert man daraus unter Verwendung der kurzen exakten Sequenzen $0 \to F_{p-1} \operatorname{Diff}(A) \to F_p \operatorname{Diff}(A) \to \operatorname{gr}^p \operatorname{Diff}(A) \to 0$, dass die $X^\alpha \partial^\beta$ mit $|\beta| \leq p$ eine Basis von $F_p \operatorname{Diff}(A)$ bilden. Der Induktionsanfang ist wegen $F_{-1} \operatorname{Diff}(A) = 0$ trivial. Dies zeigt die Gleichheiten in (3.2.5). Es folgt, dass die $X^\alpha \partial^\beta$ eine Basis von $\operatorname{Diff}(A)$ bilden. Daraus folgt sofort $\operatorname{Diff}(A) = D(n)$ (wer mag, kann Satz 2.2.7 verwenden). □

3.2.7. Die in Definition 3.2.2 abstrakt definierte Abbildung $\operatorname{Sym}_p \colon F_p \operatorname{Diff}(A) \to A[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ hat die folgende konkrete Beschreibung: Nach Satz 3.2.6 wissen wir, dass jedes Element $T \in \operatorname{Diff}(A)$ die Gestalt $T = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq p} t_\beta \partial^\beta$ hat, für eindeutige Polynome $t_\beta \in A = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Dann gilt nach (3.2.4)

$$\operatorname{Sym}_p(T) = \operatorname{Sym}_p(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \\ |\beta| \leq p}} t_\beta \partial^\beta) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \\ |\beta| = p}} t_\beta \xi^\beta.$$

3.2.8. Nach Satz 3.2.6 gilt $D(n) = \operatorname{Diff}(\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n])$. Somit ist die Ordnungsfiltrierung

$$FD(n) := F \operatorname{Diff}(\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n])$$

eine Filtrierung der Weyl-Algebra $D(n)$.

Warnung 3.2.9. Die Bernstein-Filtrierung unterscheidet sich von der Ordnungsfiltrierung. Beispielsweise gilt $B_0 D(n) = \mathsf{k}$, aber $F_0 \mathrm{D}(n) = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Allgemein gelten

$$B_p D(n) = \langle X^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| + |\beta| \leq p \rangle,$$
$$F_p D(n) = \langle X^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq p \rangle.$$

Satz 3.2.10. *Das Zentrum der Weyl-Algebra* $D(n) = \operatorname{Diff}(\mathsf{k}[\underline{X}])$ *(siehe Satz 3.2.6) besteht genau aus den konstanten Polynomen, in Formeln*

$$\mathrm{Z}(D(n)) = \mathsf{k}.$$

[27]

Beweis. Wir zeigen die Gleichheit $\mathrm{Z}(\operatorname{Diff}(A)) = \mathsf{k}$, wobei $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Die Inklusion $\supset$ ist trivial. Sei $T \in \mathrm{Z}(\operatorname{Diff}(A))$. Dann gilt $[T, a] = Ta - aT = 0$ für alle $a \in A$, also $T \in F_0 \operatorname{Diff}(A) = A$ (siehe Satz 3.1.16), d. h. T ist ein Polynom. Wegen $0 = \partial_i T - T \partial_i = [\partial_i, T] = \partial_i(T)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ folgt $T \in \mathsf{k}$, da k ein Körper der Charakteristik Null ist. □

Ende der 8. Vorlesung am 31.10.2018.

Aufgabe 3.2.11. Sei $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Die folgenden Teilaufgaben zeigen, dass ein $D(n)$-Modul dasselbe ist wie ein A-Modul zusammen mit einer „Operation“ der „Vektorfelder“ $\operatorname{Der}(A) = \bigoplus_{i=1}^n A \partial_i$ auf M.

[27] Wir hätten die Gleichheit $\mathrm{Z}(D(n)) = \mathsf{k}$ schon längst durch Rechnung zeigen können. Ebenso hätten wir die Gleichheit $\mathrm{Z}(\operatorname{Diff}(\mathsf{k}[\underline{X}])) = \mathsf{k}$ schon früher mit dem hier angegebenen kurzen Beweis zeigen können.

(a) Sei M ein $D(n)$-Modul. Definiere $\nabla\colon \operatorname{Der}(A) \to \operatorname{End}(M)$, $\theta \mapsto \nabla_\theta$, durch

$$\nabla_\theta(m) = \theta.m$$

für $m \in M$ (dies verwendet $\theta \in \operatorname{Der}(A) \subset D(n)$). Dann ist ∇ eine lineare Abbildung, und es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \nabla_{f\theta}(m) &= f\nabla_\theta(m), \\ \nabla_\theta(fm) &= \theta(f)m + f\nabla_\theta(m), \\ \nabla_{[\theta,\eta]}(m) &= [\nabla_\theta, \nabla_\eta](m) \end{aligned}$$

für alle $f \in A$, $\theta, \eta \in \operatorname{Der}(A)$, $m \in M$.[28]

(b) Sei M ein A-Modul und $\nabla\colon \operatorname{Der}(A) \to \operatorname{End}(M)$ eine lineare Abbildung, die die obigen drei Rechenregeln erfüllt. Man nennt eine solche Abbildung einen **flachen**[29] **Zusammenhang** auf dem A-Modul M. Dann gibt es genau eine $D(n)$-Modulstruktur auf M, die die gegebene A-Modulstruktur fortsetzt und $\nabla_\theta(m) = \theta.m$ für alle $\theta \in \operatorname{Der}(A) \subset D(n)$ und alle $m \in M$ erfüllt.

(c) Die beiden obigen Konstruktionen sind invers zueinander. Genauer liefern sie für jeden A-Modul M eine Bijektion zwischen den folgenden Mengen:

  (i) Der Menge der $D(n)$-Modulstrukturen auf M, die die gegebene A-Modulstruktur fortsetzen.

  (ii) Der Menge der flachen Zusammenhänge auf M.

(d) Seien M und N zwei $D(n)$-Moduln. Seien ∇^M und ∇^N die zugehörigen flachen Zusammenhänge. Dann gilt

$$\operatorname{Hom}_{D(n)}(M, N) = \{\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, N) \mid \nabla^N_\theta \circ \varphi = \varphi \circ \nabla^M_\theta \text{ für alle } \theta \in \operatorname{Der}(A)\}.$$

(e) Sei $\operatorname{FlConn}(A)$ die[30] folgende Kategorie: Ihre Objekte sind Paare (M, ∇), wobei M ein A-Modul ist und ∇ ein flacher Zusammenhang auf M. Morphismen $(M, \nabla^M) \to (N, \nabla^N)$ sind A-Modulmorphismen $\varphi\colon M \to N$ mit $\nabla^N_\theta \circ \varphi = \varphi \circ \nabla^M_\theta$ für alle $\theta \in \operatorname{Der}(A)$. Verknüpfung von Morphismen und Identitäten sind offensichtlich. Dann sind die Kategorien $\operatorname{Mod}(D(n))$ und $\operatorname{FlConn}(A)$ in offensichtlicher Weise isomorph (und insbesondere äquivalent).

Aufgabe 3.2.12 ([Cou95, Exercises III.3.2+3.5])**.** Sei I ein Ideal in $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Jedes $T \in \operatorname{End}(A)$ mit $T(I) \subset I$ liefert offensichtlich genau ein $\overline{T} \in \operatorname{End}(A/I)$ mit $\overline{T}(\overline{a}) = \overline{T(a)}$ für alle $a \in A$.

(a) Sei $T \in \operatorname{End}(A)$ mit $T(I) \subset I$. Gilt $T \in \operatorname{Der}(A)$ (bzw. $T \in F_p \operatorname{Diff}(A)$), so folgt $\overline{T} \in \operatorname{Der}(A/I)$ (bzw. $\overline{T} \in F_p \operatorname{Diff}(A/I)$).

(b) Sei $\operatorname{Der}_I(A) := \{T \in \operatorname{Der}(A) \mid T(I) \subset I\}$. Dann ist

$$0 \to I \operatorname{Der}(A) \to \operatorname{Der}_I(A) \to \operatorname{Der}(A/I) \to 0$$

(mit den offensichtlichen Abbildungen Inklusion bzw. $T \mapsto \overline{T}$) eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Insbesondere gilt also $\operatorname{Der}(A/I) = \frac{\operatorname{Der}_I(A)}{I \operatorname{Der}(A)}$.

[28] In der ersten und der letzten Gleichung könnte man m weglassen und erhält eine Gleichung in $\operatorname{End}(M)$ statt in M. Die erste Gleichung sagt, dass ∇ nicht nur linear, sondern sogar A-linear ist.

[29] Ein Zusammenhang muss per definitionem die ersten beiden Bedingungen erfüllen. Er ist flach, wenn er die dritte Bedingung erfüllt.

[30] Zusammenhang ist englisch *connection*, flach ist *flat*.

Hinweis: Für die Surjektivität: Gegeben $S \in \operatorname{Der}(A/I)$ wähle $a_i \in A$ mit $S(\overline{X}_i) = \overline{a}_i$. Dann liegt $T := \sum a_i \partial_i \in \operatorname{Der}(A)$ bereits in $\operatorname{Der}_I(A)$; um dies zu sehen, berechne man $S(\overline{f})$ und $T(f)$ für $f = \sum c_\alpha X^\alpha \in I$.

Aufgabe 3.2.13 ([Cou95, Exercises III.3.6+3.8])**.** Diese Aufgabe zeigt, dass $\operatorname{Diff}(R)$ im Allgemeinen nicht von R und $\operatorname{Der}(R)$ als Algebra erzeugt ist.[31] Sei $R := \mathsf{k}[t^2, t^3]$ die von den Elementen t^2, t^3 erzeugte Unteralgebra von $\mathsf{k}[t]$.

(a) R ist als Algebra isomorph zu A/I, wobei $A = \mathsf{k}[X, Y]$ und $I = (Y^2 - X^3)$.
Hinweis: A/I hat $1, Y$ als $\mathsf{k}[X]$-Basis.

(b) Als A/I-Modul ist $\operatorname{Der}(A/I)$ von den beiden Elementen $T = 2X\partial_X + 3Y\partial_Y$ und $S = 2Y\partial_X + 3X^2\partial_Y$ (oder genauer $\overline{T}$ und $\overline{S}$) erzeugt. (Genauer gilt $\operatorname{Der}(A/I) = \mathsf{k}[X]\overline{T} \oplus \mathsf{k}[X]\overline{S}$.)
Hinweis: Aufgabe 3.2.12.

(c) Folgere, dass $\operatorname{Der}(R)$ als R-Modul von den beiden Elementen $t\partial$ und $t^2\partial$ erzeugt ist, wobei $\partial = \partial_t$. (Genauer gilt $\operatorname{Der}(R) = \mathsf{k}[t^2]t\partial \oplus \mathsf{k}[t^2]t^2\partial$.)

(d) Es gilt $F := \partial^2 - 2t^{-1}\partial \in F_2 \operatorname{Diff}(R)$, aber F liegt nicht in der Unteralgebra von $\operatorname{Diff}(R)$, die von R und $\operatorname{Der}(R)$ erzeugt wird.
Hinweis: Es gilt $[F, t^n] = n(n-3)t^{n-2} + 2nt^{n-1}\partial \in F_1 \operatorname{Diff}(R)$. Es gilt $F(t^2) = -2$, aber alle Elemente von R und $\operatorname{Der}(R)$ bilden $Rt^2 + Rt^3$ in sich selbst ab.

Aufgabe 3.2.14. Sei $A = \mathsf{k}[X]/(X^2)$. Berechne alle $F_p \operatorname{Diff}(A)$ und zeige, dass $\operatorname{Diff}(A)$ nicht von A und $\operatorname{Der}(A)$ erzeugt ist.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 3.1.19
(2) Aufgabe 3.1.22
(3) Aufgabe 3.2.12
(4) Eine der folgenden Aufgaben: 3.2.13 (Anwendung voriger Aufgabe), 3.1.21 (Jacobsons Trick), 3.2.11 (flache Zusammenhänge), 3.2.14 ($\operatorname{Diff}(A)$ in einfachem Beispiel ausrechnen).

4. Dimension und Multiplizität von Moduln

4.0.1. Wir wollen ein sinnvolles Maß für die „Größe“ eines $D(n)$-Moduls entwickeln, so wie die Dimension ein sinnvolles Maß für die Größe eines Vektorraums oder die Kardinalität ein sinnvolles Maß für die Größe einer Menge ist. Jeder $D(n)$-Modul ist ein Vektorraum, so dass man seine Dimension als Vektorraum betrachten kann; dies ist jedoch langweilig: Für $n \geq 1$ ist die Vektorraumdimension nur für den Nullmodul endlich, siehe Aufgabe 2.1.15[32].

[31] Dies gilt jedoch, falls R eine glatte Algebra ist (geometrisch bedeutet dies, dass $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} \mathsf{k}$ glatt ist) und k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Eventuell zeigen wir dies später.

[32] Alternativ kann man das auch so beweisen: Sei $D(n) \to \operatorname{End}(M)$ eine $D(n)$-Modulstruktur auf einem Vektorraum $M \neq 0$. Wegen der Einfachheit der Weyl-Algebra (siehe Satz 2.5.32) muss dieser Algebrenmorphismus injektiv sein. Im Fall $n \geq 1$ hat also $\operatorname{End}(M)$ mindestens abzählbare Dimension, so dass M ebenfalls mindestens abzählbare Dimension haben muss.

4.1. **Hilbert-Poincaré-Reihe.**

Lemma 4.1.1. *Sei $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein kommutativer Ring mit einer nicht-negativen Graduierung. Betrachte das homogene Ideal $A^{>0} := \bigoplus_{p>0} A^p$ (es handelt sich um ein Ideal, da die Graduierung auf A nicht-negativ ist). Dann erzeugt eine Familie homogener Elemente $(a_i)_{i\in I}$ in $A^{>0}$ genau dann A als Algebra über A^0, wenn sie $A^{>0}$ als Ideal erzeugt. Insbesondere sind äquivalent:*

(a) A ist ein noetherscher Ring.
(b) A^0 ist ein noetherscher Ring und A ist endlich erzeugt als A^0-Algebra.

Beweis. Sei A als A^0-Algebra von $(a_i)_{i\in I}$ erzeugt. Dann ist jedes Element von $A^{>0}$ eine A^0-Linearkombination von Produkten $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_\ell}$ mit $\ell \geq 1$ Faktoren (für geeignete $i_j \in I$) und somit ein Element von $\sum_{i\in I} Aa_i$. Es gilt also $A^{>0} \subset \sum Aa_i \subset A^{>0}$ und somit Gleichheit $A^{>0} = \sum Aa_i$.

Gelte umgekehrt $A^{>0} = \sum Aa_i$. Sei $d_i > 0$ der Grad von a_i. Sei $B := \langle a_i \mid i \in I\rangle_{A^0\text{-Algebra}} \subset A$ die von diesen Elementen erzeugte A^0-Unteralgebra von A. Zu zeigen ist $B = A$ oder äquivalent $A^p \subset B$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Sicherlich gilt $A^0 \subset B$. Sei $p \in \mathbb{N}_{>0}$ und gelte $A^q \subset B$ für alle $q < p$. Sei $y \in A^p$. Wegen $y \in A^{>0} = \sum Aa_i$ gibt es eine Darstellung $y = \sum_{i\in E} z_i a_i$ für eine endliche Teilmenge $E \subset I$ und geeignete $z_i \in A$. Wir können ohne Einschränkung $z_i \in A^{p-d_i}$ für alle i annehmen. Wegen $p - d_i < p$ folgt $z_i \in B$ per Induktionsannahme. Daraus folgt $y = \sum_{i\in E} z_i x_i \in B$, also $A^p \subset B$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Da der Ring A noethersch ist, ist auch sein Quotientenring $A/A^{>0}$ noethersch. Die Komposition $A^0 \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/A^{>0}$ ist aber ein Isomorphismus von Ringen. Also ist A^0 noethersch.

Da A noethersch ist, ist das Ideal $A^{>0}$ von endlich vielen, ohne Einschränkung homogenen, Elementen $a_1, \ldots, a_m$ erzeugt. Diese Elemente erzeugen dann nach der soeben bewiesenen Äquivalenz A als A^0-Algebra.

(b) $\Rightarrow$ (a): Da A^0 ein noetherscher Ring ist, ist jeder Polynomring $A^0[X_1, \ldots, X_n]$ über A^0 in endlich vielen Variablen wieder noethersch (Hilbertscher Basissatz). Als Quotient eines solchen Polynomrings ist dann auch A noethersch. $\square$

Annahme 4.1.2. Bis zum Ende von Abschnitt 4.1 sei $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein kommutativer noetherscher Ring mit einer nicht-negativen Graduierung.

Dies hat zur Folge, dass ein A-Modul genau dann endlich erzeugt ist, wenn er noethersch ist. Nach Lemma 4.1.1 ist auch A^0 ein noetherscher Ring. Insbesondere ist ein A^0-Modul genau dann endlich erzeugt, wenn er noethersch ist.

4.1.3. Die Polynomalgebra $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ mit einer Graduierung, bei der alle X_i Grad Eins (oder allgemeiner positiven Grad) haben, ist das Hauptbeispiel eines Ringes, der die Annahme 4.1.2 erfüllt. Der Leser sollte immer dieses Beispiel im Kopf haben. Quotienten einer solchen Polynomalgebra nach einem homogenen Ideal sind weitere Beispiele; genauer sind alle Beispiele mit $A^0 \cong \mathsf{k}$ isomorph zu einem solchen Quotienten.

Definition 4.1.4. Sei $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} M^p$ ein graduierter Modul über einem graduierten Ring $R = \bigoplus R^p$, und sei $d \in M$. Dann ist der **um d verschobene graduierte R-Modul** $M\langle d\rangle$ wie folgt definiert. Als R-Modul stimmt er mit M überein, jedoch ist die Graduierung um d verschoben: $M\langle d\rangle^p := M^{d+p}$. Man nennt $M\langle d\rangle$ auch den **d-Shift von** M.

Lemma 4.1.5. *Sei $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} M^p$ ein endlich erzeugter graduierter A-Modul. Dann sind alle M^p endlich erzeugte A^0-Moduln, und es gilt $M^p = 0$ für alle genügend kleinen p.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage zuerst im Spezialfall $M = A$. Nach Lemma 4.1.1 ist A endlich erzeugt als A^0-Algebra. Seien $x_1, \dots, x_m$ Erzeuger von A als A^0-Algebra. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass jedes x_i homogen von positivem Grad $d_i > 0$ ist. Sei $A^0[X_1, \dots, X_m]$ die Polynomalgebra über A^0 in (freien) Variablen $X_1, \dots, X_m$. Wir versehen sie mit der eindeutigen Graduierung mit $\deg(X_i) = d_i$. Es ist klar, dass jede homogene Komponente $A^0[X_1, \dots, X_m]^p$ als A^0-Modul endlich erzeugt, ja sogar frei von endlichem Rang ist: Die (endlich vielen) Monome X^α, für $\alpha \in \mathbb{N}^m$ mit $\alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_m d_m = p$, bilden eine A^0-Basis.

Sei $A^0[X_1, \dots, X_m] \twoheadrightarrow A$ der eindeutige Morphismus von (kommutativen) A^0-Algebren mit $X_i \mapsto x_i$ für alle i. Dieser ist surjektiv und ein Morphismus von graduierten Ringen (oder A^0-Algebren, formal nicht definiert). Also ist A^p ein Quotient von $A^0[X_1, \dots, X_m]^p$ als A^0-Modul und damit endlich erzeugt (und Null für negatives p).

Dies zeigt, dass der endlich erzeugte A-Modul A die Behauptungen des Lemmas erfüllt. Analoges gilt für alle Shifts $A\langle d\rangle$.

Sei nun M ein endlich erzeugter A-Modul. Seien $m_1, \dots, m_r$ Erzeuger von M als A-Modul. Wir können annehmen, dass alle m_i homogen sind, sagen wir $\deg(m_i) = h_i$.

Sei $A^{\oplus r} \twoheadrightarrow M$ der surjektive Morphismus von A-Moduln mit $e_i \mapsto m_i$ für alle i. Dieser ist kein Morphismus von graduierten A-Moduln, jedoch ist dieselbe Abbildung ein surjektiver Morphismus

$$A\langle -h_1\rangle \oplus \dots A\langle -h_r\rangle \twoheadrightarrow M$$

von graduierten A-Moduln. Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ erhalten wir also auf den zugehörigen Komponenten eine surjektive Abbildung

$$(A\langle -h_1\rangle \oplus \dots A\langle -h_r\rangle)^p = A^{p-h_1} \oplus \dots \oplus A^{p-h_r} \twoheadrightarrow M^p$$

von A^0-Moduln. Da die linke Seite als endliche direkte Summe (= endliches Koprodukt) endlich erzeugter A^0-Moduln endlich erzeugt ist, folgt dies auch für M^p. Für genügend kleines p ist die linke Seite Null, was dann auch für die rechte Seite M^p gilt. □

4.1.6. Wir erinnern daran, dass $\mathrm{mod}(A^0)$ die Kategorie aller endlich erzeugten (äquivalent: noetherschen) A^0-Moduln bezeichnet (siehe 1.6.10).

Definition 4.1.7. Eine Abbildung[33] $\lambda\colon \mathrm{mod}(A^0) \to \mathbb{Z}$ heißt **additiv**, falls

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$$

für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

von endlich erzeugten A^0-Moduln gilt.[34]

4.1.8. Automatisch gilt $\lambda(0) = 0$.

[33] Genauer ist λ nur auf den Objekten der Kategorie $\mathrm{mod}(A^0)$ definiert, also eine Abbildung $\lambda\colon \mathrm{Obj}(\mathrm{mod}(A^0)) \to \mathbb{Z}$.

[34] Hier kann A^0 durch einen beliebigen noetherschen Ring ersetzt werden. Noch allgemeiner kann $\mathrm{mod}(A^0)$ durch eine beliebige abelsche (oder gar exakte) Kategorie ersetzt werden; auch kann $\mathbb{Z}$ durch eine beliebige abelsche Gruppe ersetzt werden.

Beispiel 4.1.9. Ist A^0 endlichdimensional oder gilt sogar $A^0 = \mathsf{k}$, so definiert die Dimension $\dim = \dim_{\mathsf{k}}\colon \operatorname{mod}(A^0) \to \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ eine additive Abbildung.

Annahme 4.1.10. Bis zum Ende von Abschnitt 4.3 sei $\lambda\colon \operatorname{mod}(A^0) \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion.

Definition 4.1.11. Es bezeichne $\operatorname{grmod}(A)$ die Kategorie aller graduierten, endlich erzeugten A-Moduln.

Definition 4.1.12. Sei $M \in \operatorname{grmod}(A)$. Die formale Laurentreihe (in der Variablen T mit ganzzahligen Koeffizienten)

$$P_M(T) = P_{M,\lambda}(T) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda(M^p)T^p \in \mathbb{Z}((T)) := \mathbb{Z}[[T]][T^{-1}]$$

heißt **Hilbert-Poincaré-Reihe** von M bezüglich λ. Sie ist wegen Lemma 4.1.5 wohldefiniert.[35]

4.1.13. Die Hilbert-Poincaré-Reihe $P_M(T)$ ist zunächst schlichtweg ein *bookkeeping device*, das alle Werte $\lambda(M^p)$ simultan speichert. Es hat jedoch den Vorteil, dass es in einem Ring lebt. Wir werden dies im nächsten Beweis ausnutzen.

Beispiel 4.1.14. Für $A = \mathsf{k}[X]$ (mit X homogen vom Grad 1), $M = A$ und $\lambda = \dim$ gilt

$$P_A(T) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \dim(\mathsf{k}[X]^p)T^p = \sum_{p\in\mathbb{N}} T^p = (1-T)^{-1} = \frac{1}{1-T}.$$

Für $A = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ (mit allen X_i homogen vom Grad 1), $M = A$ und $\lambda = \dim$ gilt

$$P_A(T) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \dim(\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]^p)T^p = \sum_{p\in\mathbb{N}} \binom{p+n-1}{n-1} T^p = \frac{1}{(1-T)^n}. \tag{4.1.1}$$

Aufgabe 4.1.15. Begründe die beiden interessanten Gleichheiten in (4.1.1) (Hinweis für die zweite Gleichheit: Induktion.) Was ist $P_A(T)$, wenn X_i Grad $d_i > 0$ hat?

Aufgabe 4.1.16. (a) Ist $0 \to M_0 \to M_1 \to \ldots \to M_\ell \to 0$ eine exakte Sequenz in $\operatorname{mod}(A^0)$, so ist die alternierende Summe der $\lambda(M_i)$ Null, in Formeln

$$\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \lambda(M_i) = 0.$$

(b) Ist $0 \to M_0 \to M_1 \to \ldots \to M_\ell \to 0$ eine exakte Sequenz in $\operatorname{grmod}(A)$, so ist die alternierende Summe der Hilbert-Poincaré-Reihen $P_{M_i}(T)$ Null, in Formeln

$$\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i P_{M_i}(T) = 0.$$

Aufgabe 4.1.17. Sei $A = \mathbb{C}[X, Y]$ mit $\deg(X) = \deg(Y) = 1$. Sei $f \in A^d - 0$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Bestimme $P_{A/(f)} = P_{A/(f),\dim}$.

Hinweis: Aufgabe 4.1.16.

[35] Dieselbe Definition funktioniert allgemeiner für jeden graduierten Modul $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} M^p$ über A^0 (wobei A^0 als graduierter Ring aufgefasst wird, der im Grad Null konzentriert ist), falls alle M^p als A^0-Moduln endlich erzeugt sind und $M^p = 0$ für alle hinreichend kleinen p gilt.

Aufgabe 4.1.18 (Graduiertes Nakayama-Lemma (der Beweis ist sehr einfach))**.** Sei $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein nicht-negativ graduierter Ring (der ausnahmsweise nicht als noethersch und kommutativ vorausgesetzt ist). Ist M ein endlich erzeugter graduierter A-Modul mit $A^{>0}M = M$, so gilt bereits $M = 0$.

Satz 4.1.19 (Hilbert, Serre)**.** *Seien $M \in \operatorname{grmod}(A)$ und $\lambda\colon \operatorname{mod}(A^0) \to \mathbb{Z}$ additiv. Dann gilt*

$$P_M(T) = \frac{f(T)}{\prod_{i=1}^{s}(1-T^{d_i})},$$

wobei $f(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ ein geeignetes Laurent-Polynom ist, $s \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist, und die $d_i \in \mathbb{N}_{>0}$ positive natürliche Zahlen sind. Insbesondere liegt $P_M(T)$ in dem Teilring $\mathbb{Z}[T, T^{-1}, (1-T)^d \mid d \in \mathbb{N}_{>0}]$ von $\mathbb{Z}((T))$.

Ist A als A^0-Algebra von endlich vielen gegebenen homogenen Elementen von positivem Grad erzeugt, so kann man annehmen, dass s die Anzahl dieser Erzeuger ist und die $d_1, \ldots, d_s$ die Grade dieser Erzeuger sind.

4.1.20. Implizit wird in der Formulierung des Satzes verwendet, dass $1 - t^d$, für $d > 0$, in $\mathbb{Z}((t))$ invertierbar ist.

Beweis. Sei A als A^0-Algebra von homogenen Elementen $x_i \in A^{d_i}$ erzeugt, für $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Wir beweisen die Aussage per Induktion über s. Im Fall $s = 0$ gilt $A = A^0$ und somit lebt M nur in endlich vielen Graden, sagen wir $M^p = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ mit $|p| > N$. Dann hat $P_M(T) = \sum_{p=-N}^{N} \lambda(M^p)T^p \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ die gewünschte Form.

Gelte $s > 0$. Betrachte die Abbilung „Multiplikation mit dem Skalar x_s“ $x_s\cdot\colon M\langle -d_s\rangle \to M$. Da wir die Graduierung im Startbereich geshiftet haben, ist dies ein Morphismus graduierter A-Moduln. Ihr Kern K und ihr Kokern Q sind ebenfalls graduierte, endlich erzeugte A-Moduln (siehe Aufgabe 2.6.25). Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \to K \to M\langle -d_s\rangle \xrightarrow{x_s\cdot} M \to Q \to 0$$

in $\operatorname{grmod}(A)$. Nach Aufgabe 4.1.16 liefert das

$$0 = P_K(T) - P_{M\langle -d_s\rangle}(T) + P_M(T) - P_Q(T) = P_K(T) - T^{d_s}P_M(T) + P_M(T) - P_Q(T)$$

und somit

$$(1 - T^{d_s})P_M(T) = P_Q(T) - P_K(T).$$

Weil x_s auf Q und K durch Null operiert, können wir Q und K als graduierte, endlich erzeugte $A/(x_s)$-Moduln auffassen. Man beachte, dass $A/(x_s)$ ein nicht-negativ graduierter, kommutativer noetherscher Ring ist, dessen nullte Komponente A^0 ist und der als A^0-Algebra von den homogenen Elementen $x_1, \ldots, x_{s-1}$ erzeugt ist. Die Induktionssannahme liefert

$$P_Q(T) = \frac{f_1(T)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-T^{d_i})} \quad \text{und} \quad P_K(T) = \frac{f_2(T)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-T^{d_i})}.$$

Damit erhalten wir

$$P_M(T) = \frac{P_Q(T) - P_K(T)}{(1-T^{d_s})} = \frac{f_1(T) - f_2(T)}{\prod_{i=1}^{s}(1-T^{d_i})}$$

wie gewünscht. □

Ende der 9. Vorlesung am 5.11.2018.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 4.1.15
(2) Aufgabe 4.1.16 und Aufgabe 4.1.17
(3) Aufgabe 4.1.18
(4) Aufgabe 4.2.6 und: Stellen sie das ganzwertige Polynom $\binom{T}{2}^2$ in der $\mathbb{Z}$-Basis $(\binom{T}{m})_{m\in\mathbb{N}}$ aus Satz 4.2.8 dar.

4.2. **Ganzwertige Polynome.**

Definition 4.2.1. Ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[T]$ heißt **ganzwertig**[36] (oder **numerisch**; englisch *integer-valued* oder *numerical*), falls $Q(p) \in \mathbb{Z}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt.

Definition 4.2.2. Für $m \in \mathbb{N}$ definiere

$$\binom{T}{m} := \frac{T(T-1)(T-2)\cdots(T-m+1)}{m!} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m!}][T] \subset \mathbb{Q}[T].$$

Es gelten $\binom{T}{0} = 1$ und $\binom{T}{1} = T$ und $\binom{T}{2} = \frac{1}{2}T(T-1)$.

Beispiel 4.2.3. Alle Polynome $\binom{T}{m}$ sind ganzwertig: Sei $p \in \mathbb{Z}$. Im Fall $0 \le p < m$ gilt $\binom{p}{m} = 0$. Im Fall $p \ge m$ ist $\binom{p}{m}$ der übliche Binomialkoeffizient (dies rechtfertigt die Notation $\binom{T}{m}$), also die Anzahl m-elementiger Teilmengen einer p-elementigen Menge, was eine (positive) ganze Zahl ist. Im Fall $p < 0$ gilt $\binom{p}{m} = (-1)^m\binom{-p+m-1}{m}$, was nach den obigen Fällen eine ganze Zahl ist.

Beispiel 4.2.4. Die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \\ &p \mapsto \dim(\mathsf{k}[X_1,\dots,X_n]^p) \overset{\text{falls } p\ge 0}{=} \binom{p+n-1}{n-1}, \end{aligned}$$

stimmt für alle $p \ge 0$ mit dem Polynom

$$\binom{T+n-1}{n-1}$$

überein (vgl. Beispiel 4.1.14; wir identifizieren hier Polynome mit polynomialen Funktionen, was nach Aufgabe 2.2.9 erlaubt ist; das angegebene Polynom entsteht aus $\binom{T}{n-1}$ durch die Substitution $T \mapsto T+n-1$). Analog stimmt die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \\ &p \mapsto \dim(\bigoplus_{i\le p} \mathsf{k}[X_1,\dots,X_n]^i) \overset{\text{falls } p\ge 0}{=} \binom{p+n}{n}, \end{aligned}$$

für alle $p \ge 0$ mit dem Polynom

$$\binom{T+n}{n}$$

überein. Die Beobachtung, dass diese Dimensionsfunktionen für natürliche Zahlen p durch Polynome gegeben werden, führt zur Definition des Hilbertpolynomes (siehe Satz 4.3.2).

[36] Wir könnten dieselbe Definition für Polynome $Q \in \mathsf{k}[T]$ verwenden, und alle Resultate dieses Abschnitts 4.2 gelten analog für $\mathsf{k}[T]$ statt $\mathbb{Q}[T]$.

Definition 4.2.5. Gegeben ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[T]$ heißt

$$(\Delta Q)(T) := Q(T+1) - Q(1) \in \mathbb{Q}[T]$$

sein **Differenzpolynom**.

Aufgabe 4.2.6 (Pascalsches Dreieck)**.** Für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt

$$\binom{T+1}{m} = \binom{T}{m} + \binom{T}{m-1} \quad \text{oder äquivalent} \quad \Delta\binom{T}{m} = \binom{T}{m-1}. \tag{4.2.1}$$

Konvention 4.2.7. Sagen wir, dass eine von $p \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage für alle $p \gg 0$ gilt, so bedeutet dies, dass die Aussage für alle hinreichend großen p gilt, dass es also ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Aussage für alle $p \geq N$ gilt.

Satz 4.2.8 (laut Wikipedia [Pól15])**.** [37] *Die Menge der ganzwertigen Polynome ist ein Unterring von $\mathbb{Q}[T]$, der als $\mathbb{Z}$-Modul (= abelsche Gruppe) frei ist mit Basis $\binom{T}{m}$, für $m \in \mathbb{N}$, d. h.*

$$\{\textit{ganzwertige Polynome}\} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}\binom{T}{m}.$$

Ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[T]$ ist genau dann ganzwertig, wenn $Q(p) \in \mathbb{Z}$ für alle $p \gg 0$ gilt.

Beweis. Sei G die Menge der ganzwertigen Polynome. Es ist klar, dass G ein Unterring von $\mathbb{Q}[T]$ ist. Nach Beispiel 4.2.3 gilt $\binom{T}{m} \in G$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\binom{T}{m} = \frac{1}{m!}T^m + (\text{Polynom vom Grad} < m)$$

ist klar, dass die Polynome $\binom{T}{m}$, für $m \in \mathbb{N}$, eine Basis von $\mathbb{Q}[T]$ als Vektorraum bilden. Insbesondere sind sie linear unabhängig über $\mathbb{Z}$.

Sei $Q \in \mathbb{Q}[T]$ ein Polynom mit $Q(p) \in \mathbb{Z}$ für alle $p \gg 0$. Zu zeigen ist $Q \in \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}\binom{T}{m}$, denn dann ist Q ganzwertig und jedes ganzwertige Polynom ist $\mathbb{Z}$-Linearkombination der $\binom{T}{m}$.

Wir beweisen dies per Induktion über $\deg(Q)$. Für $\deg(Q) \leq 0$ ist die Aussage trivial. Sei $m := \deg(Q) > 0$. Schreibe

$$Q(T) = a_m\binom{T}{m} + a_{m-1}\binom{T}{m-1} + \cdots + a_2\binom{T}{2} + a_1T + a_0$$

für eindeutige $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$. Zu zeigen ist $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$.

Betrachte das Differenzpolynom

$$\begin{aligned} \Delta Q &= a_m\Delta\binom{T}{m} + a_{m-1}\Delta\binom{T}{m-1} + \cdots + a_2\Delta\binom{T}{2} + a_1\Delta T + a_0\Delta 1 \\ \text{(Pascal, (4.2.1))} \quad &= a_m\binom{T}{m-1} + a_{m-1}\binom{T}{m-2} + \cdots + a_2\binom{T}{1} + a_1. \end{aligned}$$

Es hat Grad $m-1$, und für alle $p \gg 0$ gilt $(\Delta Q)(p) = \Delta(p+1) - \Delta(p) \in \mathbb{Z}$. Per Induktionsannahme folgt $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$. Durch Auswerten von Q bei einer genügend großen ganzen Zahl folgt daraus sofort $a_0 \in \mathbb{Z}$ wie gewünscht. $\square$

[37] Strenggenommen brauchen wir diesen Satz nicht in der Vorlesung. Er ist aber zu schön, um weggelassen zu werden.

4.2.9. Ist $Q(T) = a_d T^d + \dots a_0 \in \mathbb{Q}[T]$ ein Polynom vom Grad $d > 0$, so ist

$$\begin{aligned}(\Delta Q)(T) &:= Q(T+1) - Q(T)\\ &= a_d(T+1)^d + a_{d-1}(T+1)^{d-1} + \dots + a_1(T+1) + a_0\\ &\quad - a_d T^d - a_{d-1}T^{d-1} - \dots - a_1 T - a_0\\ &= d a_d T^{d-1} + (\text{Polynom vom Grad} \leq d-2)\end{aligned}$$

ein Polynom vom Grad $d-1$ mit Leitkoeffizient $da_d \neq 0$. Das Differenzpolynom eines Polynoms vom Grad ≤ 0 ist Null. Die Aussage des folgenden Lemma 4.2.10 zeigt eine Art Umkehrung.

Lemma 4.2.10. *Sei $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei $F\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ eine Abbildung von Mengen, deren* ***Differenzfunktion***

$$\begin{aligned}\Delta F\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q},\\ p &\mapsto F(p+1) - F(p),\end{aligned}$$

für $p \gg 0$ polynomial vom Grad $d-1$ mit Leitkoeffizient $b \neq 0$ ist[38]*. Dann ist F für $p \gg 0$ polynomial vom Grad d mit Leitkoeffizient $\frac{b}{d}$.*

Beweis. Sei $Q = bT^{d-1} + \dots \in \mathbb{Q}[T]$ mit $(\Delta F)(p) = Q(p)$ für alle $p \geq N$, für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$. Es ist klar (z. B. nach (dem Beweis von) Satz 4.2.8), dass die Polynome $\binom{T}{m}$, für $0 \leq m \leq d-1$, eine $\mathbb{Q}$-Basis des Vektorraums aller Polynome vom Grad $\leq d-1$ bilden. Schreibe

$$Q = c_{d-1}\binom{T}{d-1} + \dots + c_0\binom{T}{0}$$

mit $c_i \in \mathbb{Q}$. Beachte $b = \frac{c_{d-1}}{(d-1)!}$. Definiere

$$\widehat{Q} := c_{d-1}\binom{T}{d} + \dots + c_0\binom{T}{1}.$$

Nach Pascal (4.2.1) gilt

$$\Delta(\widehat{Q}) = c_{d-1}\Delta\binom{T}{d} + \dots + c_0\Delta\binom{T}{1} = c_{d-1}\binom{T}{d-1} + \dots + c_0\binom{T}{0} = Q.$$

Für alle $p \geq N$ folgt somit[39]

$$(\Delta(F - \widehat{Q}))(p) = (\Delta F)(p) - (\Delta\widehat{Q})(p) = (\Delta F)(p) - Q(p) = 0.$$

Die Funktion $F - \widehat{Q}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ist also konstant auf $[N, \infty)$. Für alle $p \geq N$ gilt also

$$F(p) - \widehat{Q}(p) = F(N) - \widehat{Q}(N) =: a$$

bzw.

$$F(p) = \widehat{Q}(p) + a = (\widehat{Q} + a)(p).$$

[38] Dies bedeutet per definitionem, dass es ein Polynom $Q[T] \in \mathbb{Q}[T]$ vom angegebenen Grad und mit angegebenem Leitkoeffizient gibt, so dass $(\Delta F)(p) = Q(p)$ für alle $p \gg 0$ gilt. Ein solches Polynom ist eindeutig, wie sofort aus Aufgabe 2.2.9 folgt.

[39] Implizit verwendet das die Trivialität, dass die zum Differenzpolynom assoziierte polynomiale Funktion die Differenzfunktion der assoziierten polynomialen Funktion ist.

Das Polynom $\widehat{Q}+a \in \mathbb{Q}[T]$ hat Grad d und Leitkoeffizient $\frac{c_{d-1}}{d!} = \frac{1}{d}\frac{c_{d-1}}{(d-1)!} = \frac{b}{d}$. Dies zeigt das Lemma. $\square$

4.3. **Hilbert-Polynom.**

Definition 4.3.1. Ist $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} M^p$ ein graduierter Modul über einem graduierten Ring, so sei $M^{\leq p} := \bigoplus_{i\leq p} M^i$ für $p \in \mathbb{Z}$.

Satz 4.3.2. *$A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ ein kommutativer graduierter Ring. Sei A^0 ein noetherscher Ring und sei A als A^0-Algebra von endlich vielen homogenen Elementen $x_1, \ldots, x_s \in A^1$ vom Grad Eins erzeugt. Sei $\lambda\colon \operatorname{mod}(A^0) \to \mathbb{Z}$ additiv.*

Dann gibt es für jedes $M \in \operatorname{grmod}(A)$ eindeutig bestimmte Polynome $H_M = H_{M,\lambda} \in \mathbb{Q}[T]$ und $Q_M = Q_{M,\lambda} \in \mathbb{Q}[T]$, mit

$$H_M(p) = \lambda(M^{\leq p}) \quad \textit{und} \quad Q_M(p) = \lambda(M^p)$$

*für alle $p \gg 0$; das Polynom H_M heißt **Hilbert-Polynom von** M **(bezüglich** λ**)**.[40] Für die Grade dieser Polynome gilt*

$$\deg(H_M) \leq s \quad \textit{und} \quad \deg(Q_M) \leq s-1.$$

Beweis. Da A von homogenen Elementen von positivem Grad erzeugt ist, ist die Graduierung auf A nicht-negativ. Außerdem ist A nach Lemma 4.1.1 noethersch und erfüllt somit Annahme 4.1.2. Dies hat zur Folge, dass alle M^p und $M^{\leq p}$ als A^0-Moduln endlich erzeugt sind (siehe Lemma 4.1.5). Die Eindeutigkeit der Polynome H_M und Q_M ist klar, denn ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist eindeutig durch seine Werte an unendlich vielen natürlichen Zahlen bestimmt. Wir zeigen nun die Existenz dieser Polynome.

Nach Satz 4.1.19 und der Annahme, dass A als A^0-Algebra von s homogenen Elementen vom Grad Eins erzeugt ist, gilt

$$P_M(T) = \frac{f(T)}{(1-T)^s}$$

für ein $f \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$. Gilt $f = 0$, also $P_M(T) = 0$, so folgt $\lambda(M^p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, und die beiden gesuchten Polynome sind jeweils das Nullpolynom vom Grad $-\infty \leq s-1 \leq s$.

Gelte also $f \neq 0$. Dann gibt es eindeutige $e \in \mathbb{N}$ und $g(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ mit $g(1) \neq 0$ und $f = (1-T)^e g$.[41] (Es ist e die Nullstellenordnung von f bei 1.) Setzen wir $d := s - e$, so gilt

$$P_M(T) = \frac{f(T)}{(1-T)^s} = \frac{g(T)}{(1-T)^{s-e}} = \frac{g(T)}{(1-T)^d}.$$

Wegen $g(1) \neq 0$ ist d die Polstellenordnung von $P_M(T)$ bei 1.

Im Fall $d \leq 0$ gilt $P_M(T) = g(T)(1-T)^{-d} \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$. Es folgt $\lambda(M^p) = 0$ für alle $p \gg 0$, und $\lambda(M^{\leq p})$ nimmt für alle $p \gg 0$ denselben ganzzahligen Wert $P_M(1)$ an. Also ist Q_M das Nullpolynom vom Grad $-\infty \leq s-1$, und es gilt $H_M = P_M(1)$ ist ein konstantes Polynom vom Grad $\leq 0 \leq s$.

[40] In manchen Quellen wird Q_M als Hilbert-Polynom bezeichnet.

[41] Indem man f mit einer geeigneten Potenz von T multipliziert, kann man oBdA $f \in \mathbb{Z}[T]$ annehmen. Gilt $f(1) \neq 0$, so sind wir fertig. Sonst ist f durch $1-T$ teilbar (Polynomdivision durch $T-1$), und wir können mit dem verbleibenden Faktor analog fortfahren und von ihm den Faktor $1-T$ abspalten, falls er bei 1 eine Nullstelle hat.

Gelte $d > 0$. Per Definition ist $\lambda(M^p)$ der Koeffizient von $P_M(T) = \frac{g(T)}{(1-T)^d}$ bei T^p. Schreiben wir $g = \sum_{\ell=-N}^{N} a_\ell T^\ell$, mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_\ell \in \mathbb{Z}$, und verwenden

$$\frac{1}{(1-T)^d} = \sum_{q\in\mathbb{N}} \binom{q+d-1}{d-1} T^q$$

(vgl. (4.1.1)), so können wir diesen Koeffizienten wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \lambda(M^p) &= \sum_{\substack{\ell\in\{-N,,\dots,N\},\\ q\in\mathbb{N},\\ \ell+q=p}} a_\ell \binom{q+d-1}{d-1} \\ \text{(falls } p \geq N) \quad &= \sum_{\ell=-N}^{N} a_\ell \binom{p-\ell+d-1}{d-1}. \end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom Q_M ist also $Q_M = \sum_{\ell=-N}^{N} a_\ell \binom{T-\ell+d-1}{d-1}$. Sicherlich gilt $\deg(Q_M) \leq d-1 = s-e-1 \leq s-1$. Da der Koeffizient von Q_M bei T^{d-1}

$$\sum_{\ell=-N}^{N} a_\ell \frac{1}{(d-1)!} = \frac{g(1)}{(d-1)!} \neq 0$$

ist, ist dies der Leitkoeffizient von Q_M und es gilt $\deg(Q_M) = d-1$.

Betrachte die Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ p &\mapsto \lambda(M^{\leq p-1}). \end{aligned}$$

Wegen der Additivität von λ gilt

$$(\Delta F)(p) = \lambda(M^p) = Q_M(p)$$

für $p \gg 0$ ist ΔF für $p \gg 0$ polynomial vom Grad $\deg(Q_M) = d-1$ mit Leitkoeffizient $\frac{g(1)}{(d-1)!}$. Dies hat nach Lemma 4.2.10 zur Folge, dass F für $p \gg 0$ polynomial vom Grad d mit Leitkoeffizient $\frac{g(1)}{d!}$ ist. Dieselbe Aussage gilt dann auch für $p \mapsto F(p+1) = \lambda(M^{\leq p})$. Dies liefert die Existenz des Hilbert-Polynoms H_M. Es gilt $\deg(H_M) = d = s-e \leq s$. □

Korollar 4.3.3 (Zusammenhang zwischen Hilbert-Poincaré-Reihe und Hilbert-Polynom)**.** *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.3.2. Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

- $Q_M = 0$;
- $\lambda(M^p) = 0$ *für alle* $p \gg 0$;
- $P_M(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$;
- H_M *ist konstant (und hat den Wert* $P_M(1) \in \mathbb{Z}$*)*

Treffen diese Aussagen nicht zu, so gibt es eindeutige Elemente $d \in \mathbb{N}_{>0}$ *und* $g(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ *mit* $g(1) \neq 0$*, so dass* $P_M(T) = \frac{g(T)}{(1-T)^d}$ *gilt; insbesondere ist* d *die* Polstellenordnung *von*

$P_M(T)$ bei 1. Es gelten dann

$$\deg(H_M) = d, \qquad \deg(Q_M) = d-1,$$

$$(\textit{Leitkoeffizient von } H_M) = \frac{g(1)}{d!}, \qquad (\textit{Leitkoeffizient von } Q_M) = \frac{g(1)}{(d-1)!}$$

und $H_M \in \mathbb{Z}[\frac{1}{d!}, T]$ und $Q_M \in \mathbb{Z}[\frac{1}{(d-1)!}, T]$.

Beweis. Die Äquivalenz der vier Aussagen ist offensichtlich. Ebenso ist die Behauptung $H_M = P_M(1)$ klar, falls $P_M(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ gilt.

Gelte $Q_M \neq 0$. Da H_M bzw. Q_M ganzwertige Polynome vom Grad d bzw. $d-1$ sind, folgen die Behauptungen $H_M \in \mathbb{Z}[\frac{1}{d!}, T]$ und $Q_M \in \mathbb{Z}[\frac{1}{(d-1)!}, T]$ aus Satz 4.2.8.[42] Alle anderen Behauptungen wurden im Beweis von Satz 4.3.2 gezeigt (wegen $Q_M \neq 0$ sind wir dort im Fall $d > 0$). □

Ende der 10. Vorlesung am 7.11.2018.

Beispiel 4.3.4. Für $A = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ und $\lambda = \dim$ gelten $Q_A = \binom{T+n-1}{n-1}$ und $H_A = \binom{T+n}{n}$ (siehe Beispiel 4.2.4).

Aufgabe 4.3.5. Überlege Dir, dass Satz 4.3.2 im Allgemeinen falsch ist, wenn man nicht verlangt, dass die homogenen Erzeuger $x_1, \ldots, x_s$ in A^1 liegen.

Hinweis: $\mathsf{k}[X]$ mit X homogen vom Grad 2.

4.4. **Dimension und Multiplizität für Moduln über filtrierten Ringen.**

4.4.1. Wir skizzieren das Ziel dieses Abschnitts. Sei D ein filtrierter Ring, dessen Filtrierung gewisse Annahmen erfüllt (diese Annahmen sind sowohl für die Bernstein- als auch für die Ordnungsfiltrierung der Weyl-Algebra $D(n)$ erfüllt). Sei M ein (unfiltrierter) endlich erzeugten Modul über D. Dann ordnen wir M zwei Zahlen zu, nämlich seine *Dimension* und seine *Multiplizität*. Diese Zahlen messen die Größe von M. Für Moduln über der Weyl-Algebra führen sie zum wichtigen Begriff der *Holonomie*.

Annahme 4.4.2. Bis zum Ende von Abschnitt 4.4 sei (D, FD) ein Ring mit einer nicht-negativen, ausschöpfenden (aufsteigenden) Filtrierung. Zusätzlich verlangen wir die folgenden drei Bedingungen:

(D1) $[F_pD, F_qD] \subset F_{p+q-1}D$.

Dies stellt sicher, dass $\operatorname{gr} D$ ein kommutativer Ring ist. Genauer ist $\operatorname{gr} D$ auf Grund unserer bisherigen Annahmen ein kommutativer, nicht-negativ graduierter Ring. Insbesondere ist $F_0D = \operatorname{gr}^0 D$ ein kommutativer Ring.

(D2) $\operatorname{gr} D$ ist ein noetherscher Ring.

Damit genügt $\operatorname{gr} D$ allen Anforderungen in Annahme 4.1.2. Insbesondere ist $F_0D = \operatorname{gr}^0 D$ ein noetherscher kommutativer Ring, über dem $\operatorname{gr} D$ als Algebra endlich erzeugt ist (siehe Lemma 4.1.1).

(D3) $\operatorname{gr}^1 D$ erzeugt $\operatorname{gr} D$ als $\operatorname{gr}^0 D$-Algebra.

[42] Alternativ kann man sie auch durch Inspektion der Beweise von Satz 4.2.8 und Lemma 4.2.10 einsehen.

Genauer ist $\operatorname{gr} D$ als $\operatorname{gr}^0 D$-Algebra von endlich vielen Elementen von $\operatorname{gr}^1 D$ erzeugt, denn nach Lemma 4.1.5 ist $\operatorname{gr}^1 D$ als $\operatorname{gr}^0 D$-Modul endlich erzeugt. Dies stellt sicher, dass Satz 4.3.2 auf $\operatorname{gr} D$ anwendbar ist: Jeder endlich erzeugte graduierte $\operatorname{gr} D$-Modul M hat ein Hilbert-Polynom H_M (das von der Wahl einer additiven Funktion $\lambda\colon \operatorname{mod}(F_0 D) \to \mathbb{Z}$ abhängt).

Beispiel 4.4.3. Die Weyl-Algebra mit der Bernstein-Filtrierung oder mit der Ordnungsfiltrierung (:= Filtrierung durch die Ordnung eines Differentialoperators) erfüllt alle Bedingungen in Annahme 4.4.2. Für die Bernstein-Filtrierung folgt dies aus den Sätzen 2.5.9 und 2.5.19. Für die Ordnungsfiltrierung folgt dies aus den Sätzen 3.1.16 und 3.2.4.

Beispiel 4.4.4. Die Polynomalgebra $A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ mit der Grad-Filtrierung

$$F_p A := A^{\leq p} := \{Q \in A \mid \deg(Q) \leq p\}$$

(wobei $\deg(X_i) = 1$ für alle i) erfüllt alle Bedingungen in Annahme 4.4.2: Bedingung (D1) ist trivial, da A kommutativ ist. Weil die Grad-Filtrierung zu der Standard-Graduierung auf A assoziiert ist, gilt $\operatorname{gr} A = A$ (siehe Bemerkung 2.5.18), so dass die beiden restlichen Bedingungen (D2) und (D3) ebenfalls offensichtlich sind.

Lemma 4.4.5. *Für alle $p \in \mathbb{N}$ gelten*

$$\operatorname{gr}^{p+1} D = \operatorname{gr}^1 D \cdot \operatorname{gr}^p D. \tag{4.4.1}$$

und

$$F_{p+1} D = F_1 D \cdot F_p D. \tag{4.4.2}$$

Insbesondere gelten $\operatorname{gr}^{p+1} D = \operatorname{gr}^1 D \cdots \operatorname{gr}^1 D$ und $F_{p+1} D = F_1 D \cdots F_1 D$ (jeweils $p+1$ Faktoren) und $\operatorname{gr}^{p+q} D = \operatorname{gr}^p D \cdot \operatorname{gr}^q D$ und $F_{p+q} D = F_p D \cdot F_q D$ für alle $p, q \in \mathbb{N}$.

Beweis. Der folgende Beweis verwendet nur, dass D ein filtrierter Ring ist, der (D3) erfüllt. Die Gleichheit 4.4.1 folgt sofort aus (D3).

Nun zu (4.4.2). Die Inklusion $\supset$ folgt aus den Bedingungen an eine Ringfiltrierung. Die Inklusion $\subset$ beweist man per Induktion, wobei der Fall $p = 0$ wegen $1 \in F_0 D$ trivial ist. Gelte $p > 0$. Sei $T \in F_{p+1} D$. Nach (4.4.1) gibt es $S \in F_1 D$ und $S' \in F_p D$ mit $\overline{T} = \overline{S} \cdot \overline{S'} = \overline{S \cdot S'}$ in $\operatorname{gr}^{p+1} D$, also $T - SS' \in F_p D \subset F_1 D \cdot F_{p-1} D$ unter Verwendung der Induktionsannahme. Es folgt $T \in SS' + F_1 D \cdot F_{p-1} D \subset F_1 D \cdot F_p D$.

Die restlichen Behauptungen folgen sofort. □

Bemerkung 4.4.6. Nach Lemma 4.4.5 ist D als (nicht notwendig kommutative) Algebra über dem (kommutativen) Ring $F_0 D = \operatorname{gr}^0 D$ von $F_1 D$ erzeugt. Genauer reichen endlich viele Elemente von $F_1 D$ als Erzeuger, denn $\operatorname{gr}^1 D$ und somit $F_1 D$ sind als F_0-Moduln endlich erzeugt. In anderen Worten ist also D ein Quotient einer freien $F_0 D$-Algebra $F_0 D\langle x_1, \dots, x_\ell\rangle$, für ein geeignetes $\ell \in \mathbb{N}$. Ist D kommutativ, so ist D ein Quotient von einem $F_0 D[X_1, \dots, X_\ell]$.

Lemma 4.4.7. *D ist ein noetherscher Ring.*

Beweis. Lemma 2.6.17 zeigt sofort, dass D linksnoethersch ist. Da Lemma 2.6.17 analog auch für filtrierte Rechtsmoduln gilt, ist D auch rechtsnoethersch. Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren: Betrache D^{op} mit derselben Filtrierung $F_p D^{\mathrm{op}} = F_p D$. Sie erfüllt $[F_p D^{\mathrm{op}}, F_q D^{\mathrm{op}}] \subset F_{p+q-1} D^{\mathrm{op}}$. Die Identität $\operatorname{gr} D \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}(D^{\mathrm{op}})$, $\overline{S} \mapsto \overline{S^{\mathrm{op}}}$, ist trivialerweise ein Isomorphismus von graduierten abelschen Gruppen; da $\operatorname{gr} D$ kommutativ ist, ist sie ein Isomorphismus von graduierten Ringen (denn $\overline{T} \cdot \overline{S} = \overline{S} \cdot \overline{T} = \overline{ST} \mapsto \overline{(ST)^{\mathrm{op}}} = \overline{T^{\mathrm{op}} \cdot^{\mathrm{op}} S^{\mathrm{op}}} =$

$\overline{T^{\mathrm{op}}} \cdot \overline{S^{\mathrm{op}}}$). Insbesondere ist $\mathrm{gr}(D^{\mathrm{op}})$ noethersch und als $\mathrm{gr}^0 D^{\mathrm{op}}$-Algebra erzeugt von $\mathrm{gr}^1(D^{\mathrm{op}})$. (Es gilt $F_0 D = \mathrm{gr}^0 D = \mathrm{gr}^0(D^{\mathrm{op}}) = F_0 D^{\mathrm{op}}$.) Insbesondere erfüllt der filtrierte Ring D^{op} alle in Annahme 4.4.2 augelisteten Bedingungen. Wie oben folgern wir, dass D^{op} linksnoethersch ist. Dies bedeutet, dass D rechtsnoethersch ist. □

4.4.8. Insbesondere ist ein D-Modul genau dann endlich erzeugt, wenn er noethersch ist.

Definition 4.4.9. Sei M ein D-Modul. Eine Filtrierung FM auf M heißt

(a) **stabil**, falls es ein $q_0 \in \mathbb{Z}$ mit $F_p D.F_q M = F_{p+q} M$ für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $q \geq q_0$ gibt.[43]

(b) **gut**, falls sie stabil, ausschöpfend und bei Null beginnend ist, und falls alle $F_p M$ als $F_0 D$-Moduln endlich erzeugt sind.

Lemma 4.4.10. *Sei M ein D-Modul. Eine ausschöpfende hausdorffsche Filtrierung FM auf M ist genau dann gut, wenn der* $\mathrm{gr}\, D$*-Modul* $\mathrm{gr}\, M$ *endlich erzeugt ist.*

Beweis. Sei FM gut. Da FM stabil ist, gibt es ein $q_0 \in \mathbb{Z}$ mit $F_p D \cdot F_{q_0} M = F_{p+q_0} M$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\mathrm{gr}^p D \cdot \mathrm{gr}^{q_0} M = \mathrm{gr}^{p+q_0} M$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathrm{gr}\, M$ als $\mathrm{gr}\, D$-Modul von $\bigoplus_{i \leq q_0} \mathrm{gr}^i M$ erzeugt. Da alle $F_i M$ als $F_0 D$-Moduln endlich erzeugt sind, sind alle $\mathrm{gr}^i M$ als $\mathrm{gr}^0 D$-Moduln endlich erzeugt. Da FM bei Null beginnend ist, ist $\bigoplus_{i \leq q_0} \mathrm{gr}^i M$ endlich erzeugt als $\mathrm{gr}^0 D$-Modul. Daraus folgt, dass $\mathrm{gr}\, M$ als $\mathrm{gr}\, D$-Modul endlich erzeugt ist.

Sei umgekehrt $\mathrm{gr}\, M$ als $\mathrm{gr}\, D$-Modul endlich erzeugt. Nach Lemma 4.1.5 sind alle $\mathrm{gr}^p M$ endlich erzeugte $\mathrm{gr}^0 D$-Moduln, und es gilt $\mathrm{gr}^p M = 0$ für alle genügend kleinen $p \in \mathbb{Z}$. Dies bedeutet $F_{p-1} M = F_p M$ für alle genügend kleinen $p \in \mathbb{Z}$. Da FM hausdorffsch ist, folgt $F_p M = 0$ für genügend kleines n, d. h. FM ist bei Null beginnend. Insbesondere gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$, so dass $F_p M$ als $F_0 D$-Modul endlich erzeugt ist. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \to F_p M \to F_{p+1} M \to \mathrm{gr}^{p+1} M \to 0$$

zusammen mit dem Wissen, dass $\mathrm{gr}^{p+1} M$ als Modul über $F_0 D = \mathrm{gr}^0 D$ endlich erzeugt ist, zeigt, dass $F_{p+1} M$ als $F_0 D$-Modul endlich erzeugt ist. Per Induktion sehen wir, dass alle $F_p M$ endlich erzeute $F_0 D$-Moduln sind.

Es bleibt zu zeigen, dass FM stabil ist. Sei $q_0 \in \mathbb{Z}$ so, dass $\mathrm{gr}\, M$ von $\bigoplus_{i \leq q_0} \mathrm{gr}^i M$ als $\mathrm{gr}\, D$-Modul erzeugt. Für alle $q \geq q_0$ folgt

$$\mathrm{gr}^{q+1} M = \sum_{i \leq q_0} \mathrm{gr}^{q+1-i} D. \mathrm{gr}^i M = \sum_{i \leq q_0} \mathrm{gr}^1 D \cdot \mathrm{gr}^{q-i} D. \mathrm{gr}^i M \subset \mathrm{gr}^1 D \cdot \mathrm{gr}^q M \subset \mathrm{gr}^{q+1} M$$

mit Lemma 4.4.5 (wobei man beachte, dass $q - i \geq q - q_0 \geq 0$ gilt), also $\mathrm{gr}^{q+1} M = \mathrm{gr}^1 D \cdot \mathrm{gr}^q M$. Dies impliziert

$$F_{1+q} M = F_1 D.F_q M + F_q M = F_1 D.F_q M + F_0 D \cdot F_q M = F_1 D.F_q M.$$

Diese Gleichheit, ihr Pendant für $q + 1 \geq q_0$ und Lemma 4.4.5 zeigen

$$F_{2+q} M = F_{1+(1+q)} M = F_1 D.F_{1+q} M = F_1 D \cdot F_1 D.F_q M = F_2 D.F_q M.$$

Per Induktion erhalten wir

$$F_{p+q} M = F_p D.F_q M$$

für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $q \geq q_0$. Dies zeigt, dass FM stabil ist. □

[43] Äquivalent ist die folgende Bedingung: Es gibt ein $q_0 \in \mathbb{Z}$ mit $F_p D.F_{q_0} M = F_{p+q_0} M$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Dies folgt leicht aus Lemma 4.4.5. Also bestimmt $F_{q_0} M$ alle Folgeglieder der Filtrierung.

4.4.11. Da $\operatorname{gr} D$ laut Annahme (D2) noethersch ist, ist die Filtrierung FD auf D gut, nach Lemma 4.4.10.[44]

Lemma 4.4.12. *Ein D-Modul besitzt genau dann eine gute Filtrierung, wenn er endlich erzeugt ist.*

Beweis. Sei FM eine gute Filtrierung auf M. Dann ist $\operatorname{gr} M$ nach Lemma 4.4.10 endlich erzeugt als $\operatorname{gr} D$-Modul. Nach Lemma 2.6.17 ist dann M endlich erzeugt als D-Modul.

Sei umgekehrt M als D-Modul endlich erzeugt. Seien $m_1, \dots m_t \in M$ Erzeuger von M als D-Modul und sei $U := \sum_{i=1}^{t} F_0 D.m_i$. Setze

$$F_p M := F_p D.U = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < 0, \\ F_p D.U & \text{falls } p \geq 0. \end{cases}$$

Dann ist $FM := (F_p M)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Filtrierung von M als D-Modul. Sie beginnt bei Null und ist ausschöpfend, da die $m_1, \dots, m_t$ Erzeuger sind und FD ausschöpfend ist. Sie ist stabil, denn für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $q \geq 0$ gilt mit Lemma 4.4.5

$$F_p D.F_q M = F_p D \cdot F_q D.U = F_{p+q} D.U = F_{p+q} M.$$

Außerdem sind alle $F_p M = F_p D.U = \sum F_p D.m_i$ endlich erzeugte $F_0 D$-Moduln, denn $F_p D$ ist endlich erzeugt als $F_0 D$-Modul nach 4.4.11. Dies zeigt, dass FM gut ist. □

Definition 4.4.13. Seien FM und $F'M$ zwei Filtrierungen auf einem D-Modul. Dann heißt FM **feiner** als $F'M$, falls es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $F_p M \subset F'_{p+\ell} M$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gibt. Wir nennen FM und $F'M$ **äquivalent**[45], falls sowohl FM feiner als $F'M$ als auch $F'M$ feiner als FM ist.

Lemma 4.4.14. *Sei FM eine gute Filtrierung auf einem (nach Lemma 4.4.12 automatisch endlich erzeugten) D-Modul M. Dann ist FM feiner als jede ausschöpfende Filtrierung auf M. Insbesondere sind alle guten Filtrierungen auf einem endlich erzeugten D-Modul äquivalent.*

Beweis. Sei $q_0 \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so dass $F_p D \cdot F_{q_0} M = F_{p+q_0} M$ für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt (man beachte, dass q_0 ohne Einschränkung in $\mathbb{N}$ gewählt ist). Wähle $q \in \mathbb{Z}$ mit $F_q M = 0$. Sei $F'M$ eine ausschöpfende Filtrierung auf M. Da $F_{q_0} M$ als $F_0 D$-Modul endlich erzeugt ist, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $F_{q_0} M \subset F'_p M$. Setze $\ell := p + |q| \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $F_t M \subset F'_{t+\ell} M$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Für $t \leq q$ gilt

$$F_t M = 0 \subset F'_{t+\ell} M.$$

Für t mit $q < t < q_0$ gilt $-|q| \leq q < t$ und somit $p = \ell - |q| < \ell + t$ und somit

$$F_t M \subset F_{q_0} M \subset F'_p M \subset F'_{t+\ell} M.$$

[44] Man kann sich dies natürlich auch direkt überlegen: Dass die Filtrierung ausschöpfend und bei Null beginnend ist, ist trivial. Ebenso ist Stabilität trivial wegen $F_p D F_0 D = F_p D$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und der in der Definition der Stabilität in der Fussnote gegebenen äquivalenten Definition. Um zu sehen, dass alle $F_p D$ endlich erzeugte $F_0 D$-Moduln sind, muss man im Wesentlichen wie im Beweis von Lemma 4.4.10 argumentieren.

[45] Diese Relation ist per Definition reflexiv und symmetrisch, und offensichtlich auch transitiv, also eine Äquivalenzrelation; dies rechtfertigt die Sprechweise.

Für $t \geq q_0$ gilt $0 \leq t - q_0 \leq t$ (da $q_0 \geq 0$) und somit

$$F_t M = F_{t-q_0} D.F_{q_0} M \subset F_{t-q_0} D.F'_p M \subset F_t D.F'_p M \subset F'_{t+p} M \subset F'_{t+\ell} M.$$

□

Ende der 11. Vorlesung am 12.11.2018.

Annahme 4.4.15. Bis zum Ende von Abschnitt 4.4 sei $\lambda\colon \operatorname{mod}(F_0 D) \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion, die nur Werte in $\mathbb{N}$ annimmt.

Satz 4.4.16. *Sei M ein endlich erzeugter D-Modul. Sei FM eine gute Filtrierung auf M. Sei $H_{\operatorname{gr}_F M} = H_{\operatorname{gr}_F M, \lambda} \in \mathbb{Q}[T]$ das Hilbert-Polynom des (nach Lemma 4.4.10) endlich erzeugten $\operatorname{gr} D$-Modul $\operatorname{gr}_F M$ (die Existenz des Hilbert-Polynoms folgt wegen unserer Annahme 4.4.2 (wie dort erklärt) aus Satz 4.3.2). Dann gilt*

$$H_{\operatorname{gr}_F M}(p) = \lambda(F_p M)$$

für alle $p \gg 0$. Ist $F'M$ eine weitere gute Filtrierung auf M, so haben $H_{\operatorname{gr}_F M}$ und $H_{\operatorname{gr}_{F'} M}$ denselben Grad und denselben Leitkoeffizienten[46].

Beweis. Laut Definition des Hilbert-Polynoms gilt $H_{\operatorname{gr}_F M}(p) = \lambda(\operatorname{gr}^{\leq p} M)$ für alle $p \gg 0$. Zu zeigen ist also $\lambda(\operatorname{gr}^{\leq p} M) = \lambda(F_p M)$ für alle $p \gg 0$. Diese Gleichheit gilt sogar für alle $p \in \mathbb{Z}$. Für alle $p \ll 0$ ist das klar, denn FM ist bei Null beginnend. Gelte $\lambda(\operatorname{gr}^{\leq p} M) = \lambda(F_p M)$ für ein $p \in \mathbb{Z}$. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \to F_p M \hookrightarrow F_{p+1} M \twoheadrightarrow \operatorname{gr}^{p+1} M \to 0$$

liefert per Additivität von λ

$$\lambda(F_{p+1} M) = \lambda(F_p M) + \lambda(\operatorname{gr}^{p+1} M) = \lambda(\operatorname{gr}^{\leq p} M) + \lambda(\operatorname{gr}^{p+1} M) = \lambda(\operatorname{gr}^{\leq p+1} M).$$

Sei $F'M$ eine weitere gute Filtrierung auf M. Nach Lemma 4.4.14 sind FM und $F'M$ äquivalent. Also gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$F_p M \subset F'_{p+\ell} M \subset F_{p+2\ell} M$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Weil λ nur nicht-negative Werte annimmt, folgt aus den kurzen exakten Sequenzen $F_p M \subset F'_{p+\ell} M \twoheadrightarrow \frac{F'_{p+\ell} M}{F_p M}$ und $F'_{p+\ell} M \subset F_{p+2\ell} M \twoheadrightarrow \frac{F_{p+2\ell} M}{F'_{p+\ell} M}$ die Abschätzung

$$\lambda(F_p M) \leq \lambda(F'_{p+\ell} M) \leq \lambda(F_{p+2\ell} M).$$

Dies liefert für $p \gg 0$

$$H_{\operatorname{gr}_F M}(p) = \lambda(F_p M) \leq \lambda(F'_{p+\ell} M) = H_{\operatorname{gr}_{F'} M}(p+\ell) \leq \lambda(F_{p+2\ell} M) = H_{\operatorname{gr}_F M}(p+2\ell).$$

Ist $H_{\operatorname{gr}_F M} = 0$, so folgt $H_{\operatorname{gr}_{F'} M} = 0$. Sonst müssen Grad und Leitkoeffizient von $H_{\operatorname{gr}_F M}$ und $H_{\operatorname{gr}_{F'} M} = 0$ übereinstimmen (nach Analysis I). □

Aufgabe 4.4.17. Zeige die Aussage im letzten Satz des obigen Beweises.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 4.4.23
(2) Aufgabe 4.4.27
(3) Aufgabe 4.4.28

[46] Wir verwenden die Konvention, dass das Nullpolynom Grad $-\infty$ und Leitkoeffizient 0 hat.

(4) Aufgabe 4.4.33
(5) Statt einer der obigen Aufgaben: Aufgabe 4.4.17

Definition 4.4.18. Sei M ein endlich erzeugter D-Modul. Sei FM eine gute Filtrierung auf M (Existenz nach Lemma 4.4.12). Die **Hilbert-Dimension** oder schlicht **Dimension** $d(M) = d_\lambda(M)$ **von** M **bezüglich** λ ist

$$d(M) := \deg(H_{\operatorname{gr}_F M}) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}.$$

Die **Hilbert-Multiplizität** oder schlicht **Multiplizität** $e(M) = e_\lambda(M)$ **von** M **bezüglich** λ ist

$$e(M) := d(M)! \cdot (\text{Leitkoeffizient von } H_{\operatorname{gr}_F M}) \in \mathbb{N}.$$

Man beachte: Dimension und Multiplizität hängen nicht von der Wahl der guten Filtrierung ab (nach Satz 4.4.16) und sind Elemente von $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ bzw. von $\mathbb{N}$ (wegen Korollar 4.3.3 oder Satz 4.2.8 und der Annahme, dass λ nur nicht-negative Werte annimmt).

4.4.19. Genau dann gilt $d(M) = -\infty$, wenn $e(M) = 0$ gilt (wegen unserer Konvention, dass das Nullpolynom Leitkoeffizient Null hat). Ein endlich erzeugter D-Modul M hat genau dann Hilbert-Dimension $-\infty$, wenn $\lambda(U) = 0$ für jeden endlich erzeugten F_0D-Untermodul U von M gilt.

In vielen Beispielen wird $F_0D = \mathsf{k}$ gelten und $\lambda = \dim$. In diesem Fall gilt also $d(M) = -\infty$ genau dann, wenn $M = 0$ gilt.

Beispiel 4.4.20. Der Nullmodul hat Dimension $-\infty$ und Multiplizität 0 (unabhängig von λ).

Beispiel 4.4.21. Betrachte die Polynomalgebra $A = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ mit der Gradfiltrierung FA, gegeben durch

$$F_pA = A^{\leq p} = \{Q \in A \mid \deg(Q) \leq p\},$$

(siehe Beispiel 4.4.4), und die additive Funktion $\dim\colon \operatorname{mod}(\mathsf{k}) = \operatorname{mod}(F_0A) \to \mathbb{N}$. Nach 4.4.11 ist FA eine gute Filtrierung auf A als A-Modul. Wegen $\operatorname{gr} A = A$ und Beispiel 4.3.4 gilt

$$H_{\operatorname{gr}_F A} = H_A = \binom{T+n}{n} = \frac{T^n}{n!} + (\mathbb{Q}\text{-Linearkombination kleinerer Potenzen von } T).$$

Wir erhalten Dimension $d(A) = n$ und Multiplizität $e(A) = 1$.

Beispiel 4.4.22. Wir betrachten die Weyl-Algebra $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung (siehe 4.4.3). Wegen $B_0D(n) = \mathsf{k}$ können wir die additive Funktion dim betrachten (dies ist ein Vorteil der Bernstein-Filtrierung gegenüber der Ordnungsfiltrierung). Wir betrachten $D(n)$ als $D(n)$-Modul, und verwenden als gute Filtrierung die Bernstein-Filtrierung (siehe 4.4.11). Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\dim B_pD(n) = \binom{p+2n}{2n},$$

denn die Elemente $X^\alpha \partial^\beta$, für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| + |\beta| \leq p$ bilden eine Basis von $B_pD(n)$ (man kann dies auch aus $\operatorname{gr}_B D(n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ (siehe Satz 2.5.19), wobei alle X_i und ξ_i Grad 1 haben, und Beispiel Beispiel 4.4.21 folgern). Nach Satz 4.4.16 muss also

$$H_{\operatorname{gr}_B D(n)} = \binom{T+2n}{2n} = \frac{1}{(2n)!}T^{2n} + (\text{Polynom in } T \text{ vom Grad} \leq 2n-1)$$

gelten und damit

$$d_B(D(n)) = d_{B,\dim}(D(n)) = 2n, \tag{4.4.3}$$

$$e_B(D(n)) = e_{B,\dim}(D(n)) = 1, \tag{4.4.4}$$

wobei wir mit dem Zusatzindex daran erinnern, dass wir die Bernstein-Filtrierung auf $D(n)$ betrachten.

Aufgabe 4.4.23. Betrachte die Weyl-Algebra $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung und den $D(n)$-Modul $\mathsf{k}[\underline{X}] = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gelten

$$d_{B,\dim}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = n, \tag{4.4.5}$$

$$e_{B,\dim}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = 1. \tag{4.4.6}$$

Lemma 4.4.24. *Sei*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von D-Moduln. Ist FM eine gute Filtrierung auf M, so sind die induzierten Filtrierungen auf M' und M'' ebenfalls gut.

Beweis. Nach Lemma 2.6.14 ist

$$0 \to \operatorname{gr} M' \to \operatorname{gr} M \to \operatorname{gr} M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz graduierter $\operatorname{gr} D$-Moduln. Nach Lemma 4.4.10 ist $\operatorname{gr} M$ endlich erzeugt als $\operatorname{gr} D$-Modul. Da $\operatorname{gr} D$ noethersch ist, sind $\operatorname{gr} M'$ und $\operatorname{gr} M''$ ebenfalls endlich erzeugt als $\operatorname{gr} D$-Moduln. Dies bedeutet aber wieder nach Lemma 4.4.10, dass die induzierten Filtrierungen gut sind. □

Aufgabe 4.4.25. Neunerlemma.

Lemma 4.4.26. *Ist*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz endlich erzeugter D-Moduln[47]*, so gelten*

$$d(M) = \max(d(M'), d(M''))$$

und

$$e(M) = \begin{cases} e(M') & \text{falls } d(M') > d(M''), \\ e(M'') & \text{falls } d(M') < d(M''), \\ e(M') + e(M'') & \text{falls } d(M') = d(M''). \end{cases}$$

Beweis. Sei FM eine gute Filtrierung auf M (Lemma 4.4.12). Die induzierten Filtrierungen auf M' und M'' sind dann ebenfalls gut (siehe Lemma 4.4.24). Die induzierte Filtrierung auf M' hat als Komponenten $F_pM \cap M'$. Wir können ohne Einschränkung $M'' = M/M'$ annehmen. Dann hat die induzierte Filtrierung auf M'' als Komponenten $\frac{F_pM+M'}{M'}$. Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ ist die Sequenz

$$0 \to F_pM \cap M' \to F_pM \to \frac{F_pM + M'}{M'} \to 0$$

[47] es reicht natürlich zu wissen, dass M endlich erzeugt ist, oder dass M' und M'' endlich erzeugt sind

offenbar exakt. Es folgt

$$\lambda(F_pM) = \lambda(F_pM \cap M') + \lambda\Big(\frac{F_pM + M'}{M'}\Big)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Seien H, H', H'' die Hilbert-Polynome von $\operatorname{gr}_F M$, $\operatorname{gr}_F M'$, $\operatorname{gr}_F M''$. Dann gilt

$$H(p) = H'(p) + H''(p)$$

für alle $p \gg 0$. Daraus folgt $H = H' + H''$. Alle Behauptungen folgen nun aus der Tatsache, dass H' und H'' positive Leitkoeffizienten haben, sofern diese Polynome nicht Null sind. □

Aufgabe 4.4.27. Seien M und N D-Modul.

(a) Wenn Dimensionen und Multiplizitäten von M und N bekannt sind, welche Aussagen kann man über Dimension und Multiplizität der direkten Summe $M \oplus N$ treffen.

(b) Sind umgekehrt Dimension und Multiplizität von $M \oplus N$ bekannt, was kann man über Dimension und Multiplizität des Summanden M aussagen?

Hinweis: Lemma 4.4.26.

Aufgabe 4.4.28. (a) Sei $\pi\colon M \twoheadrightarrow N$ eine surjektive Abbildung von Moduln über einem Ring R. Sei $\sigma\colon N \to M$ eine Spaltung von π, also eine Abbildung von R-Moduln mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_N$. Zeige die Existenz eines Isomorphismus $\operatorname{Ker}(\pi) \oplus N \xrightarrow{\sim} M$ von R-Moduln, dessen Verknüpfung mit π die Projektion $\operatorname{Ker}(\pi) \oplus N \twoheadrightarrow N$ auf N ist.

(b) Die Surjektion $\pi\colon D(n) \twoheadrightarrow \mathsf{k}[\underline{X}]$, $T \mapsto T1$, von $D(n)$-Moduln spaltet nicht, falls $n \geq 1$.

Lemma 4.4.29. *Ist M ein endlich erzeugter D-Modul, so gilt*

$$d(M) \leq d(D).$$

Beweis. Sei $D^m \twoheadrightarrow M$ ein surjektiver Morphismus von D-Moduln, für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$. Nun verwende man Lemma 4.4.26 (und eventuell Aufgabe 4.4.27). □

Beispiel 4.4.30. Betrachte die Polynomalgebra $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ mit der Gradfiltrierung und die additive Funktion dim. Dann gilt für jeden endlich erzeugten Modul M über dieser Algebra

$$d_{\dim}(M) \leq n.$$

Dies folgt aus Beispiel 4.4.21 und Lemma 4.4.29.

Beispiel 4.4.31. Betrachte die Weyl-Algebra $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung. Dann gilt für jeden endlich erzeugten $D(n)$-Modul M

$$d_{B,\dim}(M) \leq 2n.$$

Dies folgt aus Beispiel 4.4.22 und Lemma 4.4.29.

Lemma 4.4.32. *Sei $I \neq 0$ ein Linksideal von $D(n)$. Dann gilt*

$$d_{B,\dim}\Big(\frac{D(n)}{I}\Big) \leq 2n - 1.$$

Beweis. Sei $T \in I - \{0\}$. Die Surjektion

$$\frac{D(n)}{D(n)T} \twoheadrightarrow \frac{D(n)}{I}$$

von $D(n)$-Moduln mit Lemma 4.4.26 zeigt $d_{B,\dim}\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right) \geq d_{B,\dim}\left(\frac{D(n)}{I}\right)$. Es genügt also $d_{B,\dim}\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right) \leq 2n-1$ zu zeigen. Weil $D(n)$ nullteilerfrei ist (Korollar 2.5.21), haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to D(n) \xrightarrow{T\cdot} D(n) \to \frac{D(n)}{D(n)T} \to 0.$$

Wegen $d_B(D(n)) = 2n$ (siehe Gleichung (4.4.4)) folgt $d_B\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right) \leq 2n$ nach Lemma 4.4.26 (oder Beispiel 4.4.31). Die Annahme $d_B\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right) = 2n \neq -\infty$ führt nach diesem Lemma zum Widerspruch

$$e_B(D(n)) = e_B(D(n)) + \underbrace{e_B\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right)}_{\neq 0}.$$

Es muss also $d_B\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right) \leq 2n-1$ gelten. □

Aufgabe 4.4.33. Betrachte die Polynomalgebra $A = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ mit der Gradfiltrierung. Nach Beispiel 4.4.30 gilt $d_{\dim}(M) \leq n$ für jeden endlich erzeugten A-Modul. Finde für jedes $0 \leq i \leq n$ einen endlich erzeugten A-Modul M mit $d_{\dim}(M) = i$.

Ende der 12. Vorlesung am 14.11.2018.

Aufgabe 4.4.34 ([Cou95, Aufgabe 9.5.1])**.** Ist M ein endlich erzeugter Torsions-$D(n)$-Modul, so gilt $d(M) \leq 2n-1$.

Hinweis: Lemma 4.4.32.

Aufgabe 4.4.35 ([Cou95, Aufgabe 9.5.2])**.** Sei $T \in D(n)$ mit $\operatorname{Bdeg}(T) = \ell > 0$. Dann gelten $d\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right) = 2n-1$ und $e\left(\frac{D(n)}{D(n)T}\right) = \ell$.

Hinweis: Betrachte die kurze exakte Sequenz $0 \to D(n) \xrightarrow{\cdot T} D(n) \to \frac{D(n)}{D(n)T} \to 0$. Versieh die Mitte mit der Bernsteinfiltrierung und zeige, dass die induzierte (gute) Filtrierung auf dem linken Randterm $D(n)$ die um $-\ell$ verschobene Bernstein-Filtrierung ist. Somit kann man zwei Hilbert-Polynome explizit ausrechnen.

Definition 4.4.36 (Restriktion der Skalare)**.** Sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringmorphismus. Gegeben $M \in \operatorname{Mod}(S)$ definieren wir $\operatorname{res}(M) = \operatorname{res}_R^S(M) \in \operatorname{Mod}(R)$ wie folgt: Als abelsche Gruppe stimmt $\operatorname{res}(M)$ mit M überein; die Skalarmultiplikation von R auf $\operatorname{res}(M)$ ist durch $r.m := \varphi(r).m$ definiert, für alle $r \in R$ und $m \in M$. Ist $f\colon M \to N$ ein S-Modulmorphismus, so ist (die Abbildung) f (von Mengen) automatisch ein Morphismus $f = \operatorname{res}(f)\colon \operatorname{res}(M) \to \operatorname{res}(N)$. Diese Zuordnungen definieren den Funktor **Restriktion (der Skalare entlang φ)**

$$\operatorname{res} = \operatorname{res}_R^S = \operatorname{res}_\varphi = \operatorname{res}_{\varphi\colon R \to S}\colon \operatorname{Mod}(S) \to \operatorname{Mod}(R).$$

Aufgabe 4.4.37. Der Funktor res ist exakt. Genau dann bildet res endlich erzeugte S-Moduln auf endlich erzeugte R-Moduln ab, wenn S als R-Modul endlich erzeugt ist.

Beispiel 4.4.38. Sei $\mathcal{F}\colon D(n) \xrightarrow{\sim} D(n)$ der Fourier-Automorphismus (siehe 2.4.4), d. h. es gelten $\mathcal{F}(X_i) = \partial_i$ und $\mathcal{F}(\partial_i) = -X_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$. Versehen wir $D(n)$ mit der

Bernstein-Filtrierung, so ist $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus filtrierter Algebren, der auf $B_0D(n) = \mathsf{k}$ die Identität ist.

Insbesondere ist jede gute Filtrierung auf einem $D(n)$-Modul M auch eine gute Filtrierung auf seinem **Fourier-Transformierten** ${}_{\mathcal{F}}M := \operatorname{res}_{\mathcal{F}}(M)$; es folgt $d(M) = d({}_{\mathcal{F}}M)$ und $e(M) = e({}_{\mathcal{F}}M)$ für jeden endlich erzeugten $D(n)$-Modul M (dies folgt auch aus dem abstrakten Lemma 4.4.39).

Als konkretes Beispiel kann man etwa $M = \mathsf{k}[\underline{X}]$ mit der offensichtlichen $D(n)$-Modulstruktur betrachten. Auf ${}_{\mathcal{F}}M$ operieren die üblichen Erzeuger der Weyl-Algebra als

$$\begin{aligned} X_i.X^\alpha &= \partial_i(X^\alpha) = \alpha_i X^{\alpha-e_i}, \\ \partial_i.X^\alpha &= -X_iX^\alpha = -X^{\alpha+e_i}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Benennt man die Variablen $X_1, \dots, X_n$ in ${}_{\mathcal{F}}M$ um und nennt sie $-\partial_1, \dots, -\partial_n$, so ist ${}_{\mathcal{F}}M$ der Polynomring $\mathsf{k}[\partial_1, \dots, \partial_n]$, und die obigen Formeln schreiben sich als

$$\begin{aligned} X_i.\partial^\alpha &= -\alpha_i \partial^{\alpha-e_i}, \\ \partial_i.\partial^\alpha &= \partial^{\alpha+e_i}. \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Die offensichtliche Abbildung ist ein Isomorphismus

$$\mathsf{k}[\underline{\partial}] \xrightarrow{\sim} \frac{D(n)}{\sum_{i=1}^n D(n)X_i} \tag{4.4.8}$$

von $D(n)$-Moduln. Nach Obigem und Aufgabe 4.4.23 gelten

$$\begin{aligned} d_{B,\dim}(\mathsf{k}[\underline{\partial}]) &= d_{B,\dim}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = n, \\ e_{B,\dim}(\mathsf{k}[\underline{\partial}]) &= e_{B,\dim}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = 1. \end{aligned}$$

Lemma 4.4.39. *Nicht in Vorlesung gemacht. Seien (D, FD) und (D', FD') nicht-negativ auschöpfend filtrierte Ringe mit $F_0D = F_0D'$, die den Anforderungen (D1), (D2), (D3) in Annahme 4.4.2 genügen. Sei $\varphi\colon D' \to D$ ein Ringmorphismus, der alle Elemente von F_0D' fixiert und die Eigenschaft hat, dass $D = \operatorname{res}^D_{D'}(D)$ als D'-Modul endlich erzeugt ist. Sei $\lambda\colon \operatorname{mod}(F_0D') = \operatorname{mod}(F_0D) \to \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ additiv. Sei $M \in \operatorname{mod}(D)$. Dann gelten $M' := \operatorname{res}(M) \in \operatorname{mod}(D')$ und*

- *$d(M') \leq d(M)$;*[48]
- *im Fall $d(M') = d(M)$ gilt $e(M') \leq t^{d(M)}e(M)$, wobei $t = \min\{t' \in \mathbb{N} \mid \varphi(F_1D') \subset F_{t'}D\} \in \mathbb{N}$.*

Ist φ sogar ein Isomorphismus von Ringen, so gilt $d(M') = d(M)$; gilt zusätzlich $\varphi(F_1D') = F_1D$, so gilt $e(M') = e(M)$.

Beweis. Seien $T_1, \dots, T_s \in F_1D'$ Elemente, so dass $\operatorname{gr} D'$ als $\operatorname{gr}^0 D'$-Algebra von den Klassen $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_s \in \operatorname{gr}^1 D'$ erzeugt ist. Da die Filtrierung FD ausschöpfend ist, gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(T_1), \dots, \varphi(T_s) \in F_tD$. Wegen $F_1D' = \sum_{i=1}^s F_0D' \cdot T_i + F_0D'$ (und unserer Annahme $\varphi|_{F_0D'} = \mathrm{id}_{F_0D'} = \mathrm{id}_{F_0D}$ folgt $\varphi(F_1D') = \sum_{i=1}^s F_0D \cdot \varphi(T_i) + F_0D \subset F_tD$. Wir können ohne Einschränkung t minimal mit $\varphi(F_1D') \subset F_tD$ wählen.

Sei $M \in \operatorname{mod}(D)$. Da D als D'-Modul endlich erzeugt ist, ist $M' = \operatorname{res}(M)$ als D'-Modul endlich erzeugt (siehe Aufgabe 4.4.37).

[48] Man beachte, dass die Hilbert-Dimensionen $d(M') = d_\lambda(M')$ und $d(M) = d_\lambda(M)$ Moduln über verschiedenen filtrierten Ringen zugeordnet sind.

Sei FM eine gute Filtrierung auf M. Setze

$$F_pM' := F_{pt}M$$

für $p \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$F_1D'.F_pM' = \varphi(F_1D').F_{pt}M \subset F_tD.F_{pt}M \subset F_{(p+1)t}M = F_{p+1}M'$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ und somit mit Lemma 4.4.5

$$F_qD'.F_pM' = F_1D' \cdots F_1D'.F_pM' \subset F_{q+p}M'$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$. Nun ist klar, dass $FM' = (F_pM')$ eine Filtrierung auf dem D'-Modul M' definiert. Sie ist sicherlich ausschöpfend (da FM dies ist) und alle F_pM' sind endlich erzeugt als Moduln über $F_0D' = F_0D$, da alle F_qM diese Eigenschaft haben.

Wegen $M' \in \mathrm{mod}(D')$ gibt es auf M' eine gute Filtrierung GM' (siehe Lemma 4.4.12). Da FM' ausschöpfend ist, ist GM' feiner als FM' (siehe Lemma 4.4.14), es gibt also ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$G_pM' \subset F_{p+\ell}M' = F_{(p+\ell)t}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$; da λ nur nichtnegative Werte annimmt und $F_{p+\ell}M' = F_{(p+\ell)t}$ als Moduln über $F_0D' = F_0D$ gilt, folgt

$$\lambda(G_pM') \leq \lambda(F_{p+\ell}M') = \lambda(F_{(p+\ell)t}).$$

Für alle $p \gg 0$ folgt für die zugehörigen Hilbert-Polynome

$$H_{\mathrm{gr}_G M'}(p) \leq H_{\mathrm{gr}_F M}((p+\ell)t) = H_{\mathrm{gr}_F M}(pt + \ell t).$$

Die linke bzw. rechte Seite ist für $p \gg 0$ polynomial in p vom Grad $d(M')$ bzw. $d(M)$ mit Leitkoeffizient

$$\frac{e(M')}{d(M')!} \quad \text{bzw.} \quad \frac{e(M)t^{d(M)}}{d(M)!}.$$

Da die Leitkoeffizienten ≥ 0 sind, folgt für die Grade $d(M') \leq d(M)$ (aus dem Wachstumsverhalten für $p \to \infty$, per Analysis I). Im Fall $d(M') = d(M)$ muss $e(M') \leq e(M)t^{d(M)}$ gelten.

Ist φ ein Isomorphismus von Ringen, so erfüllt φ^{-1} alle Voraussetzungen, die im Lemma an φ gestellt sind, und es gilt $\mathrm{res}_D^{D'}(M') = \mathrm{res}(\mathrm{res}(M)) = M$. Unsere bisherigen Ergebnisse liefern also $d(M) \leq d(M')$ und somit $d(M) = d(M')$. Im Fall $\varphi(F_1D') = F_1D$ gilt $t \leq 1$ und somit nach obigem $e(M') \leq e(M)$. Es gilt aber auch $F_1D' = \varphi^{-1}(F_1D)$ und somit $e(M) \leq e(M')$, insgesamt also $e(M') = e(M)$. □

4.5. **Bernstein-Ungleichung.**

Definition 4.5.1. Betrachtet man endlich erzeugte Moduln über $D(n)$ und betrachtet auf $D(n)$ die Bernstein-Filtrierung, so nennt man die zugehörige Hilbert-Dimension $d_{B,\dim}(M)$ **Bernstein-Dimension** und die zugehörige Hilbert-Multiplizität $e_{B,\dim}(M)$ **Bernstein-Multiplizität**.

4.5.2. Wir haben in Beispiel 4.4.31 gesehen, dass die Bernstein-Dimension eines endlich erzeugten $D(n)$-Moduls stets $\leq 2n$ ist. Außerdem sind die folgenden Bedingungen äquivalent (siehe 4.4.19):

- $M = 0$.
- $d_{B,\dim}(M) = -\infty$,

- $e_{B,\dim}(M) = 0$,

Beispiel 4.5.3. Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul, wobei $n \geq 1$ gelte. Wir behaupten, dass $d_{B,\dim}(M) \neq 0$ gilt.

Nehmen wir an, dass $d_{B,\dim}(M) = 0$ gilt. Dies bedeutet, dass M endlichlichdimensional ist (da $\dim(F_pM)$ für $p \gg 0$ konstant ist, wobei FM eine gute Filtrierung ist; also ist F_pM konstant für alle $p \gg 0$; da die Filtrierung ausschöpfend ist, folgt $F_pM = M$ für alle $p \gg 0$). Nach Aufgabe 2.1.15 folgt $M = 0$, d. h. $d_{B,\dim}(M) = -\infty$ im Widerspruch zur Annahme.

Insbesondere sehen wir, dass die Dimension jedes endlich erzeugten $D(1)$-Moduls entweder $-\infty$, 1 oder 2 ist. Dies bestätigt den folgenden Satz 4.5.4 im Fall $n = 1$.

Satz 4.5.4 (Bernstein-Ungleichung, [Ber72, Thm. 1.3])**.** *Für jeden endlich erzeugten $D(n)$-Modul $M \neq 0$ gilt*

$$n \leq d_{B,\dim}(M) \leq 2n.$$

*Die **Bernstein-Ungleichung** ist die erste dieser Ungleichungen.*

Beweis (nach A. Joseph). Sei FM eine gute Filtrierung auf M (siehe Lemma 4.4.12). Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $F_{-1}M = 0$ und $F_0M \neq 0$ gelten (entweder nimmt man die Filtrierung aus dem Beweis von Lemma 4.4.12, oder man verschiebt eine gegebene gute Filtrierung in offensichtlicher Weise, was wiederum eine gute Filtrierung liefert).

Wir behaupten, dass für jedes $p \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} B_pD(n) &\to \operatorname{Hom}(F_pM, F_{2p}M), \\ T &\mapsto (T.\colon x \mapsto Tx), \end{aligned}$$

injektiv ist.

Wir beweisen dies per Induktion über p. Für $p = 0$ ist dies klar, denn $B_0D(n) = \mathsf{k}$ und $F_0M \neq 0$. Sei $p > 0$. Sei $T \in B_pD(n)$ im Kern dieser Abbildung. Für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$[T, X_i], [T, \partial_i] \in [B_pD(n), B_1D(n)] \subset B_{p+1-2}D(n) = B_{p-1}D(n)$$

nach Satz 2.5.9. Für beliebiges $m \in F_{p-1}M$ berechnen wir

$$\begin{aligned} [T, X_i]m &= T\underbrace{X_im}_{\in F_pM} - X_i\underbrace{Tm}_{=0} = 0, \\ [T, \partial_i]m &= T\underbrace{\partial_im}_{\in F_pM} - \partial_i\underbrace{Tm}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme folgt $[T, X_i] = 0 = [T, \partial_i]$. Dies bedeutet, dass T im Zentrum $\mathrm{Z}(D(n)) = \mathsf{k}$ der Weyl-Algebra liegt (siehe Satz 3.2.10). Wegen $F_pM \neq 0$ folgt $T = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

Wir folgern

$$\dim B_pD(n) \leq \dim \operatorname{Hom}(F_pM, F_{2p}M) = (\dim F_pM) \cdot (\dim F_{2p}M)$$

für alle $p \in \mathbb{N}$ (dies verwendet, dass alle F_qM endlichdimensional sind). Die linke Seite ist für $p \in \mathbb{N}$ durch ein Polynom in p vom Grad $2n$ (mit positivem Leitkoeffizienten) gegeben (siehe Beispiel 4.4.22). Nach Satz 4.4.16 stimmt $p \mapsto (\dim F_pM)$ für $p \gg 0$ mit dem Hilbert-Polynom $H = H_{\operatorname{gr}_F M}$ vom Grad $d_{B,\dim}(M) \in \mathbb{N}$ (mit positivem Leitkoeffizienten) überein (der Grad ist nicht $-\infty$, da $M \neq 0$). Dann stimmt $p \mapsto (\dim F_{2p}M)$ für $p \gg 0$ mit dem

Polynom $H(2T)$ vom selben Grad $d_{B,\dim}(M)$ überein. Es folgt $2n \leq 2d_{B,\dim}(M)$. Dies zeigt die Bernstein-Ungleichung $n \leq d_{B,\dim}(M)$. Die Ungleichung $d_{B,\dim}(M) \leq 2n$ haben wir bereits in Beispiel 4.4.31 beobachtet. $\square$

Beispiel 4.5.5. Laut Aufgabe 4.4.23 hat der $D(n)$-Modul $\mathsf{k}[\underline{X}] = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ die Bernstein-Dimension n, was nach der Bernstein-Ungleichung die minimal mögliche Dimension $\neq -\infty$ ist.

Aufgabe 4.5.6 (vgl. [Cou95, Aufgabe 9.5.3])**.** Für $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ betrachte das Linksideal $I_\ell := \sum_{i=\ell+1}^{n} D(n)\partial_i$ von $D(n)$. Dann gelten

$$d_{B,\dim}\Big(\frac{D(n)}{I_\ell}\Big) = n + \ell,$$
$$e_{B,\dim}\Big(\frac{D(n)}{I_\ell}\Big) = 1.$$

Insbesondere gibt es für jedes d mit $n \leq d \leq 2n$ einen endlich erzeugten (sogar zyklischen) $D(n)$-Modul mit $d_{B,\dim}(M) = d$ (vgl. Satz 4.5.4).

4.6. **Holonome Moduln.**

4.6.1. Wir definieren die wichtige Klasse holonomer $D(n)$-Moduln. Viele Eigenschaften holonomer $D(n)$-Moduln ähneln Eigenschaften endlichdimensionaler Vektorräume. Dies ist aber nur eine grobe Analogie. Die Kategorie holonomer Moduln ist beispielsweise nicht halbeinfach (siehe Aufgabe 4.6.13).

Definition 4.6.2. Ein $D(n)$-Modul M heißt **holonom**, wenn er endlich erzeugt ist und $M = 0$ oder $d_B(M) = n$ gilt. Sei $\mathrm{Hol}(D(n))$ die volle[49] Unterkategorie holonomer $D(n)$-Moduln in der Kategorie $\mathrm{Mod}(D(n))$ aller $D(n)$-Moduln.

4.6.3. Nach der Bernstein-Ungleichung (siehe Satz 4.5.4) ist n die minimale Bernstein-Dimension für endlich erzeugte $D(n)$-Moduln ungleich Null. Holonome Moduln sind also Moduln von minimaler endlicher Bernstein-Dimension und der Nullmodul. Ein $D(n)$-Modul M ist also genau dann holonom, wenn er endlich erzeugt ist und $d_B(M) \leq n$ gilt.

4.6.4. Nach Definition ist jeder holonome Modul endlich erzeugt, es ist also $\mathrm{Hol}(D(n))$ eine volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(D(n))$. Wir erinnern daran, dass $D(n)$ ein noetherscher Ring ist (siehe Satz 2.6.20). Insbesondere ist also jeder holonome Modul noethersch.

Beispiel 4.6.5. Nach (4.4.6) ist $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ ein holonomer $D(n)$-Modul. Ebenso ist sein Fourier-Transformierter $\mathsf{k}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ holonom (siehe Beispiel 4.4.38).

Beispiel 4.6.6. Nach (4.4.3) ist $D(n)$ nicht holonom als $D(n)$-Modul, falls $n \geq 1$.

Beispiel 4.6.7. Der Fall $n = 1$. Für jedes Linksideal $0 \neq I \subset D(1)$ ist $\frac{D(1)}{I}$ holonom (siehe Lemma 4.4.32). Insbesondere ist $\frac{D(1)}{D(1)T}$ für jedes $0 \neq T \in D(1)$ holonom.

[49] Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt eine Kategory $\mathcal{D}$ **Unterkategorie** von $\mathcal{C}$, wenn die Menge der Objekte von $\mathcal{D}$ eine Teilmenge der Objekte von $\mathcal{C}$ ist, $\mathcal{D}(d, d') \subset \mathcal{C}(d, d')$ für alle Objekte $d, d' \in \mathcal{D}$ gilt und die Identitäten und die Verknüpfungen kompatibel sind. Eine Unterkategorie $\mathcal{D}$ heißt **voll**, wenn $\mathcal{D}(d, d') = \mathcal{C}(d, d')$ für alle Objekte $d, d' \in \mathcal{D}$ gilt. Man überlegt sich leicht, dass eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ eindeutig durch ihre Objekte gegeben ist.

Beispiel 4.6.8. Wegen $D(0) = \mathsf{k}$ sind $D(0)$-Modul dasselbe wie Vektorräume. Holonome $D(0)$-Moduln sind dasselbe wie endlichdimensionale Vektorräume.

Satz 4.6.9. *Ist*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $D(n)$-Moduln, so ist M genau dann holonom, wenn M' und M'' holonom sind. In Worten: Untermoduln, Quotienten und Erweiterungen holonomer Moduln sind holonom (gegeben eine kurze exakte Sequenz von Moduln wie oben, nennt man M[50] *eine* ***Erweiterung von*** *M''* ***durch*** *M').*[51] *Insbesondere sind Kerne, Kokerne und Bilder von Morphismen zwischen holonomen $D(n)$-Moduln holonom. Sind M (und damit M' und M'') holonom, so gilt*

$$e_B(M) = e_B(M') + e_B(M'').$$

In Worten ist die Multiplizität $e_B\colon \mathrm{Hol}(D(n)) \to \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ eine additive Funktion[52].

Beweis. Dies folgt sofort aus Lemma 4.4.26. □

Satz 4.6.10. *Holonome $D(n)$-Moduln sind Torsionsmoduln, falls $n \geq 1$.*

Beweis. Sei M ein holonomer $D(n)$-Modul und sei $m \in M$. Zu zeigen ist, dass der Annihilator von m in $D(n)$ nicht nur aus dem Nullelement besteht. Gelte ohne Einschränkung $m \neq 0$. Betrachte den $D(n)$-Modulmorphismus

$$\begin{aligned} ?.m\colon D(n) &\to M, \\ T &\mapsto Tm. \end{aligned}$$

Sei K sein Kern (dies ist der Annihilator von m in $D(n)$). Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to K \to D(n) \twoheadrightarrow D(n)m \to 0$$

Als Untermodul von M ist $D(n)m$ ein holonomer $D(n)$-Modul (nach Satz 4.6.9), so dass $d(D(n)m) = n$ folgt (wegen $m \neq 0$). Mit (4.4.3)) und Lemma 4.4.26 erhalten wir

$$1 \leq n = d_B(D(n)m) < 2n = d_B(D(n)) = \max(d(K), d(D(n)m)) = d(K).$$

Aus $d(K) \neq -\infty$ folgt $K \neq 0$. Es gibt also ein Element $T \neq 0$ in $D(n)$ mit $Tm = 0$. Also sind alle Elemente von M Torsionselemente. □

Aufgabe 4.6.11. Eine endlich erzeugter $D(1)$-Modul ist genau dann holonom, wenn er ein Torsionsmodul ist.

Hinweis: Aufgabe 4.4.34

Aufgabe 4.6.12. Nicht jeder Torsionsmodul über $D(2)$ (oder allgemeiner über $D(n)$ für $n \geq 2$) ist holonom.

Hinweis: Aufgabe 4.5.6, jedes Element des (zyklischen) $D(n)$-Moduls $\frac{D(n)}{D(n)\partial_n}$ wird von einer geeigneten Potenz $(\partial_n)^p$ annihiliert.

[50] oder manchmal die gesamte exakte Sequenz

[51] In kategorieller Sprache: Die Kategorie $\mathrm{Hol}(D(n))$ ist eine Serre-Unterkategorie von $\mathrm{Mod}(D(n))$ [Sta18, 02MP].

[52] auf der abelschen Kategorie $\mathrm{Hol}(D(n))$ im Sinne der Fußnote in Definition 4.1.7.

Aufgabe 4.6.13. Finde ein Beispiel einer nicht spaltenden Sequenz holonomer $D(1)$-Moduln.

Hinweis: Du kannst den $D(1)$-Modul $\mathsf{k}[X, X^{-1}]$ (siehe Aufgabe 2.7.12) als mittleren Term nehmen. Das folgende Bild illustriert diesen Modul (wobei an jedem Pfeil noch eine Zahl zu ergänzen ist) und mag Dir helfen, einen geeigneten Untermodul zu finden.

$$\cdots \underset{\partial}{\overset{X}{\rightleftarrows}} X^{-2} \underset{\partial}{\overset{X}{\rightleftarrows}} X^{-1} \underset{\partial}{\overset{X}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\partial}{\overset{X}{\rightleftarrows}} X^{1} \underset{\partial}{\overset{X}{\rightleftarrows}} X^{2} \underset{\partial}{\overset{X}{\rightleftarrows}} \cdots \tag{4.6.1}$$

Aufgabe 4.6.14. Zeige, dass $0 \to \frac{D(1)}{D(1)\partial} \xrightarrow{\cdot\partial} \frac{D(1)}{D(1)\partial^2} \to \frac{D(1)}{D(1)\partial} \to 0$ eine spaltende kurze exakte Sequenz holonomer $D(1)$-Moduln ist.

4.6.15. Die Diskussion holonomer Moduln wird nach einem Einschub über Moduln endlicher Länge fortgesetzt.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 4.4.34 samt Folgerung Aufgabe 4.6.11 (über $D(1)$ gilt holonom=endlich-erzeugt+torsion)
(2) Aufgabe 4.5.6 (alle möglichen Bernstein-Dimensionen treten auf) und Aufgabe 4.6.12 (nicht holonomer zyklischer Torsionsmodul)
(3) Aufgabe 4.6.13 (nicht spaltende Sequenz holonomer Moduln)
(4) Aufgabe 4.4.35 (Dimension und Multiplizität von $\frac{D(n)}{D(n)T}$ ausrechnen)

4.6.1. *Kompositionsreihen und Moduln endlicher Länge.*

Annahme 4.6.16. Im Abschnitt 4.6.1 ist R stets ein Ring.

Definition 4.6.17. Eine **Kompositionsreihe** eines R-Moduls M ist eine endliche Kette

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M$$

von R-Untermoduln von M, für die alle Subquotienten $\frac{M_i}{M_{i-1}}$, für $1 \leq i \leq \ell$, einfach sind. Die **Länge** einer Kompositionsreihe ist die Anzahl der Inklusionen; die angegebene Kompositionsreihe hat also Länge ℓ.

Satz 4.6.18. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(a) M ist artinsch und noethersch;
(b) M besitzt eine Kompositionsreihe.

Beweis. (b) $\Rightarrow$ (a): Sei $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M$ eine Kompositionsreihe von M. Da jeder einfache Modul sowohl artinsch als auch noethersch ist, sind alle $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ artinsch und noethersch. Da die Mitte jeder kurzen exakten Sequenz genau dann artinsch (bzw. noethersch) ist, wenn dies für die Randterme gilt, zeigen die kurzen exakten Sequenzen $M_{i-1} \hookrightarrow M_i \twoheadrightarrow \frac{M_i}{M_{i+1}}$ induktiv, dass $M = M_\ell$ artinsch und noethersch ist.

(a) $\Rightarrow$ (b): Gelte ohne Einschränkung $M \neq 0$. Setze $M_0 := 0$. Die Menge aller Untermoduln U von M mit $M_0 \subsetneq U$ ist nicht leer. Weil M artinsch ist, hat sie ein minimales Element M_1. Es ist M_1/M_0 einfach. Gilt $M_1 = M$, so sind wir fertig. Sonst ist die Menge aller Untermoduln U von M mit $M_1 \subsetneq U$ nicht leer. Weil M artinsch ist, hat sie ein minimales Element M_2. Es ist M_2/M_1 einfach. Gilt $M_2 = M$, so sind wir fertig. Wir iterieren dies. Terminiert dieser Prozess nicht, so bekommen wir eine durch die natürlichen Zahlen indizierte echt aufsteigende Folge

$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \ldots$ von Untermoduln von M. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass M noethersch ist. $\square$

Beispiel 4.6.19. Als $\mathbb{Z}$-Modul ist $\mathbb{Z}$ noethersch, aber nicht artinsch (es gibt beispielsweise keinen von Null verschiedenen minimalen Untermodul). Als $\mathbb{Z}$-Modul ist $\frac{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}{\mathbb{Z}}$ nicht noethersch (es gibt beispielsweise keinen echten maximalen Untermodul), aber artinsch.

Ende der 13. Vorlesung am 19.11.2018.

Satz 4.6.20 (Jordan-Hölder)**.** *Je zwei Kompositionsreihen*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M,$$
$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_\ell = M$$

eines R-Moduls M haben dieselbe Länge und bis auf Permutation dieselben einfachen Subquotienten, in Formeln gilt $m = \ell$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_m$ mit $\frac{M_i}{M_{i-1}} \cong \frac{L_{\sigma(i)}}{L_{\sigma(i)-1}}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion über m. Im Fall $m = 0$ ist die Aussage trivial. Gelte $m > 0$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ ist leicht zu sehen, dass

$$0 \to \frac{L_j \cap M_{m-1}}{L_{j-1} \cap M_{m-1}} \to \frac{L_j}{L_{j-1}} \to \frac{L_j + M_{m-1}}{L_{j-1} + M_{m-1}} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln ist. Da $\frac{L_j}{L_{j-1}}$ einfach ist, muss jeweils genau einer der beiden Randterme Null sein. In der Kette

$$M_{m-1} = L_0 + M_{m-1} \subset \cdots \subset L_{i-1} + M_{m-1} \subset L_i + M_{m-1} \subset \cdots \subset L_\ell + M_{m-1} = L_\ell = M_m = M$$

gibt es wegen der Einfachheit von $\frac{M_m}{M_{m-1}}$ genau einen „Sprung“, womit wir meinen, dass genau eine Inklusion keine Gleichheit ist. Sei $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ der entsprechende Index mit $M_{m-1} = L_{i-1} + M_{m-1} \subsetneq L_i + M_{m-1} = M_m$. Es folgt

$$\frac{L_i}{L_{i-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{L_i + M_{m-1}}{L_{i-1} + M_{m-1}} = \frac{M_m}{M_{m-1}}, \tag{4.6.2}$$
$$\frac{L_j \cap M_{m-1}}{L_{j-1} \cap M_{m-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{L_j}{L_{j-1}} \qquad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, \ell\} \text{ mit } j \neq i.$$

Also ist

$$0 = L_0 \cap M_{m-1} \subset \cdots \subset \underbrace{L_{i-1} \cap M_{m-1}}_{= L_i \cap M_{m-1}} \subset L_{i+1} \cap M_{m-1} \subset L_\ell \cap M_{m-1} = M_{m-1}$$

eine Kompositionsreihe von M_{m-1} der Länge $\ell - 1$. Per Vergleich mit der Kompositionsreihe $M_0 \subset \cdots \subset M_{m-1}$ und Induktionsannahme erhalten wir $\ell - 1 = m - 1$, also $\ell = m$, und es gibt eine bijektive Abbildung $\sigma \colon \{1, \ldots, m-1\} \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$ mit

$$\frac{M_s}{M_{s-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{L_{\sigma(s)} \cap M_{m-1}}{L_{\sigma(s)-1} \cap M_{m-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{L_{\sigma(s)}}{L_{\sigma(s)-1}}$$

für alle $s \in \{1, \ldots, m-1\}$. Indem wir σ durch $\sigma(m) := i$ zu einer Permutation $\sigma \in S_m$ fortsetzen, erhalten wir wegen (4.6.2) die gesuchte Aussage. $\square$

Definition 4.6.21. Die **Länge** $\ell(M)$ eines R-Moduls ist definiert als $\infty = +\infty$, falls M keine Kompositionsreihe hat, und sonst als die gemeinsame Länge aller Kompositionsreihen von M. Dies ist wohldefiniert, denn alle Kompositionsreihen von M haben nach dem Satz 4.6.20 von Jordan-Hölder dieselbe Länge.

Beispiel 4.6.22. Genauu dann gilt $\ell(M) = 0$, wenn $M = 0$ gilt. Genau dann gilt $\ell(M) = 1$, wenn M einfach ist.

4.6.23. Für einen R-Modul M sind äquivalent:

- M hat **endliche Länge**, d. h. $\ell(M) < \infty$;
- M hat eine Kompositionsreihe;
- M ist artinsch und noethersch.

Die Äquivalenz der ersten beiden Bedinungen ist klar nach Definition der Länge. Die Äquivalenz der letzten beiden Bedingungen ist Satz 4.6.18.

Aufgabe 4.6.24. Sei M ein R-Modul. Dann ist $\ell(M)$ das Supremum der Menge aller $r \in \mathbb{N}$, für die es eine echt aufsteigende endliche Kette $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r$ der Länge r von Untermoduln von M gibt (das Supremum wird dabei in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ gebildet).

4.6.2. *Weiter mit holonomen Moduln.*

Satz 4.6.25. *Holonome Moduln haben endliche Länge. Ist genauer M ein holonomer $D(n)$-Modul, so gilt*

$$\ell(M) \leq e_B(M).$$

Insbesondere ist jeder holonome $D(n)$-Modul M der Multiplizität $e_B(M) = 1$ einfach (als $D(n)$-Modul).

Beweis. Sei M ein holonomer $D(n)$-Modul und sei

$$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r$$

eine Kette echter Inklusionen von $D(n)$-Untermoduln von M. Wir behaupten $r \leq e(M) = e_B(M)$.

Ohne Einschränkung gelte $r \geq 1$. Als Untermoduln eines holonomen Moduls sind alle M_i holonom (nach Satz 4.6.9). Betrachte die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$$

holonomer (nach Satz 4.6.9) Moduln, für i mit $1 \leq i \leq r$. Da die Multiplizität eine „additive Funktion auf der Kategorie $\mathrm{Hol}(D(n))$“ ist (siehe Satz 4.6.9), folgt

$$e(M_i) = e(M_{i-1}) + e(M_i/M_{i-1})$$

für alle i mit $1 \leq i \leq r$. Per Induktion erhalten wir

$$e(M) \geq e(M_r) = e(M_r/M_{r-1}) + e(M_{r-1}) = \cdots = \Big(\sum_{i=1}^{r} \underbrace{e(M_i/M_{i-1})}_{\geq 1}\Big) + \underbrace{e(M_0)}_{\geq 0} \geq r.$$

Insbesondere wird jede absteigende (bzw. aufsteigende) Kette von Untermoduln von M stationär. Dies zeigt, das M noethersch[53] und artinsch ist. Also hat M endliche Länge $\ell(M)$, und nach dem obigen Argument gilt $\ell(M) \leq e(M)$ (siehe 4.6.23).

[53] Dies wissen wir eh schon, siehe 4.6.4.

Aus $e(M) = 1$ folgt $0 \leq \ell(M) \leq e(M) = 1$. Der Fall $0 = \ell(M)$ kann nicht eintreten, denn dann würde $M = 0$ und somit $e(M) = 0$ gelten. Also hat M Länge Eins und ist einfach. $\square$

Bemerkung 4.6.26. Es gibt einfache $D(n)$-Moduln (und somit $D(n)$-Moduln endlicher Länge), die nicht holonom sind. Siehe Stafford, Bernstein–Lunts, Lunts. Teilweise ist das in [Cou95, 11.3] erklärt.

4.6.27. Wir wollen zeigen, dass jeder holonome Modul zyklisch ist (siehe Satz 4.6.29). Dies folgt aus dem folgenden allgemeinen Resultat.

Satz 4.6.28. *Sei R ein einfacher linksnoetherscher Ring, der nicht linksartinsch (= artinsch als (Links-)Modul über sich selbst) ist. Dann ist jeder endlich erzeugte artinsche R-Modul zyklisch.*

Beweis. Sei M ein endlich erzeugter artinscher R-Modul. Da R noethersch ist, ist M als endlich erzeugter R-Modul noethersch. Als artinscher und noetherscher Modul hat M eine Kompositionsreihe (Satz 4.6.18). Wir beweisen den Satz per Induktion über die Länge $\ell(M)$ von M.

Im Fall $\ell(M)$ ist $M = 0$ zyklisch.

Gelte $\ell(M) \geq 1$. Sei $S \subset M$ ein einfacher Untermodul. Der Quotient M/S ist endlich erzeugt, artinsch, und hat Länge $\ell(M/S) = \ell(M) - 1$. Per Induktion ist M/S zyklisch. Wähle $m \in M$ so, dass $\overline{m}$ ein Erzeuger von M/S ist. Sei $s \in S - 0$. Dann ist Rs ein Untermodul von S. Da S einfach ist und $Rs \neq 0$ gilt, folgt $Rs = S$, d. h. s ist ein Erzeuger von S. Wir folgern $M = Rm + Rs$. Da Rm artinsch ist, R aber nicht, kann der surjektive Modulmorphismus $?.m\colon R \twoheadrightarrow Rm$ nicht bijektiv sein. Also gibt es ein $r \in R - 0$ mit $rm = 0$.

Da R einfach ist, gilt $R = RrR$, also $RrR.s = R.s = S \neq 0$. Insbesondere gibt es ein $y \in R$ mit $ry.s \neq 0$.

Wir behaupten $M = R(m + ys)$. Zunächst ist $r(m + ys) = rm + rys = 0 + rys = rys \neq 0$ ein Element von S. Weil S einfach, folgt $s \in S = Rrys \subset R(m + ys)$. Es folgt $m = (m + ys) - ys \in R(m + ys)$. Es folgt $Rm + Rs \subset R(m + ys) \subset M = Rm + Rs$, also die behauptete Gleichheit. Insbesondere ist M zyklisch. $\square$

Satz 4.6.29. *Für $n \geq 1$ sind holonome $D(n)$-Moduln zyklisch. Genauer gibt es für jeden holonomen $D(n)$-Modul M ein Linksideal $I \neq 0$ mit $M \cong \frac{D(n)}{I}$.*

Beweis. Jeder holonome $D(n)$-Modul ist per Definition endlich erzeugt und nach Satz 4.6.25 artinsch. Die Behauptung folgt somit aus Satz 4.6.28, denn $D(n)$ ist ein einfacher noetherscher Ring (Sätze 2.5.32 und 2.6.20), der nicht linksartinsch ist (siehe Lemma 2.6.23).

Sei M ein holonomer $D(n)$-Modul. Da M zyklisch ist, gibt es ein Element $m \in M$ mit $M = D(n)m$. Also ist der $D(n)$-Modulmorphismus $\varphi\colon D(n) \twoheadrightarrow M$, $T \mapsto Tm$, surjektiv und liefert einen Isomorphismus $\frac{D(n)}{\operatorname{Ker}(\varphi)} \xrightarrow{\sim} M$. Es gilt $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq 0$, denn sonst wäre φ ein Isomorphismus $D(n) \xrightarrow{\sim} M$. Dies kann aber nicht sein, denn $D(n)$ ist nicht holonom (Beispiel 4.6.6). $\square$

4.7. **Bernstein-Sato-Polynom und meromorphe Fortsetzung.**

4.7.1. *Vorbereitungen.*

Lemma 4.7.1 (Hinreichende Bedingung für Holonomie)**.** *Betrachte $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung. Sei M ein $D(n)$-Modul mit einer ausschöpfenden Filtrierung FM. Falls es Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit*

$$\dim F_p M \leq \frac{c}{n!} p^n + c' p^{n-1}$$

für alle $p \gg 0$ gibt, so ist M holonom (und insbesondere endlich erzeugt) mit $e_B(M) \leq c$.

Beweis. Sei $U \subset M$ ein endlich erzeugter $D(n)$-Untermodul. Sei FU die induzierte Filtrierung auf U, d. h. $F_p U := U \cap F_p M$. Sei GU eine gute Filtrierung auf U; sie existiert nach Lemma 4.4.12. Dann ist GU feiner als die ausschöpfende Filtrierung FU, d. h. es gibt ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $G_p U \subset F_{p+\ell} U$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ (siehe Lemma 4.4.14). Dies liefert

$$\begin{aligned}\dim G_p U \leq \dim F_{p+\ell} U \leq \dim F_{p+\ell} M &\leq \frac{c}{n!}(p+\ell)^n + c'(p+\ell)^{n-1} \\ &\leq \frac{c}{n!} p^n + (\text{Polynom vom Grad} \leq n-1 \text{ ausgewertet bei } p)\end{aligned}$$

für alle $p \gg 0$. Die linke Seite ist polynomial in p für $p \gg 0$ vom Grad $d_B(U)$ mit Leitkoeffizient $\frac{e_B(U)}{d_B(U)!}$. Es folgt $d_B(U) \leq n$, d. h. U ist holonom. Außerdem gilt $e_B(U) \leq c$: Dies ist trivial im Fall $U = 0$; sonst gilt $d_B(U) = n$ nach der Bernstein-Ungleichung, so dass beide Seiten der obigen Abschätzung polynomial vom selben Grad sind und wir somit die Leitkoeffizienten vergleichen können.

Ist M nicht endlich erzeugt, so konstruiert man leicht eine durch die natürlichen Zahlen indizierte echt aufsteigende Kette $0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_i \subsetneq \ldots$ von endlich erzeugten Untermoduln von M. Nach dem obigen Argument sind alle U_i holonom mit $e_B(U_i) \leq c$. Satz 4.6.25 (zusammen mit Aufgabe 4.6.24) liefert dann $i \leq \ell(U_i) \leq e_B(U_i) \leq c$ für alle $i \in \mathbb{N}$, was für große i nicht richtig sein kann. Dieser Widerspruch zeigt, dass M endlich erzeugt ist, so dass das obige Argument auf M selbst anwendbar ist. □

Ende der 14. Vorlesung am 21.11.2018.

Aufgabe 4.7.2 (Variation zu Lemma 4.7.1)**.** Betrachte $D(n)$ mit der Bernsteinfiltrierung. Sei M ein $D(n)$-Modul mit einer ausschöpfenden Filtrierung FM. Es gebe Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ein $m \in \{n+1, 2n\}$ mit

$$\dim F_p M \leq \frac{c}{m!} p^m + c' p^{m-1}$$

für alle $p \gg 0$. Kann man daraus schließen, dass M endlich erzeugt ist?

4.7.3. Seien M ein $D(n)$-Modul und $f \in \mathsf{k}[\underline{X}]$. Bezeichne $M[f^{-1}]$ die Lokalisierung von M als $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul an der multiplikativen Menge $\{1, f, f^2, \ldots\}$. Wir versehen $M[f^{-1}]$ mit der $D(n)$-Modulstruktur aus Aufgabe 2.7.12. Die Operation aller Elemente von k und aller X_i ist die offensichtliche, und ∂_i operiert per

(4.7.1)
$$\partial_i\Big(\frac{m}{f^\ell}\Big) = \partial_i(f^{-\ell} m) = -\ell \frac{\partial_i(f) m}{f^{\ell+1}} + \frac{\partial_i(m)}{f^\ell} = \frac{f^\ell \partial_i(m) - \ell f^{\ell-1} \partial_i(f)}{f^{2\ell}} = \frac{f^\ell \partial_i(m) - \partial_i(f^\ell) m}{f^{2\ell}},$$

wobei $m \in M$ und $\ell \in \mathbb{N}$.

Wendet man diese Konstruktion auf den $D(n)$-Modul $\mathsf{k}[\underline{X}]$ an, so erhält man eine $D(n)$-Modulstruktur auf $\mathsf{k}[\underline{X}, f^{-1}]$.

Die $D(n)$-Modulstrukturen auf $\mathsf{k}[X, f^{-1}]$ und auf $M[f^{-1}]$ vertragen sich wie folgt mit der $\mathsf{k}[X, f^{-1}]$-Modulstruktur auf $M[f^{-1}]$: Für alle $a \in \mathsf{k}[\underline{X}, f^{-1}]$ und alle $m \in M[f^{-1}]$ gilt

$$\partial_i(am) = \partial_i(a)m + a\partial_i(m). \tag{4.7.2}$$

Lemma 4.7.4. *Seien $f \in \mathsf{k}[\underline{X}] - 0$ und $s \in \mathsf{k}$. Sei M ein $D(n)$-Modul. Sei $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$ ein „formales Symbol", definiere $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}] := \{\mathbf{f}^{\mathbf{s}}\} \times M[f^{-1}]$ und schreibe $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m$ statt $(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}, m)$, für alle $m \in M[f^{-1}]$.*[54] *Dann gibt es auf $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}]$ genau eine $D(n)$-Modulstruktur mit*

$$\partial_i.(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m) = \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\frac{\partial_i(f)}{f}m + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(m)$$

für alle $m \in M[f^{-1}]$ und alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, die die offensichtliche $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modulstruktur auf $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}]$ erweitert.[55]

Ist M holonom, so ist $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}]$ ebenfalls holonom mit $e_B(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}]) \leq (\deg(f)+1)^n e_B(M)$.

Beweis. Kürze $N := \mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}]$ ab. Die Existenz und Eindeutigkeit der $D(n)$-Modulstruktur auf N folgt mit 2.7.10 aus den folgenden Erkenntnissen für beliebige $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt offensichtlich $[X_i, X_j] = 0$ auf N. Es gilt $[\partial_i, X_j] = \delta_{ij}$ auf N, denn für beliebiges $m \in M[f^{-1}]$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
[\partial_i, X_j](\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m) =& \partial_i(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}X_j m) - X_j\partial_i(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m) \\
=& \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_i(f)f^{-1}X_j m + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(X_j m) - \mathbf{f}^{\mathbf{s}}X_j s\partial_i(f)f^{-1}m - \mathbf{f}^{\mathbf{s}}X_j\partial_i(m) \\
=& \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(X_j m) - \mathbf{f}^{\mathbf{s}}X_j\partial_i(m) \\
\text{(siehe (4.7.2))} \quad =& \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(X_j)m \\
=& \delta_{ij}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m.
\end{aligned}$$

Es gilt $[\partial_i, \partial_j] = 0$ auf N, denn für beliebiges $m \in M[f^{-1}]$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial_i(\partial_j(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m) =& \partial_i(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_j(f)f^{-1}m) + \partial_i(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_j(m)) \\
=& \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s^2\partial_i(f)f^{-1}\partial_j(f)f^{-1}m + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_i\Big(\frac{\partial_j(f)}{f}m\Big) + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_i(f)f^{-1}\partial_j(m) + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(\partial_j(m)) \\
\text{(siehe (4.7.2))} \quad =& \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s^2\partial_i(f)\partial_j(f)f^{-2}m + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_i\Big(\frac{\partial_j(f)}{f}\Big)m \\
&+ \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\frac{\partial_j(f)}{f}\partial_i(m) + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_i(f)f^{-1}\partial_j(m) + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(\partial_j(m)) \\
=& \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s^2\partial_i(f)\partial_j(f)f^{-2}m + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\frac{\partial_i(\partial_j(f))}{f}m - \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\frac{\partial_j(f)\partial_i(f)}{f^2}m \\
&+ \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\frac{\partial_j(f)}{f}\partial_i(m) + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_i(f)f^{-1}\partial_j(m) + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(\partial_j(m))
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn man i und j vertauscht (das verwendet $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ auf $\mathsf{k}[\underline{X}]$ und M), und stimmt also mit $\partial_j(\partial_i(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m))$ überein.

[54] Es ist also $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}]$ eine Kopie von $M[f^{-1}]$, und wir unterscheiden Elemente, indem wir das formale Symbol $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$ davorschreiben oder nicht.

[55] Dabei ist $\partial_i(m)$ wie in (4.7.1) definiert. Da ∂_i die „Produktregel" $\partial_i.(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}m) = \partial_i(\mathbf{f}^{\mathbf{s}})m + \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\partial_i(m)$ erfüllt, genügt es, sich $\partial_i.(\mathbf{f}^{\mathbf{s}}) = \mathbf{f}^{\mathbf{s}}s\partial_i(f)f^{-1}$ zu merken. Dies wiederum merkt man sich leicht, wenn man $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$ als „s-te Potenz" f^s auffasst, denn „$\partial_i(f^s) = sf^{s-1}\partial_i(f) = f^s s\partial_i(f)f^{-1}$".

Sei nun M holonom. Sei GM eine gute Filtrierung auf M. Sei $d := \deg(f) = \mathrm{Bdeg}(f)$. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $\Gamma_p N$ die Menge aller Elemente von N, die sich als

$$\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{m}{f^p} \quad \text{mit } m \in G_{(d+1)p}M$$

schreiben lassen; setze $\Gamma_p N = 0$ für $p < 0$. Es ist klar, dass alle $\Gamma_p N$ Untervektorräume von N sind. Wir behaupten, dass sie N zu einem filtrierten Modul über dem filtrierten Ring $(D(n), BD(n))$ machen.

Seien $p \in \mathbb{N}$ und $m \in G_{(d+1)p}M$. Dann gilt $\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{m}{f^p} = \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{fm}{f^{p+1}}$ und

$$fm \in B_d D(n).G_{(d+1)p}M \subset G_{d+(d+1)p}M \subset G_{(d+1)(p+1)}M,$$

also $\Gamma_p N \subset \Gamma_{p+1} N$. Wegen $X_i \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{m}{f^p} = \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{X_i m}{f^p} = \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{f X_i m}{f^{p+1}}$ und

$$f X_i.m \subset B_d D(n) \cdot B_1 D(n).G_{(d+1)p}M \subset G_{(d+1)(p+1)}M$$

gilt $X_i.\Gamma_p N \subset \Gamma_{p+1} N$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\partial_i.\Big(\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{m}{f^p}\Big) &= \mathbf{f}^{\mathbf{s}} s \frac{\partial_i(f)}{f} \frac{m}{f^p} + \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \partial_i\Big(\frac{m}{f^p}\Big) \\
&= \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{s\partial_i(f)m}{f^{p+1}} + \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{\partial_i(m)}{f^p} - \mathbf{f}^{\mathbf{s}} p \frac{\partial_i(f)m}{f^{p+1}} \\
&= \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{f\partial_i(m) + (s-p)\partial_i(f)m}{f^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Da der Zähler in $G_{d+1+(d+1)p}M = G_{(d+1)(p+1)}M$ liegt, folgt $\partial_i.\Gamma_p N \subset \Gamma_{p+1} N$. Unsere Behauptung, dass die $\Gamma_p N$ eine Modul-Filtrierung auf N definieren, folgt. Diese Filtrierung ist ausschöpfend: Sei $\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{m}{f^\ell} \in N$. Weil GM ausschöpfend ist, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $m \in G_p M$. Wegen $pd + p = (d+1)p \leq (d+1)(p+\ell)$ gilt $f^p m \in G_{pd+p}M \subset G_{(d+1)(p+\ell)}M$ und somit $\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{m}{f^\ell} = \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{f^p m}{f^{p+\ell}} \in \Gamma_{p+\ell} N$.

Die Abbildung $G_{(d+1)p}M \to \Gamma_p N$, $m \mapsto \mathbf{f}^{\mathbf{s}} \frac{m}{f^p}$, ist offensichtlich linear und surjektiv. Ist M holonom, so folgt

$$\dim \Gamma_p N \leq \dim G_{(d+1)p}M \leq e_B(M) \cdot \frac{(d+1)^n}{n!} p^n + c p^{n-1}$$

für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $p \gg 0$. Also ist N nach Lemma 4.7.1 holonom mit $e_B(N) \leq e_B(M)(d+1)^n$. □

Beispiel 4.7.5. Der $D(n)$-Modul $\mathsf{k}[\underline{X}, f^{-1}]$ ist holonom. Dies folgt aus Lemma 4.7.4 angewandt auf $s = 0$ und den holonomen (nach Aufgabe 4.4.23, Gleichung (4.4.6)) $D(n)$-Modul $M = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Analog gilt: Ist M ein holonomer $D(n)$-Modul, so ist $M[f^{-1}]$ holonom.

Hausaufgaben: Vier der folgenden fünf Aufgaben.

(1) Aufgabe 4.7.14 ($\mathsf{k}[X, X^{-1}]\mathbf{X}^\alpha$ für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist einfacher holonomer $D(1)$-Modul mit Multiplizität 2)

(2) Aufgabe 4.7.34 (eindimensionaler Hebbarkeitssatz)

(3) (i) Sei $A \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathsf{k})$ die Unteralgebra der obere Dreiecksmatrizen. Dann ist $M := \mathsf{k}^2$ in offensichtlicher Weise ein A-Modul. Finde eine Kompositionsreihe von M. Finde zwei verschiedene Kompositionsreihe von A als Modul über sich selbst.

(ii) Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring R. Dann hat M genau dann endliche Länge, wenn M' und M'' endliche Länge haben, und es gilt $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$. Insbesondere ist die Länge ℓ eine additive Funktion auf der Kategorie der R-Moduln endlicher Länge.

(iii) Aufgabe 4.6.24 (Länge als Supremum)

(4) Beschreibe die meromorphe Fortsetzung aus Satz 4.7.43 im Fall $f(X) = X^2 \in \mathbb{R}[X]$ so gut wie möglich. Wo ist sie holomorph?
Hinweis: Beispiel 4.7.10

(5) Aufgabe 4.7.44 (nichtnegative reelle Polynome in einer Variablen)

4.7.2. *Das Bernstein-Sato-Polynom.*

4.7.6. Wir schreiben $D_{\mathsf{k}}(n)$ statt $D(n)$, wenn der Grundkörper wichtig ist.

Satz 4.7.7. *Sei $f \in \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n] - 0$ ein Polynom. Dann gibt es ein Polynom $B(s) \in \mathsf{k}[s] - 0$ und Elemente $T_0, \dots, T_m \in D(n) = D_{\mathsf{k}}(n)$, für ein $m \in \mathbb{N}$, so dass*

$$B(s).\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = (s^m T_m + \cdots + sT_1 + T_0) f.\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \tag{4.7.3}$$

in dem $D_{\mathsf{k}(s)}(n)$-Modul $N_s := \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$ aus Lemma 4.7.4 gilt, wobei wir über dem rationalen Funktionenkörper $\mathsf{k}(s)$ in der Variablen s und s als ausgezeichnetem Element arbeiten.

4.7.8. Da $N_s = \mathbf{f}^{\mathbf{s}}\mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$ als Modul über $\mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$ frei mit Basis $\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = \mathbf{f}^{\mathbf{s}}1$ ist, schreiben wir im Folgenden immer $N_s = \mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$.

Beweis. Wir schreiben abkürzend $D_{\mathsf{k}(s)}(n) := D_{\mathsf{k}(s)}$. Nach Aufgabe 4.4.23, Gleichung (4.4.6), ist $\mathsf{k}(s)[\underline{X}]$ ein holonmer $D_{\mathsf{k}(s)}$-Modul. Somit ist der $D_{\mathsf{k}(s)}$-Modul N_s nach Lemma 4.7.4 holonom, also endlich erzeugt und somit noethersch (da $D_{\mathsf{k}(s)}$ ein noetherscher Ring ist). Die aufsteigende Kette

$$D_{\mathsf{k}(s)} f\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \subset D_{\mathsf{k}(s)}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \subset D_{\mathsf{k}(s)} f^{-1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \subset D_{\mathsf{k}(s)} f^{-2}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \subset \dots$$

von $D_{\mathsf{k}(s)}$-Untermoduln wird also stationär. Es gibt also ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$f^{-\ell}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \in D_{\mathsf{k}(s)} f^{-\ell+1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}. \tag{4.7.4}$$

Wir behaupten, dass dann bereits

$$\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \in D_{\mathsf{k}(s)} f\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \tag{4.7.5}$$

gilt. Nehmen wir dies kurzzeitig an, so gibt es ein Element $\tilde{T} \in D_{\mathsf{k}(s)}$ mit $\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = \tilde{T} f\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$. Wegen $D_{\mathsf{k}} := D_{\mathsf{k}}(n) = \bigoplus \mathsf{k} X^\alpha \partial^\beta \subset D_{\mathsf{k}(s)} = \bigoplus \mathsf{k}(s) X^\alpha \partial^\beta$ gibt es ein Polynom $B(s) \in \mathsf{k}[s] - 0$ (den „Hauptnenner“), so dass $B(s)\tilde{T} \in \bigoplus \mathsf{k}[s] X^\alpha \partial^\beta = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} s^j D_{\mathsf{k}}$ gilt. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$ und Elemente $T_0, \dots, T_m \in D_{\mathsf{k}}$ mit $B(s)\tilde{T} = s^m T_m + \cdots + sT_1 + T_0$. Es folgt

$$B(s)\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = B(s)\tilde{T} f\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = (s^m T_m + \cdots + sT_1 + T_0) f\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$$

wie gewünscht.

Zu zeigen bleibt also, dass (4.7.5) aus (4.7.4) folgt.

Sei $m \in \mathbb{Z}$. Der Automorphismus

$$\begin{aligned} \theta = \theta_m \colon \mathsf{k}[s] &\to \mathsf{k}[s], \\ Q(s) &\mapsto Q(s+m), \end{aligned}$$

von k-Algebren induziert einen Körperautomorphismus θ von $\mathsf{k}(s)$ und einen k-Algebren-Automorphismus θ von $\mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$; letzterer fixiert f wegen $f \in \mathsf{k}[\underline{X}] \subset \mathsf{k}(s)[\underline{X}]$, d. h. es gilt $\theta(f) = f$. Außerdem erhalten wir einen k-Algebrenautomorphismus θ von $D_{\mathsf{k}(s)}$, der explizit durch $\theta(\sum c_{\alpha,\beta} X^\alpha \partial^\beta) = \sum \theta(c_{\alpha,\beta}) X^\alpha \partial^\beta$ definiert ist. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_m \colon N_s = \mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]\mathbf{f}^{\mathbf{s}} &\to N_s = \mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]\mathbf{f}^{\mathbf{s}}, \\ a\mathbf{f}^{\mathbf{s}} &\mapsto \theta(a) f^m \mathbf{f}^{\mathbf{s}}, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$. Offensichtlich ist $\tilde{\theta}$ k-linear. Wir behaupten, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D_{\mathsf{k}(s)} \times N_s \arrow[r] \arrow[d, "\theta\times\tilde{\theta}"] & N_s \arrow[d, "\tilde{\theta}"] \\ D_{\mathsf{k}(s)} \times N_s \arrow[r] & N_s \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei die horizontalen Abbildungen durch die $D_{\mathsf{k}(s)}$-Modulstruktur auf N_s gegeben sind, dass also

$$\tilde{\theta}(Sm) = \theta(S)\tilde{\theta}(m)$$

für alle $S \in \mathrm{D}_{\mathsf{k}(s)}$ und alle $m \in N_s$ gilt. Um dies zu zeigen, genügt es offensichtlich[56], die Gleichheit

$$\tilde{\theta}(\partial_i(a\mathbf{f}^{\mathbf{s}})) = \partial_i(\tilde{\theta}(a\mathbf{f}^{\mathbf{s}}))$$

für alle i mit $1 \le i \le n$ und alle $a \in \mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$ zu zeigen (dies verwendet $\theta(\partial_i) = \partial_i$). Wir berechnen einerseits (siehe [57] für die letzte Gleichheit)

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\partial_i(a\mathbf{f}^{\mathbf{s}})) &= \tilde{\theta}\big(\partial_i(a)\mathbf{f}^{\mathbf{s}} + as\partial_i(f)f^{-1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}\big) \\ &= \theta(\partial_i(a))f^m\mathbf{f}^{\mathbf{s}} + \theta(as\partial_i(f)f^{-1})f^m\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \\ &= \partial_i(\theta(a))f^m\mathbf{f}^{\mathbf{s}} + \theta(a)(s+m)\partial_i(f)f^{m-1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \partial_i(\tilde{\theta}(a\mathbf{f}^{\mathbf{s}})) &= \partial_i(\theta(a)f^m\mathbf{f}^{\mathbf{s}}) \\ &= \partial_i(\theta(a)f^m)\mathbf{f}^{\mathbf{s}} + \theta(a)f^m s\partial_i(f)f^{-1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} \\ &= \partial_i(\theta(a))f^m\mathbf{f}^{\mathbf{s}} + \theta(a)m\partial_i(f)f^{m-1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} + \theta(a)s\partial_i(f)f^{m-1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die gewünschte Gleichheit und somit Kommutativität des obigen Diagrams.

Nach (4.7.4) gibt es $S \in D_{\mathsf{k}(s)}$ mit

$$f^{-\ell}\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = Sf^{-\ell+1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}.$$

Anwenden von $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_\ell$ auf diese Gleichung liefert unter Verwendung der Kommutativität des obigen Diagramms

$$\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = f^{-\ell}f^\ell\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = \tilde{\theta}(f^{-\ell}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}) = \tilde{\theta}(Sf^{-\ell+1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}) = \theta(S)\tilde{\theta}(f^{-\ell+1}\mathbf{f}^{\mathbf{s}}) = \theta(S)\theta(f^{-\ell+1})f^\ell\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = \theta(S)f\mathbf{f}^{\mathbf{s}}.$$

Dies zeigt (4.7.5). □

[56] Die Gleichheit $\tilde{\theta}(X_i(a\mathbf{f}^{\mathbf{s}})) = X_i(\tilde{\theta}(a\mathbf{f}^{\mathbf{s}})) = \theta(X_i)(\tilde{\theta}(a\mathbf{f}^{\mathbf{s}}))$ ist offensichtich.

[57] Da ∂_i eine Derivation von $\mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$ als $\mathsf{k}(s)$-Algebra ist (dies folgt aus (4.7.2)) und θ ein Automorphismus der k-Algebra $\mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$, gilt die Formel $\theta(\partial_i(a)) = \partial_i(\theta(a))$ für alle $a \in \mathsf{k}(s)[\underline{X}, f^{-1}]$, wenn sie in den Spezialfällen $a \in \mathsf{k}(s)$, $a = X_j$, $a = f^k$ (für $k \in \mathbb{Z}$) gilt. Dies ist aber offensichtlich.

Definition 4.7.9. Sei $f \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n] - 0$. Die Menge aller Polynome $B(s)$ in $\mathsf{k}[s]$, für die $B(s).\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$ einer Darstellung (4.7.3) für geeignete $m \in \mathbb{N}$ und $T_0, \ldots, T_m \in D(n) = D_{\mathsf{k}}(n)$ genügt, ist offensichtlich ein Ideal. Nach Satz 4.7.7 ist dieses Ideal nicht das Nullideal. Das **Bernstein-Sato-Polynom** $B_f(s)$ **von** f ist der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger dieses Hauptideals, also das normierte Polynom minimalem Grades in diesem Ideal.

Beispiel 4.7.10. Sei $f = X_1^2 + \cdots + X_n^2$. Dann rechnet man leicht nach, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f \mathbf{f}^{\mathbf{s}} = 4(s+1)(s+\frac{n}{2})\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$$

gilt. Das Bernstein-Sato-Polynom $B_f(s)$ ist also ein Teiler von $(s+1)(s+\frac{n}{2})$. Laut Wikipedia gilt $B_f(s) = (s+1)(s+\frac{n}{2})$.

Beispiel 4.7.11. Für $f = X^2 + X$ ist $B_f(s) = (s+1)$ das zugehörige Bernstein-Sato-Polynom; es gilt

$$(s\underbrace{(-4)}_{T_1} + \underbrace{(2X+1)\partial - 4)}_{T_0} f\mathbf{f}^{\mathbf{s}} = (s+1)\mathbf{f}^{\mathbf{s}}.$$

Diese Aussagen hat das Computer-Algebra-System Singular im folgenden Dialog geliefert:

```
> LIB "dmod.lib";
> ring r = 0,(x),Dp;
> poly F = x^2+x;
> def A = operatorBM(F);
> setring A;
> bs;
s+1
> PS;
2*x*Dx+Dx-4*s-4
```

Ende der 15. Vorlesung am 28.11.2018 (Vorlesung am 26.11.ausgefallen).

Aufgabe 4.7.12. Das Bernstein-Sato-Polynom ändert sich nicht unter Körpererweiterungen: Sei $f \in \mathsf{k}[\underline{X}] - 0$ mit zugehörigem Bernstein-Sato-Polynom $B_f(s) \in \mathsf{k}[s]$. Sei $\mathsf{k} \subset \mathsf{k}'$ eine Körpererweiterung. Betrachtet man f als Element von $\mathsf{k}'[\underline{X}] - 0$, so bezeichne $B'_f(s) \in \mathsf{k}'[s]$ das zugehörige Bernstein-Sato-Polynom. Zeige $B'_f(s) = B_f(s)$.

Hinweis: Sei $D_{\mathsf{k}}[s] := D_{\mathsf{k}}(n)[s] := \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} s^j D_{\mathsf{k}}(n)$. Dann ist $M := \frac{\mathrm{D}_{\mathsf{k}}[s]\mathbf{f}^{\mathbf{s}}}{\mathrm{D}_{\mathsf{k}}[s]f\mathbf{f}^{\mathbf{s}}}$ ein Modul über $D_{\mathsf{k}}[s]$ und somit über dem Unterring $\mathsf{k}[s]$ (= dem Zentrum von $D_{\mathsf{k}}[s]$). Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Ker}(\mathrm{ev})}_{(B_f(s))} \to \mathsf{k}[s] \xrightarrow{\mathrm{ev}=\mathrm{ev}_{\mathbf{f}^{\mathbf{s}}}} M,$$

wobei $\mathrm{ev}_{\mathbf{f}^{\mathbf{s}}}(A(s)) = A(s)\mathbf{f}^{\mathbf{s}}$, und tensoriere diese mit dem (flachen) k-Modul k'.

Aufgabe 4.7.13. Sei M ein $D(n)$-Modul und $f \in \mathsf{k}[\underline{X}]$. Dann sind die $D(n)$-Moduln $\mathbf{f}^{\mathbf{s}+\mathbf{1}}M[f^{-1}]$ und $\mathbf{f}^{\mathbf{s}}M[f^{-1}]$ isomorph.

Hinweis: $\mathbf{f}^{\mathbf{s}+\mathbf{1}}n \mapsto \mathbf{f}^{\mathbf{s}}fn$.

Aufgabe 4.7.14. Sei $\alpha = \frac{1}{2}$ (oder ein beliebiges Element von $\mathsf{k} - \mathbb{Z}$) und betrachte den $D(1)$-Modul $N := \mathsf{k}[X, X^{-1}]\mathbf{X}^{\alpha}$.

(a) Als Vektorraum hat N die Basis $X^{\alpha+\ell} := X^\ell \mathbf{X}^\alpha$, für $\ell \in \mathbb{Z}$.
(b) Illustriere N ähnlich wie in (4.6.1).
(c) N hat Bernstein-Dimension $d(N) = 1$ und Bernstein-Multiplizität $e(N) = 2$; insbesondere ist N holonom (was eh schon bekannt ist, siehe Beispiel 4.7.5).
(d) N ist erzeugt von $\mathbf{X}^\alpha$.
(e) N ist einfach.
Hinweis: $X\partial$ operiert diagonalisierbar auf N.
Bemerkung: Es ist N ein Beispiel eines einfachen holonomen $D(1)$-Moduls, der Multiplizität $e(N) > 1$ hat, vgl. Satz 4.6.25.
(f) Es gilt $\mathrm{Ann}_{D(1)}(\mathbf{X}^\alpha) = D(1)(X\partial - \alpha)$.

4.7.3. *Etwas Funktionentheorie.*

4.7.15. Wir erinnern zunächst an zwei wohlbekannte Resultate aus der Funktionentheorie, nämlich die Sätze von Cauchy und von Morera, und an einen Satz über Doppelintegrale (eine einfache Version des Satzes von Fubini).

4.7.16. Ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C}$ ist eine Menge der Form

$$\{s + ti \mid s \in [a, b], t \in [c, d]\}$$

für reelle Zahlen $a \leq b$, $c \leq d$.

Satz 4.7.17 (Integralsatz von Cauchy (oder speziell Integralsatz für Rechteckswege))**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma\colon [a, b] \to U$ ein in U zusammenziehbarer geschlossener Integrationsweg (zum Beispiel der Weg, der ein achsenparalleles Rechteck in U einmal auf seinem Rand umläuft). Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. Das steht in jedem vernünftigen Lehrbuch zur Funktionentheorie. □

4.7.18. Der Satz von Morera ist eine Art Umkehrung des Satzes von Cauchy.

Satz 4.7.19 (Morera)**.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt für jedes achsenparalleles Rechteck $R \subset U$, dass das Integral von f über den Rand ∂R von R verschwindet, in Formeln*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0,$$

so ist f holomorph auf U.

Beweis. Das steht in jedem vernünftigen Lehrbuch zur Funktionentheorie. □

4.7.20. Zusammengefasst besagen die Sätze von Cauchy und Morera, dass eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn sie stetig ist und $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset U$ gilt.

Satz 4.7.21 (Doppelintegrale, einfache Version des Satzes von Fubini)**.** *Seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind die beiden Funktionen*

$$[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad [c, d] \to \mathbb{R},$$
$$s \mapsto \int_c^d f(s, t)dt, \qquad t \mapsto \int_a^b f(s, t)ds,$$

stetig und es gilt

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(s,t)dt\Big)ds = \int_c^d \Big(\int_a^b f(s,t)ds\Big)dt.$$

Definition 4.7.22. Gegeben $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$r^z := \exp(z\log(r)).$$

4.7.23. Wir schränken uns hier auf positive reelle Zahlen r ein, denn wir benötigen im Folgenden nur diesen Fall. Allgemeiner ist $r^z = \exp(z\log(r))$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \times \mathbb{C}$ oder etwas allgemeiner auf $(\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times \mathbb{C}$ (der erste Faktor ist die geschlitzte Ebene).

Lemma 4.7.24. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(v) > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ eine stetige komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}\Gamma_\varphi\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C},\\ z &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(v)^z\varphi(v)dv,\end{aligned}$$

holomorph.

Beweis. Wir verwenden den Satz 4.7.19 von Morera um zu zeigen, dass Γ_φ holomorph ist.

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass der Träger von φ in $W := [-a,a]^n$ enthalten ist. Dann gilt $\Gamma_\varphi(z) = \int_W f(v)^z\varphi(v)dv$.

Offensichtlich ist die Abbildung $f(v)^z\varphi(v)\colon \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $K \subset \mathbb{C}$ eine beliebige kompakte Teilmenge (etwa ein abgeschlossenes Rechteck), so ist $f(v)^z\varphi(v)\colon K \times W \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig. Daraus folgt sofort, dass Γ_φ stetig ist.

Sei $R \subset \mathbb{C}$ ein achsenparalleles Rechteck. Satz 4.7.21 über Doppelintegrale (minimal verallgemeinert) liefert

$$\int_{\partial R} \Gamma_\varphi(z)dz \quad = \quad \int_{\partial R}\Big(\int_W f(v)^z\varphi(v)dv\Big)dz \quad = \quad \int_W \Big(\underbrace{\int_{\partial R} f(v)^z\varphi(v)dz}_{=0}\Big)dv$$

wobei der unterklammerte Ausdruck nach dem Integralsatz 4.7.17 von Cauchy verschwindet, denn für fixiertes $v \in W$ ist $f(v)^z\varphi(v) = \exp(z\log f(v))\varphi(v)$ holomorph auf $\mathbb{C}$. □

4.7.25. Für $s \in \mathbb{R}$ setze $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>s} := \{z \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{Re}(z) > s\}$. Analog definieren wir etwa $\mathbb{C}_{\mathrm{Im}\leq s}$.

Definition 4.7.26. Gegeben $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ definieren wir

$$r^z := \begin{cases}\exp(z\log(r)) = e^{z\log(r)} & \text{falls } r > 0,\\ 0 & \text{falls } r = 0.\end{cases}$$

Dies ist konsistent mit Definition 4.7.22.

Lemma 4.7.27. *Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} &\to \mathbb{C},\\ (r,z) &\mapsto \begin{cases} r^z \cdot \log(r)^\ell = e^{z\log(r)} \cdot \log(r)^\ell & \textit{falls } r > 0,\\ 0 & \textit{falls } r = 0,\end{cases}\end{aligned}$$

stetig. Insbesondere ist die Abbildung $r^z\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \to \mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$. Für reelles r mit $0 < r < 1$ und $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ mit $\mathrm{Re}(z) \geq b := \frac{1}{2}\mathrm{Re}(z_0)$ gilt wegen $\log(r) < 0$

$$|r^z| = |e^{(\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z))\log(r)}| = e^{\mathrm{Re}(z)\log(r)} \leq e^{b\log(r)}.$$

Für $r \searrow 0$ geht dieser Ausdruck offensichtlich gegen Null. Also ist r^z stetig bei $(0, z_0)$. Da Stetigkeit an allen anderen Punkten offensichtlicht ist, ist r^z stetig.

Sei nun $\ell \in \mathbb{N}$. Wie oben sei $z_0 \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$. Für reelles r mit $0 < r < 1$ und $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ mit $\mathrm{Re}(z) \geq b := \frac{1}{2}\mathrm{Re}(z_0)$ gilt

$$|r^z \cdot \log(r)^\ell| \leq e^{b\log(r)} \cdot |\log(r)|^\ell = \left|\frac{\log(r)^\ell}{e^{-b\log(r)}}\right|.$$

Für die Stetigkeit bei $(0, z_0)$ genügt es zu zeigen, dass $\frac{\log(r)^\ell}{e^{-b\log(r)}}$ für $r \searrow 0$ gegen Null geht. Wir zeigen dies per Induktion über ℓ mit der Regel von de l'Hospital. Der Fall $\ell = 0$ wurde bereits behandelt (da $\frac{1}{e^{-b\log(r)}} = e^{b\log(r)} = r^b$). Gelte $\ell > 0$. Für $r \searrow 0$ geht der Nenner offensichtlich entweder gegen $+\infty$ (wenn ℓ gerade ist) oder gegen $-\infty$ (wenn ℓ ungerade ist), der Zähler $e^{-b\log(r)} = \frac{1}{r^b}$ geht nach dem bereits Bewiesenen gegen $+\infty$. Nach de l'Hospital ist

$$\frac{\ell\log(r)^{\ell-1} \cdot \frac{1}{r}}{e^{-b\log(r)} \cdot (-b) \cdot \frac{1}{r}} = -\frac{\ell}{b} \cdot \frac{\log(r)^{\ell-1}}{e^{-b\log(r)}}$$

für $r \searrow 0$ zu betrachten. Per Induktionsannahme geht der nicht-konstante zweite Faktor gegen Null. Dies zeigt das Lemma. □

Aufgabe 4.7.28. Der Leser überlege sich, warum sich die stetige Funktion $r^z\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \to \mathbb{C}$ nicht stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}\geq 0}$ ausdehnen läßt.

4.7.29. Das folgende Resultat ist eine Variante von Lemma 4.7.24: Wir lassen zu, dass f den Wert Null annimmt, fordern jedoch $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Lemma 4.7.30. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(v) \geq 0$ *für alle* $v \in \mathbb{R}^n$. *Sei* $\varphi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ *eine stetige komplexwertige Funktion auf* $\mathbb{R}^n$ *mit kompaktem Träger. Dann ist die Abbildung*[58]

$$\begin{aligned}\Gamma_\varphi\colon \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} &\to \mathbb{C},\\ z &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(v)^z\varphi(v)dv,\end{aligned}$$

holomorph.

Beweis. Nach Lemma 4.7.27 ist die Abbildung $f(v)^z\varphi(v)\colon \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig. Der Rest des Beweise ist vollkommen analog zum Beweis von Lemma 4.7.24. □

Definition 4.7.31. Definiere das Vorzeichen $\mathrm{sgn}(r)$ von $r \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathrm{sgn}(r) := \begin{cases} +1 & r > 0,\\ 0 & r = 0,\\ -1 & r < 0.\end{cases}$$

[58] Der Integrand ist eine stetige Funktion (siehe Lemma 4.7.27) mit kompaktem Träger. Somit existiert das Integral.

Lemma 4.7.32. [59] *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $|r|^z \colon \mathbb{R} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>m} \to \mathbb{C}$ eine m-fach stetig differenzierbare Funktion. Es gilt $(\partial_r(|r|^z))(r,z) = \operatorname{sgn}(r) \cdot z \cdot |r|^{z-1}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>1}$.*

Beispiel 4.7.33. Es ist $|r| = |r|^1$ nicht stetig differenzierbar bei $r = 0$. Für jedes reelle $t > 1$ ist $|r|^t$ stetig differenzierbar bei $r = 0$.

Beweis. Für $m = 0$ ist dies eine Teilaussage von Lemma 4.7.27. Definiere für $\ell \in \mathbb{N}$

$$F_\ell \colon \mathbb{R} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \to \mathbb{C},$$
$$(r,z) \mapsto \begin{cases} |r|^z \cdot \log(|r|)^\ell = e^{z\log(|r|)} \cdot \log(|r|)^\ell = e^{\frac{1}{2}z\log(r^2)} \cdot \log(r^2)^\ell \cdot \frac{1}{2^\ell} & \text{falls } r \neq 0, \\ 0 & \text{falls } r = 0. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist nach Lemma 4.7.27 stetig. Es gilt $F_0 = |r|^z$.

Für $r \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ berechnen wir

$$(\partial_z F_\ell)(r,z) = |r|^z \cdot \log(|r|)^{\ell+1} = F_{\ell+1}(r,z).$$

Trivialerweise gilt $(\partial_z F_\ell)(0,z) = F_{\ell+1}(0,z)$. Es gilt also $(\partial_z F_\ell) = F_{\ell+1}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$.

Für $r \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}(\partial_r F_\ell)(r,z) &= |r|^z \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r \cdot \log(|r|)^\ell + |r|^z \cdot \ell \cdot \log(r^2)^{\ell-1} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r \cdot \frac{1}{2^\ell} \\ &= |r|^z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(z \cdot \log(|r|)^\ell + \ell \cdot \log(r^2)^{\ell-1} \cdot \frac{1}{2^{\ell-1}} \right) \\ &= |r|^z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(z \cdot \log(|r|)^\ell + \ell \cdot \log(|r|)^{\ell-1} \right).\end{aligned}$$

Wegen $|r| \neq 0$ gilt $|r|^{z-1} = e^{z\log(|r|)} \cdot e^{-\log(|r|)} = |r|^z \cdot \frac{1}{|r|} = \operatorname{sgn}(r) \cdot |r|^z \cdot \frac{1}{r}$. Somit erhalten wir unter der Zusatzannahem $\operatorname{Re} z > 0$ (denn nur dann sind $F_\ell(r, z-1)$, $F_{\ell-1}(r, z-1)$ definiert)

$$(\partial_r F_\ell)(r,z) = \operatorname{sgn}(r) \cdot \begin{cases} z \cdot F_\ell(r, z-1) + \ell \cdot F_{\ell-1}(r, z-1) & \text{falls } \ell > 0, \\ z \cdot F_0(r, z-1) = z \cdot |r|^{z-1} & \text{falls } \ell = 0. \end{cases}$$

Die beiden Ausdrücke in der Fallunterscheidung und ihr Produkt mit $\operatorname{sgn}(r)$ sind auch bei $r = 0$ stetig. Aufgabe 4.7.34 liefert somit

$$(\partial_r F_\ell)(r,z) = \operatorname{sgn}(r) \cdot \begin{cases} z \cdot F_\ell(r, z-1) + \ell \cdot F_{\ell-1}(r, z-1) & \text{falls } \ell > 0, \\ z \cdot F_0(r, z-1) = z \cdot |r|^{z-1} & \text{falls } \ell = 0. \end{cases}$$

für alle $r \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>1}$.

Aufgrund der Äquivalenz von (stetig partiell differenzierbar) mit (stetig differenzierber) folgt, dass alle F_ℓ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>1}$ einmal stetig differenzierbar sind. Aus unseren Formeln für die partiellen Ableitungen sieht man dann sofort, dass alle F_ℓ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>m}$ m-fach stetig differenzierbar sind (der Vorfaktor $\operatorname{sgn}(r)$ verursacht keine Probleme). Insbesondere gilt dies für $F_0 = |r|^z$. Die Formel $(\partial_r(|r|^z))(r,z) = (\partial_r F_0)(r,z) = \operatorname{sgn}(r) \cdot z \cdot |r|^{z-1}$ haben wir bereits oben bewiesen. Das zeigt das Lemma. □

[59] Um später Satz 4.7.43 zu folgern, genügt es, eine einfache Teilaussage dieses Lemmas zu zeigen, siehe Bemerkung 4.7.37.

Aufgabe 4.7.34 (Eindimensionaler Hebbarkeitssatz)**.** Seien $a < t < b$ reelle Zahlen und sei $\varphi\colon I := (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, die auf $I - \{t\}$ stetig differenzierbar ist. Sei $g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig mit $g|_{I-\{t\}} = (\varphi|_{I-\{t\}})'$. Dann ist φ stetig differenzierbar mit $\varphi' = g$.

Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung (oder Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Ende der 16. Vorlesung am 3.12.2018.

4.7.4. *Meromorphe Fortsetzung mit Hilfe des Bernstein-Sato-Polynoms.*

Definition 4.7.35. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $t \in \mathbb{Z}$ definiere

$$\mathcal{M}_t := \{g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>t} \to \mathbb{C} \mid \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ ist } g|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>t+m}} \ m\text{-fach stetig differenzierbar}\}.$$

Die Einschränkungsabbildungen liefern für alle $t \leq t'$ Abbildungen $\mathcal{M}_t \to \mathcal{M}_{t'}$ komplexer Vektorräume. Diese Abbildungen sind kompatibel und bilden ein induktives System. Sei $\mathcal{M}$ sein Kolimes.

4.7.36. Explizit kann man $\mathcal{M}$ als die disjunkte Vereinigung aller $\mathcal{M}_t$ modulo der folgenden Äquivalenzrelation konstruieren: Elemente $g \in \mathcal{M}_t$ und $g' \in \mathcal{M}_{t'}$ sind genau dann äquivalent, wenn es ein $t'' \geq \max(t, t')$ gibt, so dass g und g' in $\mathcal{M}_{t''}$ übereinstimmen. Die Vektorraumstruktur auf $\mathcal{M}$ ist eindeutig dadurch charakterisiert, dass alle Abbildungen $\mathcal{M}_t \to \mathcal{M}$ $\mathbb{C}$-linear sind.

Bemerkung 4.7.37. Wenn wir die Definition 4.7.35 von $\mathcal{M}$ etwas abändern, brauchen wir nicht die volle Stärke von Lemma 4.7.32, um Satz 4.7.43 zu folgern: Es reicht zu wissen, dass für jedes fixierte $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>m}$ die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $r \mapsto |r|^z$, m-fach stetig differenzierbar ist. Dann definiert man $\mathcal{M}_t$ als Menge aller Abbildungen $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>t} \to \mathbb{C}$, für die gilt: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>t+m}$ ist die Abbildung $g(-, z)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ m-fach stetig differenzierbar (man verlangt also nicht einmal Stetigkeit von g in der Variablen z). Dann definiert man $\mathcal{M}$ als den Kolimes der $\mathcal{M}_t$. Der im Folgenden erklärte Beweis von Satz 4.7.43 funktioniert auch mit dieser Definition von $\mathcal{M}$.

4.7.38. Für jedes $a \in \mathbb{R}[s]$ gilt $a(z) \in \mathcal{M}_0$. Für jedes $a = \frac{b}{c} \in \mathbb{R}(s)$ wähle man $t \in \mathbb{Z}$ so groß, dass jede der endlich vielen Nullstellen von c Realteil $\leq t$ hat. Dann ist $a(z) = \frac{b(z)}{c(z)}$ ein Element von $\mathcal{M}_t$. Wir folgern, dass man jedes Element $a \in \mathbb{R}(s)[X_1, \ldots, X_n]$ für ein geeignetes $t \in \mathbb{Z}$ als Element $a(v, z)$ von $\mathcal{M}_t$ und von $\mathcal{M}$ auffassen kann.

Lemma 4.7.39. *Die relle Vektorraumstruktur auf $\mathcal{M}$ läßt sich in genau einer Weise zu einer $D_{\mathbb{R}(s)}(n)$-Modulstruktur fortsetzen*[60]*, so dass gilt: Ist $m \in \mathcal{M}$ durch $g \in \mathcal{M}_t$ repräsentiert, so ist*

- *$X_i.m$ durch die Funktion $(X_i g)\colon (v, z) \mapsto X_i(v)g(v, z) = v_i g(v, z)$ in $\mathcal{M}_t$ repräsentiert;*
- *$\partial_i.m$ durch die Funktion $\partial_i g = \frac{\partial g}{\partial v_i}$ in $\mathcal{M}_{t+1}$ repräsentiert;*
- *für alle Polynome $a(s), b(s) \in \mathbb{R}[s]$ mit $b(s) \neq 0$ das Element $\frac{a(s)}{b(s)}.m$ durch die Funktion $a(z)b(z)^{-1}g \in \mathcal{M}_{t'}$ repräsentiert, wobei t' eine beliebige natürliche Zahl ist, die echt größer als die Realteile der endlich vielen Nullstellen von $b(z)$ ist.*

Beweis. Dies ist klar. □

[60] analog kann man die komplexe Vektorraumstruktur zu einer $D_{\mathbb{C}(s)}(n)$-Modulstruktur fortsetzen

Annahme 4.7.40. Wir fixieren ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f(v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

4.7.41. Nach Lemma 4.7.32 ist die Funktion $f(v)^z$ in $\mathcal{M}_0$. Für jedes $\ell \in \mathbb{Z}$ ist somit die Funktion $f(v)^{z-\ell}$ in $\mathcal{M}_\ell$ und liefert ein Element $f(v)^{z-\ell}$ in $\mathcal{M}$.

Proposition 4.7.42. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} N_s = \mathbb{R}(s)[\underline{X}, f^{-1}]\mathbf{f^s} &\to \mathcal{M}, \\ \frac{a}{f^\ell}\mathbf{f^s} &\mapsto a(v,z)f(v)^{z-\ell}, \end{aligned}$$

für $a \in \mathbb{R}(s)[\underline{X}]$ und $\ell \in \mathbb{N}$, ist ein (wohldefinierter) Morphismus von $D_{\mathbb{R}(s)}(n)$-Modulm; hierbei ist N_s wie in Lemma 4.7.4, wobei wir über dem rationalen Funktionenkörper $\mathbb{R}(s)$ in der Variablen s und s als ausgezeichnetem Element arbeiten.

Beweis. Für die Wohldefiniertheit genügt es,

$$a(v,z)f(v)^{z-\ell} = a(v,z)f(v)f(v)^{z-\ell-1}$$

(für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z$ genügend groß) zu zeigen. Im Fall $f(v) = 0$ ist das trivial. Im Fall $f(v) \neq 0$ folgt dies aus $r^{z+z'} = r^z \cdot r^{z'}$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $z, z' \in \mathbb{C}$.

Es genügt,

$$\psi\Big(\partial_i(\frac{a}{f^\ell}\mathbf{f^s})\Big) = \partial_i\Big(\psi(\frac{a}{f^\ell}\mathbf{f^s})\Big)$$

zu zeigen. Wir berechnen einerseits

$$\begin{aligned} \psi\Big(\partial_i(\frac{a}{f^\ell}\mathbf{f^s})\Big) &= \psi\Big(\partial_i(\frac{a}{f^\ell})\mathbf{f^s} + \frac{a}{f^\ell}\partial_i(\mathbf{f^s}))\Big) \\ &= \psi\Big(\frac{\partial_i(a)}{f^\ell}\mathbf{f^s} - \frac{\ell a \partial_i(f)}{f^{\ell+1}}\mathbf{f^s} + s\frac{a\partial_i(f)}{f^{\ell+1}}\mathbf{f^s})\Big) \\ &= (\partial_i a)(v,z)f(v)^{z-\ell} + (z-\ell)a(v,z)(\partial_i f)(v)f(v)^{z-\ell-1} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \partial_i\Big(\psi(\frac{a}{f^\ell}\mathbf{f^s})\Big) &= \partial_i\Big(a(v,z)f(v)^{z-\ell}\Big) \\ \text{(Lemma 4.7.32)} \qquad &= (\partial_i a)(v,z)f(v)^{z-\ell} + a(v,z)(z-\ell)f(v)^{z-\ell-1}(\partial_i f)(v). \end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Gleichheit. □

Satz 4.7.43 (Bernstein-Gelfand 1969, Atiyah 1970, Bernstein [Ber72] - positive Antwort zu Problem I (leicht vereinfacht) in Gelfands ICM-Beitrag [Gel57, S. 262-263])**.** *Sei $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit $f(v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ eine glatte komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Dann läßt sich die nach Lemma 4.7.30 holomorphe Funktion*

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi \colon \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(v)^z \varphi(v) dv, \end{aligned}$$

meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ ausdehnen. Diese Ausdehnung ist holomorph auf $\mathbb{C} - \bigcup_{k=1}^r (\alpha_i - \mathbb{N})$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die Nullstellen des Bernstein-Sato-Polynoms $B_f(s)$ sind.

Beweis nach [Ber72]. Sei $B(s) = B_f(s) \in \mathbb{R}[s]$ das Bernstein-Sato-Polynom von f (vgl. Definition 4.7.9 und Satz 4.7.7). Seien $T_0, \dots, T_m \in D_{\mathbb{R}}(n)$ mit

$$B(s).\mathbf{f^s} = (s^m T_m + \cdots + sT_1 + T_0).f\mathbf{f^s}$$

in dem $D_{\mathbb{R}(s)}(n)$-Modul $N_s = \mathbb{R}(s)[\underline{X}, f^{-1}]\mathbf{f^s}$. Wir wenden auf diese Gleichung den $D_{\mathbb{R}(s)}(n)$-Modulmorphismus aus Proposition 4.7.42 an und erhalten die (Funktional-)Gleichung

$$B(z)f(v)^z = (z^m T_m + \cdots + zT_1 + T_0)f(v)^{z+1} \tag{4.7.6}$$

in $\mathcal{M}$. Diese Gleichung gilt dann bereits in $\mathcal{M}_t$ für eine geeignete natürliche Zahl $t \geq -1+d$, wobei d (minimal) so gewählt ist, dass alle T_i Differentialoperatoren der Ordnung $\leq d$ sind.[61] Beachte, dass $f(v)^{z+1}$ d-fach stetig differenzierbar ist, falls $\mathrm{Re}(z) > -1+d$ (Lemma 4.7.32).

Seien $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Per partieller Integration gilt auf Grund des kompakten Trägers von φ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i g)(v) \cdot \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^n} g(v) \cdot (-\partial_i \varphi)(v) dv.$$

Trivialerweise gilt $\int (X_i g) \cdot \varphi dv = \int g \cdot (X_i \varphi) dv$. Per Induktion zeigt man für alle $S \in D_{\mathbb{R}}(n)$ die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Sg)(v) \cdot \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^n} g(v) \cdot (\tau(S)\varphi)(v) dv,$$

wobei $\tau\colon D_{\mathbb{R}}(n) \xrightarrow{\sim} D_{\mathbb{R}}(n)^{\mathrm{op}}$ der Hauptantiautomorphismus aus Satz 2.4.3 ist. Wenn m die Ordnung des Differentialoperators τ ist, so reicht es hier natürlich anzunehmen, dass g m-fach stetig differenzierbar ist (und analog für φ, was uns aber egal ist).

Für $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>t}$ erhalten wir (da $f(v)^{z+1}$) dann d-fach stetig differenzierbar ist)

$$\begin{aligned}
B(z)\Gamma_\varphi(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} B(z) f(v)^z \cdot \varphi(v) dv \\
\text{(siehe (4.7.6))} \quad &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\ell=0}^m z^\ell T_\ell(f(v)^{z+1}) \cdot \varphi(v) dv \\
&= \sum_{\ell=0}^m z^\ell \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(v)^{z+1} \cdot \big(\tau(T_\ell)\varphi\big)(v) dv \\
&= \sum_{\ell=0}^m z^\ell \cdot \Gamma_{\tau(T_\ell)\varphi}(z+1).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.7.30 sind alle $\Gamma_{\tau(T_\ell)\varphi}$ auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ holomorph. Also ist $\sum_{\ell=0}^m z^\ell \cdot \Gamma_{\tau(T_\ell)\varphi}(z+1)$ auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-1}$ holomorph. Nach demselben Lemma ist $B(z)\Gamma_\varphi(z)$ auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ holomorph. Die soeben für $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>t}$ bewiesene Gleichheit

$$B(z)\Gamma_\varphi(z) = \sum_{\ell=0}^m z^\ell \cdot \Gamma_{\tau(T_\ell)\varphi}(z+1)$$

ist nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen dann sogar für alle $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ gültig. Dies bedeutet, dass sich $B(z)\Gamma_\varphi(z)$ (eindeutig) zu einer auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-1}$ holomorphen Funktion ausdehnen läßt.

[61] Vielleicht kann man sogar $t = -1+d$ annehmen, jedoch ist das für uns nicht relevant.

Da φ hier beliebig war, lassen sich alle $B(z)\Gamma_{\tau(T_\ell)\varphi}(z)$ ebenso zu auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-1}$ holomorphen Funktionen ausdehnen, d. h. $B(z+1)\Gamma_{\tau(T_\ell)\varphi}(z+1)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-2}$. Multiplizieren der obigen Gleichheit mit $B(z+1)$ liefert die Gleichheit

$$B(z+1)B(z)\Gamma_\varphi(z) = \sum_{\ell=0}^{m} z^\ell \cdot B(z+1)\Gamma_{\tau(T_\ell)\varphi}(z+1)$$

holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-1}$. Da die rechte Seite auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-2}$ holomorph ist, läßt sich die linke Seite (eindeutig) holomorph auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-2}$ fortsetzen.

Iterieren des Arguments zeigt, dass sich

$$B(z+m)\cdots B(z+1)B(z)\Gamma_\varphi(z)$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ zu einer auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-m-1}$ holomorphen Funktion h_m fortsetzen läßt. Die meromorphe Funktion $\Gamma_\varphi(z) = \frac{h_m(z)}{B(z+m)\cdots B(z+1)B(z)}$ auf $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>-m-1}$ hat höchstens bei den Nullstellen des Nenners Pole, also bei den Werten $\alpha_i - m, \alpha_i - m + 1, \ldots, \alpha_i - 1, \alpha_i$, für $i = 1, \ldots, r$. Folglich läßt sich Γ_φ (eindeutig) zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen, deren Pole in $\bigcup_{i=1}^r (\alpha_i - \mathbb{N})$ liegen. $\square$

Aufgabe 4.7.44. Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein reelles Polynom in einer Variablen X. Dann gilt genau dann $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wenn f eine Summe zweier Quadrate reeller Polynome ist (es gibt also $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ mit $f = P^2 + Q^2$).

Hinweis: Fundamentalsatz der Algebra.

Wer mehr über verwandte Fragestellungen lernen möchte sei auf Wikipedia, *positive polynomial*, und Hilberts 17. Problem verwiesen.

Ende der 17. Vorlesung am 5.12.2018.

5. Hilbert-Dimension eines Moduls und Krull-Dimension seines Trägers

5.1. **Träger eines Moduls.**

Annahme 5.1.1. Im gesamten Abschnitt 5.1 sei R ein kommutativer Ring.

5.1.2. Das **Spektrum** oder **Primidealspektrum** $\operatorname{Spec} R$ von R ist die Menge der Primideale von R. Das **Maximalspektrum** oder **Maximalidealspektrum** $\operatorname{MaxSpec} R$ von R ist die Menge der maximalen Ideale von R.

Bemerkung 5.1.3. Im Folgenden geben wir diverse Definitionen und Resultate parallel für $\operatorname{Spec} R$ und für $\operatorname{MaxSpec} R$. Ignoriert man die Farbe grün, erhält man die Version für $\operatorname{Spec} R$. Wenn man den Unterschied zwischen Grün und Schwarz ignoriert, erhält man die Version für $\operatorname{MaxSpec} R$.

In der Vorlesung beschränken wir uns meist auf die grüne Version, denn diese ist der klassischen algebraischen Geometrie über einem algebraischen abgeschlossenen Körper nahe und der Anschauung hoffentlich besser zugänglich; wir wollen dem Leser jedoch nicht die analogen Resultate für $\operatorname{Spec} R$ vorenthalten, da diese natürlicher sind, wenn man in der algebraischen Geometrie mit Schemata arbeitet.

5.1.4. Gegeben eine Teilmenge I von R sei $\mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ die Menge aller Primideale über I und $\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I) = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec} R \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ die Menge aller maximalen

Ideale über I. Aus $I \subset I'$ folgt $\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I) \supset \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I')$. Ist J das von I erzeugte Ideal, so gilt $\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(J) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(\sqrt{J})$. Die Formeln

$$\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(0) = \mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R,$$

$$\bigcap_{s \in S} \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I_s) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(\bigcup_{s \in s} I_s) \qquad \text{für Teilmengen } I_s \text{ von } R,$$

$$\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I) \cup \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(J) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I \cap J) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I \cdot J) \qquad \text{für Ideale } I,\ J \text{ von } R \tag{5.1.1}$$

zeigen, dass die Mengen der Form $\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I)$, für $I \subset R$, die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R$ definieren. Diese Topologie heißt **Zariski-Topologie**.

Definition 5.1.5. Sei M ein R-Modul. Die Menge

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R \mid M_{\mathfrak{m}} \neq 0\}$$

heißt der **Träger** von M (englisch *support*).[62]

Definition 5.1.6. Gegeben ein R-Modul M ist

$$\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

der **Annihilator von** M in R. Für $m \in M$ ist

$$\mathrm{Ann}(m) = \mathrm{Ann}_R(m) := \{r \in R \mid rm = 0\}$$

der **Annihilator von** m in R. Etwas allgemeiner ist der Annihilator einer beliebigen Teilmenge T von M durch $\mathrm{Ann}_R(T) := \bigcap_{m \in T} \mathrm{Ann}_R(m)$ definiert.

5.1.7. Die Annihilatoren $\mathrm{Ann}(M)$ und $\mathrm{Ann}(m)$ sind Ideale von M. Für fixiertes $m \in M$ liefert die Abbildung $r \mapsto rm$ einen Isomorphismus $\frac{R}{\mathrm{Ann}(m)} \xrightarrow{\sim} Rm$ von R-Moduln.

Lemma 5.1.8. *Sei M ein R Modul. Dann ist die Abbildung $M \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}\, R} M_{\mathfrak{m}}$ injektiv. Insbesondere sind äquivalent:*

- $M = 0$*;*
- $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ *(oder äquivalent* $\mathrm{Supp}(M) = \emptyset$*);*
- $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}\, R$ *(oder äquivalent* $\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) = \emptyset$*).*

Beweis. Sei $m \in M$ mit $\frac{m}{1} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}\, R$. Betrachte $I := \mathrm{Ann}(m)$. Nehmen wir an, dass $I \subsetneq R$ gilt. Dann liegt I in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von R (dies verwendet Zorns Lemma). Wegen $\frac{m}{1} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$ gibt es ein $s \in R - \mathfrak{m}$ mit $sm = 0$. Dies liefert den Widerspruch $s \in I \subset \mathfrak{m}$. Also gilt $I = R$ und somit $m = 1m = 0$. □

Lemma 5.1.9. *Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, so gilt*

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) = \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M') \cup \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M'').$$

[63]

Beweis. Da Lokalisieren ein exakter Funktor ist, ist für jedes[64] $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R$ die Sequenz $0 \to M'_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}} \to M''_{\mathfrak{m}} \to 0$ exakt. □

[62] Man beachte, dass $\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M)$ nur eine Teilmenge von $\mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R$ ist. Falls es sich um eine abgeschlossene Teilmenge handelt, kann man sie mit der Struktur eines reduzierten Schemas versehen.

[63] Insbesondere haben isomorphe Moduln denselben Träger.

[64] Ignoriert man die Farbe grün, ist es sinnvoller, ein Element von $\mathrm{Spec}\, R$ als $\mathfrak{p}$ zu notieren.

Lemma 5.1.10. *Seien $(M_j)_{j\in J}$ eine Familie von Untermoduln eines R-Moduls M mit $M = \sum_{j\in J} M_j$. Dann gilt*

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) = \bigcup_{j\in J} \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M_j).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R$. Da Lokalisieren exakt ist, ist $(M_j)_{\mathfrak{m}}$ ein Untermodul von $M_{\mathfrak{m}}$, und es gilt offensichtlich $M_{\mathfrak{m}} = \sum_{j\in J}(M_j)_{\mathfrak{m}}$. □

Lemma 5.1.11. *Ist $I \subset R$ ein Ideal, so gilt*

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(R/I) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I).$$

Beweis. Für $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R$ sind die folgenden Aussagen offensichtlich äquivalent:

- $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(R/I)$;
- $(R/I)_{\mathfrak{m}} = 0$;
- $\frac{\overline{1}}{1} = 0$ in $(R/I)_{\mathfrak{m}}$;
- es gibt ein $s \in R - \mathfrak{m}$ mit $\overline{s} = s\overline{1} = 0$ in R/I;
- es gibt ein $s \in R - \mathfrak{m}$ mit $s \in I$;
- $I \not\subset \mathfrak{m}$;
- $\mathfrak{m} \notin \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I)$.

□

Lemma 5.1.12. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist der Träger von M eine abgeschlossene Teilmgenge von $\mathrm{Max}\mathrm{Spec}\, R$. Genauer gilt*

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(\mathrm{Ann}(M)).$$

Beweis. Gelte $M = \sum_{i=1}^{\ell} Rm_i$ für geeignete $m_1, \ldots, m_\ell \in M$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) &= \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(Rm_i) && \text{(Lemma 5.1.10)}\\
\text{(siehe 5.1.7)} \qquad &= \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(R/\mathrm{Ann}(m_i))\\
\text{(Lemma 5.1.11)} \qquad &= \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(\mathrm{Ann}(m_i))\\
\text{(Gleichung (5.1.1))} \qquad &= \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(\bigcap_{i=1}^{\ell} \mathrm{Ann}(m_i)) = \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(\mathrm{Ann}(M)).
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.13. *Seien M ein R-Modul und $I \subset R$ ein Ideal mit $I^n M = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) \subset \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I).$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M) \subset \mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(\mathrm{Ann}_R(M))$.

Beweis. Sei $\mathfrak{m} \notin \mathcal{V}_{\text{Max}}(I)$, d. h. $I \not\subset \mathfrak{m}$. Sei $i \in I - \mathfrak{m}$. Dann gilt $\frac{i}{1} \in (R_\mathfrak{m})^\times$, d. h. $\frac{i}{1}$ operiert invertierbar auf $M_\mathfrak{m}$. Es folgt $M_\mathfrak{m} = (\frac{i}{1})^n M_\mathfrak{m} = \frac{i^n}{1} M_\mathfrak{m} = 0$, also $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M)$. Dies zeigt $\operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M) \subset \mathcal{V}_{\text{Max}}(I)$. Die letzte Behauptung folgt nun aus $\operatorname{Ann}_R(M)M = 0$. [65] □

Lemma 5.1.14. *(nicht in Vorlesung benötigt) Seien M ein endlich erzeugter R-Modul und $I \subset R$ ein Ideal. Dann gilt*

$$\operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M/IM) = \operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M) \cap \mathcal{V}_{\text{Max}}(I).$$

Beweis. Inklusion $\subset$: Aus Lemma 5.1.9 folgt $\operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M/IM) \subset \operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M)$. Aus Lemma 5.1.13 und $I\frac{M}{IM} = 0$ folgt $\operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M/IM) \subset \mathcal{V}_{\text{Max}}(I)$. Dies zeigt die gewünschte Inklusion. (Bisher haben wir nicht verwendet, dass M endlich erzeugt ist.)

Inklusion $\supset$: Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M) \cap \mathcal{V}_{\text{Max}}(I)$. Es gelten also $M_\mathfrak{m} \neq 0$ und $I \subset \mathfrak{m}$. Nehmen wir an $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M/IM)$ an, also $(M/IM)_\mathfrak{m} = 0$. Die kurze exakte Sequenz $0 \to IM \to M \to M/IM \to 0$ liefert per Anwenden des exakten Funktors „Lokalisieren bei $\mathfrak{m}$“ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \underbrace{(IM)_\mathfrak{m}}_{=I_\mathfrak{m} M_\mathfrak{m}} \to M_\mathfrak{m} \to \underbrace{(M/IM)_\mathfrak{m}}_{=0} \to 0$$

von $R_\mathfrak{m}$-Moduln. Es gilt also $I_\mathfrak{m} M_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}$. Wegen $I \subset \mathfrak{m}$ folgt $I_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\mathfrak{m}$ und dann $\mathfrak{m}_\mathfrak{m} M_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}\mathfrak{m}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $R_\mathfrak{m}$ ist und $M_\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugter $R_\mathfrak{m}$-Modul ist, zeigt das Lemma von Nakayama $M_\mathfrak{m} = 0$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Also muss $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M/IM)$ gelten. □

Bemerkung 5.1.15. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper (in dieser Bemerkung darf die Charakteristik beliebig sein). Betrachte $A = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$.

Gegeben $I \subset A$ definiere $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I) := \{x \in \mathsf{k}^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$. Gegeben $Z \subset \mathsf{k}^n$ definiere $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(Z) := \{f \in A \mid f(z) = 0 \text{ für alle } z \in Z\}$. In der kommutativen Algebra wurde der *Starke Hilbertscher Nullstellensatz* gezeigt: Ist I ein Ideal, so gilt

$$\mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I)) = \sqrt{I}. \tag{5.1.2}$$

Diese Aussage impliziert, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathsf{k}^n &\xrightarrow{\sim} \operatorname{MaxSpec} A, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \mathfrak{m}_x := \mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\{x\}) = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) = \operatorname{Ker}(\operatorname{ev}_x), \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

bijektiv ist: Sie ist offensichtlich wohldefiniert. Wegen $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\mathfrak{m}_x) = \{x\}$ ist sie injektiv. Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec} A$. Wegen $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\mathfrak{m})) = \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ ist $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\mathfrak{m})$ nicht leer (denn $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\emptyset) = A$). Sei $x \in \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\mathfrak{m})$. Es folgt $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\{x\}) \supset \mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$. Da $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\{x\})$ ein echtes Ideal ist und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, folgt Gleichheit $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(x) = \mathfrak{m}$. Dies zeigt die Surjektivität.

Mit den Mengen der Form $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I)$ als abgeschlossene Teilmengen ist k^n ein topologischer Raum (man nennt diese Topologie ebenfalls **Zariski-Topologie**). Die obige Abbildung ist ein Homöomorphismus topologischer Räume, denn die Teilmengen $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I)$ und $\mathcal{V}_{\text{Max}}(I)$ entsprechen einander.

[65] Alternativbeweis: Aus $M = \sum_{m \in M} Rm$ erhält man wie im Beweis von Lemma 5.1.12 $\operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{V}_{\text{Max}}(\operatorname{Ann}_R(m))$, jedoch können wir diese im allgemeinen unendliche Vereinigung nicht mit Gleichung (5.1.1) vereinfachen. Für jedes $m \in M$ gilt $\operatorname{Ann}_R(M) \subset \operatorname{Ann}_R(m)$ und somit $\mathcal{V}_{\text{Max}}(\operatorname{Ann}_R(M) \supset \mathcal{V}_{\text{Max}}(\operatorname{Ann}_R(m))$. Es folgt $\operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M) \subset \mathcal{V}_{\text{Max}}(\operatorname{Ann}_R(M))$. Aus $I^n M = 0$ folgt $I^n \subset \operatorname{Ann}_R(M)$ und somit $\mathcal{V}_{\text{Max}}(I) = \mathcal{V}_{\text{Max}}(I^n) \supset \mathcal{V}_{\text{Max}}(\operatorname{Ann}_R(M)) \supset \operatorname{Supp}_{\text{Max}}(M)$.

Unter der Abbildung, die einem Radikalideal I von A die Teilmenge $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I)$ von k^n bzw. die Teilmenge $\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(I)$ von $\operatorname{MaxSpec} A$ bzw. die Teilmenge $\mathcal{V}(I)$ von $\operatorname{Spec} A$ zuordnet, entsprechen sich bijektiv:

- Radikalideale in A, abgeschlossene Teilmengen von k^n, abgeschlossene Teilmengen von $\operatorname{MaxSpec} A$, abgeschlossene Teilmengen von $\operatorname{Spec} A$;
- Primideale in A (also Elemente von $\operatorname{Spec} A$), irreduzible abgeschlossene Teilmengen von k^n, irreduzible abgeschlossene Teilmengen von $\operatorname{MaxSpec} A$, irreduzible abgeschlossene Teilmengen von $\operatorname{Spec} A$;

Man beachte, dass diese Zuordnungen inklusionsumkehrend sind: Sind I und J Radikalideale von A, so gilt genau dann $I \subset J$, wenn $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I) \supset \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(J)$ gilt, und analog für $\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(-)$ und $\mathcal{V}(-)$.

Bemerkung 5.1.16. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper (in dieser Bemerkung darf die Charakteristik beliebig sein). Sei $J \subset A := \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Dann restringiert der Homöomorphismus (5.1.3) zu einem Homöomorphismus

$$\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(J) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(J),$$

wobei beide Teilmengen mit der Unterraumtopologie versehen sind. Sei $\mathrm{can}\colon A \to \frac{A}{J}$ die offensichtliche Abbildung. Dann ist die (wohldefinierte) Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{MaxSpec} \frac{A}{J} &\to \operatorname{MaxSpec} A, \\ \mathfrak{n} &\mapsto \mathrm{can}^{-1}(\mathfrak{n}), \end{aligned}$$

eine abgeschlossene Einbettung (d. h. sie ist stetig, abgeschlossen und injektiv) mit Bild $\mathcal{V}(J)$. Kombiniert erhalten wir Homöomorphismen

$$\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(J) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(J) \xleftarrow{\sim} \operatorname{MaxSpec} \frac{A}{J}.$$

Man kann sich also $\operatorname{MaxSpec} \frac{A}{J}$ geometrisch als $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(J)$ vorstellen.

Da jede endlich erzeugte k-Algebra B zu einer Algebra der Form $\frac{A}{J}$ isomorph ist, kann man nach Wahl eines Isomorpismus $B \xrightarrow{\sim} \frac{A}{J}$ den topologischen Raum $\operatorname{MaxSpec} B$ mit $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(J)$ identifizieren.

Ende der 18. Vorlesung am 10.12.2018.

Definition 5.1.17. Sei k algebraisch abgeschlossen. Sei M ein $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul. Wir definieren den **Träger von** M (in k^n) durch

$$\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M) := \{x \in \mathsf{k}^n \mid M_{\mathfrak{m}_x} \neq 0\}.$$

5.1.18. Unter dem Homöomorphismus (5.1.3) entsprechen sich die Teilmengen $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$ und $\operatorname{Supp}_{\mathrm{Max}}(M)$. Alle Aussagen dieses Abschnitts 5.1 über den Träger $\operatorname{Supp}_{\mathrm{Max}}(M)$ eines R-Moduls M lassen sich somit im Fall $R = \mathsf{k}[\underline{X}]$ als Aussagen über $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$ auffassen. Dabei ist jeder Ausdruck $\mathcal{V}_{\mathrm{Max}}(-)$ durch $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(-)$ zu ersetzen. Wir werden dies im Folgenden oft stillschweigend tun.

5.2. **Hilfreiche Filtrierung für endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen.**

5.2.1. Das folgende Resultat wird im Beweis von Satz 5.3.13 verwendet.

Proposition 5.2.2. *Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es eine endliche Folge*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M$$

von Untermoduln von M, für ein geeignetes $\ell \in \mathbb{N}$, und Primideale $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R$ mit

$$M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Beweis. Seien $m_1, \ldots, m_\ell$ Erzeuger von M. Gilt die Aussage für die endlich erzeugten R-Moduln Rm_1 und M/Rm_1, so gilt sie auch für M, denn endliche aufsteigende Folgen von Untermoduln von Rm_1 und M/Rm_1 lassen sich zu einer aufsteigenden Folge von Untermoduln von M mit denselben Subquotienten kombinieren. Weil M/Rm_1 von den Elementen $\overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_\ell$ erzeugt wird, reicht es, die Aussage für jeden zyklischen Modul zu zeigen.

Es genügt also, die Aussage für $M = R/I$ zu zeigen, wobei $I \subset R$ ein beliebiges Ideal ist.

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Ideale J von R, für die der R-Modul R/J die behauptete Aussage nicht erfüllt. Ist $\mathcal{S}$ leer, so sind wir fertig. Sonst hat $\mathcal{S}$ ein maximales Element J, denn R ist noethersch. Sicherlich ist J kein Primideal. Also gibt es $a, b \in R - J$ mit $ab \in J$. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \frac{J + Ra}{J} \to \frac{R}{J} \to \frac{R}{J + Ra} \to 0.$$

Wegen $J \subsetneq J + Ra$ gilt die behauptete Aussage für $\frac{R}{J+Ra}$ wegen der Maximalität von J. Wegen $.\overline{a}\colon \frac{R}{\operatorname{Ann}(\overline{a}))} \xrightarrow{\sim} \frac{J+Ra}{J}$ und $J \subsetneq J + Rb \subset \operatorname{Ann}_R(\overline{a})$ gilt die Aussage ebenso für $\frac{J+Ra}{J}$. Also gilt die Aussage auch für $\frac{R}{J}$. Dies widerspricht der Annahme $J \in \mathcal{S}$. $\square$

5.3. **Krull-Dimension des Trägers und Hilbert-Dimension eines Moduls.** Ziel des Abschnitts ist Satz 5.3.13.

Annahme 5.3.1. Wir betrachten $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$ mit der Grad-Filtrierung GA, d. h. $G_pA = \bigoplus_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|+|\beta| \le p} \mathsf{k} X^\alpha \partial^\beta$ für $p \in \mathbb{Z}$. Wir arbeiten mit der additiven Funktion $\dim\colon \operatorname{mod}(\mathsf{k}) \to \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Lemma 5.3.2. *Betrachte $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$ mit der Grad-Filtrierung GA. Sind $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ Primideale von A, so gilt $d_G(A/\mathfrak{q}) < d_G(A/\mathfrak{p})$ für die Hilbert-Dimensionen.*

Beweis. Setze $M := A/\mathfrak{p}$. Wir schreiben abkürzend $d(-)$ statt $d_G(-) = d_{G,\dim}(-)$. Sei $f \in \mathfrak{q} - \mathfrak{p}$. Weil $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist, ist $f.\colon M \to M$ injektiv, so dass wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to M \xrightarrow{f.} M \to M/fM \to 0$$

erhalten. Wir verwenden im Folgenden Lemma 4.4.26. Wegen $d(M) = \max(d(M), d(M/fM))$ folgt $d(M/fM) \le d(M)$.

Die Annahme $d(M/fM) = d(M)$ führt zu $e(M) = e(M) + e(M/fM)$, also $e(M/fM) = 0$, was nach unseren Annahmen und 4.4.19 $M/fM = 0$ liefert. Wegen $M/fM \cong A/(\mathfrak{p} + Af)$ folgt $A = \mathfrak{p} + Af$ im Widerspruch zu $\mathfrak{p} + Af \subset \mathfrak{q} \subsetneq A$.

Dies zeigt $d(M/fM) < d(M)$. Der Epimorphismus $M/fM \cong A/(\mathfrak{p} + Af) \twoheadrightarrow A/\mathfrak{q}$ zeigt $d(A/\mathfrak{q}) \leq d(M/fM)$. Insgesamt folgt also $d(A/\mathfrak{q}) < d(M) = d(A/\mathfrak{p})$. $\square$

Wiederholung Kommutative Algebra – siehe beispielsweise mein Skript für Wuppertal

Definition 5.3.3. Sei X ein topologischer Raum. Die (**Krull-**)**Dimension** $\dim X$ von X ist das Supremum der Längen aller echt aufsteigenden Ketten

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_\ell$$

von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen; die angegebene Kette hat Länge ℓ.

Bemerkung 5.3.4. Sei X ein topologischer Raum und seien Y und Z abgeschlossene Teilmengen von X. Dann gilt $\dim(Y \cup Z) = \max(\dim(Y), \dim(Z))$, denn jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $Y \cup Z$ muss vollständig in Y oder in Z liegen.

Definition 5.3.5. Sei R ein Ring. Eine **Primidealkette** in R ist eine echt aufsteigende endliche Folge

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$$

von Primidealen von R. Die **Länge** einer solchen Folge ist ℓ, also die Anzahl der echten Inklusionen. Die **Dimension** $\dim R$ eines Ringes R ist das Supremum der Längen aller Primidealketten in R. Es gilt $\dim R \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}$.

5.3.6. Ist $R \neq 0$, so gilt $\dim R \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, denn es gibt dann ein maximales Ideal in R. Ist $R = 0$, so gilt $\dim R = -\infty$.

5.3.7. Ist R ein Ring, so gilt $\dim R = \dim \operatorname{Spec} R$, denn $\mathfrak{p} \mapsto \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ definiert eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen der Menge der Primideale und der Menge der irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$.

5.3.8. Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt $\dim \mathsf{k}[\underline{X}] = \dim \mathsf{k}^n$ nach Bemerkung 5.1.15. Außerdem folgt aus dieser Bemerkung (vgl. auch Bemerkung 5.1.16): Ist $J \subset \mathsf{k}[\underline{X}]$ ein Ideal, so gilt $\dim \frac{\mathsf{k}[\underline{X}]}{J} = \dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(J)$

Satz 5.3.9. *Ist* k *ein Körper, so gilt*

$$\dim \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n] = n.$$

Definition 5.3.10. Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Die **Höhe** $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ ist das Supremum der Längen aller Primidealketten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell = \mathfrak{p}$$

in R, die bei $\mathfrak{p}$ enden. (Das Symbol ht steht für englisch *height*). Es gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Satz 5.3.11. *Sei A eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper* k*. Ist A ein Integritätsbereich, so gelten:*

- *Alle maximalen Primidealketten in A haben dieselbe endliche Länge* $\dim A$*.*
- *Sei* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *ein Primideal. Dann sind* $\dim A$*,* $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ *und* $\dim A/\mathfrak{p}$ *endlich und es gilt die* ***Dimensions-Höhen-Formel***

$$\dim A = \dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}).$$

Ende der Wiederholung Kommutative Algebra

Annahme 5.3.12. Im Rest der Vorlesung nehmen wir an, dass k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null ist.

[66]

Satz 5.3.13. *Betrachte $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$ mit der Grad-Filtrierung GA. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann stimmt die Hilbert-Dimension von M (bezüglich der gegebenen Filtrierung GA auf A und der Vektorraumdimension als additiver Funktion) mit der Krull-Dimension des Trägers von M überein, in Formeln*

$$d_G(M) = \dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)).$$

[67]

Beweis. Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz endlich erzeugter A-Moduln und sind bereits $d_G(M') = \dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M'))$ und $d_G(M'') = \dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M''))$ bekannt, so gilt nach Lemmata 4.4.26 und 5.1.9 und Bemerkung 5.3.4

$$\begin{aligned} d_G(M) &= \max(d_G(M'), d_G(M'') = \max(\dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M')), \dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M''))) \\ &= \dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M') \cup \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M'')) = \dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)). \end{aligned}$$

Proposition 5.2.2 und eine offensichtliche Induktion zeigen somit, dass es reicht, die Aussage für $M = A/\mathfrak{p}$ zu beweisen, wobei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein beliebiges Primideal ist.

Sei also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ beliebig. Wegen $\dim A = n$ (siehe Satz 5.3.9) und der Dimensions-Höhen-Formel in Satz 5.3.11 gibt es eine (maximale) Primidealkette

$$0 = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

der Länge n, in der $\mathfrak{p}$ vorkommt. Für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ entnimmt man dieser Kette $\dim(A/\mathfrak{p}_i) \geq n - i$ und $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_i) \geq i$ und somit $\dim(A/\mathfrak{p}_i) + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}_i) \geq n$. Wegen der Dimensions-Höhen-Formel $n = \dim(A) = \dim(A/\mathfrak{p}_i) + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}_i)$ müssen diese drei Ungleichheiten Gleichheiten sein. Es folgt also

$$\dim(A/\mathfrak{p}_i) = n - i.$$

Nach Beispiel 4.4.21 gilt $d_G(A) = n$. Mit Lemma 5.3.2 erhalten wir somit

$$\dim(A) = n = d_G(A) = d_G(A/\mathfrak{p}_0) > d_G(A/\mathfrak{p}_1) > \cdots > d_G(A/\mathfrak{p}_i) > \cdots > d_G(A/\mathfrak{p}_n).$$

Wegen $d_G(A/\mathfrak{p}_n) \geq 0$ folgt $d_G(A/\mathfrak{p}_i) = n - i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Insgesamt erhalten wir $d_G(A/\mathfrak{p}_i) = n - i = \dim(A/\mathfrak{p}_i)$ für alle i. Da $\mathfrak{p}$ in unserer Primidealkette vorkommt, erhalten wir mit 5.3.8 mit Lemma 5.1.11

$$d_G(A/\mathfrak{p}) = \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\mathfrak{p}) = \dim(\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(A/\mathfrak{p})).$$

Dies zeigt den Satz. □

Lemma 5.3.14. *Sei I ein Ideal in $A = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Sei GA die Gradfiltrierung auf A und GI die induzierte Filtrierung auf I. Dann ist $\operatorname{gr} I = \operatorname{gr}_G I$ ein Ideal in $\operatorname{gr}_G A \xleftarrow{\sim} A$ und es gilt*

$$\dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I) = \dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{gr} I).$$

[66] Der Grund für diese Annahme ist, dass wir mit k^n statt mit $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ arbeiten (weil dies vermutlich für die Hörer der Vorlesung einfacher ist). Arbeitet man mit $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, so gelten (vermutlich) alle im Folgenden gegebenen Resultate mutatis mutandis für beliebige Körper der Charakteristik Null.

[67] Die Hilbert-Multiplizität $e_G(M)$ kann man nicht aus $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$ bestimmen, denn es gilt $e_G(M \oplus M) = 2e_G(M)$, aber $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M \oplus M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$.

Beispiel 5.3.15. Sei $f = X^2 + X - Y \in A := \mathbb{C}[X,Y]$ und $I = (f)$. Dann gilt $G_pI = G_{p-2}A \cdot f$ und $\operatorname{gr} I = (X^2) \subset \operatorname{gr}_G A \xleftarrow{\sim} A$. Dann haben $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(f) = \{(x, x^2+1) \mid x \in \mathbb{C}\}$ und $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{gr} I) = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{C}\}$ dieselbe Dimension.

Beweis. Sei $A := \mathsf{k}[\underline{X}]$. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \to I \to A \to \frac{A}{I} \to 0$$

von A-Moduln. Da GA eine gute Filtrierung von A ist, sind die induzierten Filtrierungen GI auf I und $G\frac{A}{I}$ auf $\frac{A}{I}$ ebenfalls gut (Lemma 4.4.24). Übergang zu den assoziierten graduierten Moduln liefert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{gr}_G I \to \operatorname{gr}_G A \to \operatorname{gr}_G \frac{A}{I} \to 0$$

graduierter $\operatorname{gr}_G A$-Moduln (Lemma 2.6.14). Da die Filtrierung GA von der offensichtlichen Graduierung auf A herrührt, ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_G A$ graduierter Algebren, und die obige kurze exakte Sequenz liefert einen Isomorphismus

$$\frac{A}{\operatorname{gr}_G I} \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_G \left(\frac{A}{I}\right)$$

von graduierten A-Moduln. Daraus folgt für alle $p \in \mathbb{N}$

$$\dim \left(\frac{A}{\operatorname{gr}_G I}\right)^{\leq p} = \dim \operatorname{gr}_G^{\leq p} \left(\frac{A}{I}\right) = \dim G_p\left(\frac{A}{I}\right).$$

Es ist $\left(\left(\frac{A}{\operatorname{gr}_G I}\right)^{\leq p}\right)_{p \in \mathbb{Z}}$ eine gute Filtrierung auf $\frac{A}{\operatorname{gr}_G I}$, denn sie ist von der guten Filtrierung GA auf A induziert (beide Filtrierungen kommen von den offensichtlichen Graduierungen her). Wir folgern

$$d_G\left(\frac{A}{\operatorname{gr}_G I}\right) = d_G\left(\frac{A}{I}\right)$$

Ist $J \subset A$ ein beliebiges Ideal, so gilt

$$\dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(J) = \dim \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n} \left(\frac{A}{J}\right) = d_G\left(\frac{A}{J}\right)$$

nach Lemma 5.1.12 und Satz 5.3.13. Wenden wir dies auf die beiden Ideale I und $\operatorname{gr}_G I$ an, so folgt das Lemma. □

Ende der 19. Vorlesung am 12.12.2018.

Aufgabe 5.3.16. Sei $f \in \mathbb{C}[X,Y]$. Sei $(\mathbb{C}^2)_f := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) \neq 0\} = \mathbb{C}^2 - \mathcal{V}_{\mathbb{C}^2}(f)$. Dann induziert die Projektion $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$, einen Homöomorphismus

$$\mathcal{V}_{\mathbb{C}^3}(fZ - 1) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^2)_f$$

topologischer Räume, wobei $fZ - 1$ als Element von $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ aufgefasst wird und die Unterraumtopologie bezüglich der Zariski-Topologie auf $\mathbb{C}^3$ bzw. $\mathbb{C}^2$ betrachtet wird.

Bemerkung: Dies ist das geometrische Analogon zum wohlbekannten Algebrenisomorphismus $\mathbb{C}[X,Y]_f \cong \mathbb{C}[X,Y,Z]/(fZ-1)$.

Aufgabe 5.3.17. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $\varphi\colon A := \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_m] \to B := \mathsf{k}[Y_1, \ldots, Y_n]$ ein Morphismus von Algebren.

(a) Die Abbildung

$$f := \operatorname{Spec}\varphi\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

bildet maximale Ideale auf maximale Ideale ab[68] und restringiert somit zu einer (stetigen) Abbildung

$$f\colon \operatorname{MaxSpec} B \to \operatorname{MaxSpec} A.$$

(Die analoge Aussage ist falsch, wenn man mit Ringen arbeitet, betrachte beispielsweise $\operatorname{Spec}\mathbb{Q} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.)

(b) Definiere $F\colon \mathsf{k}^n \to \mathsf{k}^m$ dadurch, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{MaxSpec} B \arrow[r, "f"] & \operatorname{MaxSpec} A \\ \mathsf{k}^n \arrow[u, "\sim"] \arrow[r, "F"] & \mathsf{k}^m \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Isomorphismen durch (5.1.3) gegeben sind. Beschreibe F mit Hilfe der Polynome $\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_m)$.

Aufgabe 5.3.18. Sei R ein Ring.

(a) Sei $\varphi\colon R \to S$ ein Morphismus von Ringen. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f := \operatorname{Spec}\varphi\colon \operatorname{Spec} S &\to \operatorname{Spec} R, \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}), \end{aligned}$$

ist stetig.

(b) Sei $I \subset R$ ein Ideal und $\varphi\colon R \to R/I$ die kanonische Abbildung. Dann induziert $f = \operatorname{Spec}\varphi$ einen Homöomorphismus

$$\operatorname{Spec}(R/I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(I)$$

topologischer Räume.

Sei $X := \operatorname{Spec} R$. Für $f \in R$ betrachte die offene Teilemenge

$$X_f := X - \mathcal{V}(f) = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

von X.

(c) Sei $f \in R$ ein Element und $\varphi\colon R \to R_f$ die kanonische Abbildung. Dann induziert $f = \operatorname{Spec}\varphi$ einen Homöomorphismus

$$\operatorname{Spec}(R_f) \xrightarrow{\sim} X_f = (\operatorname{Spec} R)_f.$$

(d) (Verallgemeinerung von (c)): Sei $T \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $\varphi\colon R \to T^{-1}R$ die kanonische Abbildung in die Lokalisierung. Dann induziert $f = \operatorname{Spec}\varphi$ einen Homöomorphismus

$$\operatorname{Spec}(T^{-1}R) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{t \in T} X_t,$$

[68] Dies gilt auch, wenn k ein beliebiger Körper ist.

wobei man beachte, dass $\bigcap_{t\in T} X_t$ im Allgemeinen als unendlicher Schnitt offener Teilmengen nicht offen in X ist. Insbesondere gilt

$$\operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \bigcap_{f\notin\mathfrak{p}} X_f.$$

(e) Die Menge $\mathcal{B} := \{X_f \mid f \in R\}$ bildet eine Basis der Zariski-Topologie auf X: Dies bedeutet, dass jede offene Teilmenge U von X Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist, d. h. zu jedem $u \in U$ existiert ein $f \in R$ mit $u \in X_f \subset U$.

(f) Der topologische Raum X ist quasi-kompakt: Jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 5.3.16
(2) Aufgabe 5.3.17
(3) Aufgabe 6.1.4.
(4) Zeige mindestens zwei der Teilaufgaben von Aufgabe 5.3.18

Hausaufgaben: Für die Weihnachtsferien:

(1) Lies und versteh das Skript. Für sinnvolle Mitteilungen gibt es in etwa wie folgt Punkte: Für jeden mathematischen Fehler, jede sinnvolle Anmerkung (beispielsweise Vorschläge für neue Aufgaben oder Beispiele, Didaktisches, Stil) einen Punkt, für jeden Rechtschreibfehler 1/3 Punkt, jedoch maximal 16 Punkte.
(2) Schöne Feiertage und alles Gute im Neuen Jahr!

6. Charakteristische Varietät

6.1. Definition und erste Eigenschaften der charakteristischen Varietät.

6.1.1. Wir erinnern daran, dass der Körper k der Charakteristik Null als algebraisch abgeschlossen angenommen ist.

6.1.2. Wir betrachten nun $D(n)$ mit der Ordnungsfiltrierung $FD(n)$. Im Folgenden identifizieren wir meist $\operatorname{gr}_F D(n) = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ entlang des Isomorphismus vo graduierten Algebren aus Satz 3.2.4, wobei wir auch Satz 3.2.6 verwenden, wir erinnern daran, dass alle X_i homogen vom Grad Null und alle ξ_i homogen vom Grad Eins sind.

Satz 6.1.3. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Seien FM und $F'M$ gute Filtrierungen auf M (bezüglich der Ordnungsfiltrierung auf $D(n)$). Dann gilt*

$$\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_F M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_{F'} M)$$

als Teilmengen von k^{2n}. Ein äquivalente Aussage ist

$$\sqrt{\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}_F D}(\operatorname{gr}_F M)} = \sqrt{\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}_F D}(\operatorname{gr}_{F'} M)}.$$

Beweis. Setze $D := D(n)$ und $FD = FD(n)$. Da $\operatorname{gr}_F M$ ein endlich erzeugter $\operatorname{gr} D$-Modul ist, gilt $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_F M) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr} D}(\operatorname{gr}_F M)) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\sqrt{\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr} D}(\operatorname{gr}_F M)})$ (Lemma 5.1.12). Wegen der Bijektion zwischen abgeschlossenen Teilmengen von k^{2n} und Radikalidealen zeigt dies die Äquivalenz der beiden angegebenen Behauptungen.

Setze $I := \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr} D}(\operatorname{gr}_F M)$ und $I' := \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr} D}(\operatorname{gr}_{F'} M)$. Wir zeigen $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$. Aus Symmetriegründen genügt es, $\sqrt{I} \subset \sqrt{I'}$ zu zeigen.

Nach Aufgabe 6.1.4 sind $\sqrt{I}$ und $\sqrt{I'}$ homogene Ideale. Also genügt es zu zeigen, dass jedes homogene Element von $\sqrt{I}$ in $\sqrt{I'}$ liegt. Seien $p \in \mathbb{Z}$ und $T \in F_p D$ mit $\overline{T} \in \operatorname{gr}^p D \cap \sqrt{I} = (\sqrt{I})^p$. Zu zeigen ist $\overline{T} \in \sqrt{I'}$. Sei $t \in \mathbb{N}$ mit $\overline{T}^t \in I$.

Sei $q \in \mathbb{Z}$. Wegen $\overline{T}^t \operatorname{gr}_F^q M = 0$ folgt $T^t F_q M \subset F_{q+tp-1} M$. Es folgt $T^{2t} F_q M \subset T^t F_{q+tp-1} \subset F_{q+2tp-2}$. Durch Iterieren erhält man

$$T^{st} F_q M \subset F_{q+stp-s} M$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$.

Als gute Filtrierungen sind FM und $F'M$ äquivalent (Lemma 4.4.14). Also gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $F'_q M \subset F_{q+\ell} M \subset F'_{q+2\ell} M$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$T^{st} F'_q M \subset T^{st} F_{q+\ell} M \subset F_{q+\ell+stp-s} M \subset F'_{q+2\ell+stp-s} M$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$. Wähle $s > 2\ell$. Dann folgt $q + 2\ell + stp - s < q + stp$, also

$$T^{st} F'_q M \subset F'_{q+2\ell+stp-s} M \subset F'_{q+stp-1} M$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$. Es operiert also $\overline{T^{st}} = \overline{T}^{st} \in \operatorname{gr}^{stp} D$ durch Null auf $\operatorname{gr}_{F'}^q M$, für alle $q \in \mathbb{Z}$, d. h. $\overline{T}^{st} \in I'$ und somit $\overline{T} \in \sqrt{I'}$ wie gewünscht. □

Aufgabe 6.1.4. Sei $R = \bigoplus R^p$ ein kommutativer, graduierten Ring.

(a) Ist $N = \bigoplus N^p$ ein graduierter R-Modul, so ist $\operatorname{Ann}_R N$ ein homogenes Ideal in R.

(b) Ist I ein homogenes Ideal in R, so ist das Ideal $\sqrt{I}$ ebenfalls homogen.

Definition 6.1.5. Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Sei FM eine gute Filtrierung von M (bezüglich der Ordnungsfiltrierung auf $D(n)$). Dann heißt

$$\mathrm{J}(M) := \sqrt{\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr} D}(\operatorname{gr}_F M)} \subset \operatorname{gr}_F D(n) = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$$

das **charakteristische Ideal von** M. Nach Satz 6.1.3 hängt dieses Ideal nicht von der Wahl der guten Filtrierung ab. Wir nennen

$$\operatorname{Ch}(M) := \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{J}(M) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}_F D}(\operatorname{gr}_F M)) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_F M) \subset \mathsf{k}^{2n}$$

die **charakteristische Varietät von** M. [69] [70]

6.1.6. Nach dem starken Hilbertschen Nullstellensatz 5.1.2 gilt

$$\mathrm{J}(M) = \mathcal{I}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{Ch}(M)).$$

Es entsprechen sich also charakteristische Varietät und charakteristisches Ideal unter der Bijektion zwischen abgeschlossenen Teilmengen von k^{2n} und Radikalidealen in $\mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ (Bemerkung 5.1.15).

6.1.7. Die charakteristische Varietät $\operatorname{Ch}(M)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des k^n. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent (wegen Lemma 5.1.8 und weil gute Filtrierungen bei Null beginnen und ausschöpfend sind).

---

[69] Als Schema definiert man $\operatorname{Ch}(M)$ als $\operatorname{Spec} \frac{\mathsf{k}[\underline{X},\underline{\xi}]}{\mathrm{J}(M)}$ oder äquivalent als $\operatorname{Supp} \operatorname{gr}_F M$ mit der eindeutigen Struktur eines reduzierten Unterschemas von $\mathbb{A}^{2n}_{\mathsf{k}}$. Dies ist ein reduziertes Schema von endlichem Typ über dem Körper k und somit eine (reduzierte) Varietät.

[70] In [Cou95, Kap. 11] wird die charakteristische Varietät falsch definiert (nämlich mit der Bernstein-Filtrierung), was diverse Konsequenzen zeitigt. Beispielsweise ist der in diesem Skript gegebene Beweis von Satz 6.3.1 deutlich schwieriger als der Beweis von [Cou95, Thm. 11.1.4].

- $\mathrm{Ch}(M) = \emptyset$;
- $\mathrm{gr}_F M = 0$ (hierbei ist FM eine beliebige gute Filtrierung auf M);
- $M = 0$.

Beispiele 6.1.8. Betrachte $D := D(n)$ mit der Ordnungsfiltrierung.

(a) Für $D = D(n)$ als Modul über sich selbst gilt

$$\mathrm{Ch}(D(n)) = \mathsf{k}^{2n},$$

denn die Ordnungsfiltrierung FD auf D ist gut und der Annihilator von $\mathrm{gr}_F D = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ ist das Nullideal.

(b) Betrachte den D-Modul $M = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Offensichtlich definiert

$$F_p M := \begin{cases} 0 & \text{für } p < 0, \\ M & \text{für } p \geq 0, \end{cases}$$

für $p \in \mathbb{Z}$, eine gute Filtrierung FM auf M (bezüglich der Ordnungsfiltrierung auf D). Es folgt $\mathrm{gr}_F M = \mathrm{gr}_F^0 M = \mathsf{k}[\underline{X}]$ als Modul über $\mathrm{gr}_F D = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$, wobei alle ξ_i durch Null operieren und alle X_i in der offensichtlichen Weise, und somit $\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}_F D} \mathrm{gr}_F M = \mathrm{gr}_F^{\geq 1} D = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dies ist ein Primideal und insbesondere ein Radikalideal. Es folgen $\mathrm{J}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und

$$\mathrm{Ch}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \mathsf{k}^n \times 0 \subset \mathsf{k}^n \times \mathsf{k}^n.$$

(c) Betrachte nun den Fourier-Transformierten $N := {}_{\mathcal{F}}M = \mathsf{k}[\underline{\partial}]$ (siehe 4.4.38). Offensichtlich definiert

$$F_p N := F_p D.\mathsf{k} = \begin{cases} 0 & \text{für } p < 0, \\ \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq p} \mathsf{k}\partial^\beta & \text{für } p \geq 0, \end{cases}$$

für $p \in \mathbb{Z}$, eine gute Filtrierung FN auf N. Es folgt $\mathrm{gr}_F N = \mathsf{k}[\underline{\xi}]$ als (graduierter) Modul über $\mathrm{gr}_F D = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$, wobei alle X_i durch Null operieren und alle ξ_i in der offensichtlichen Weise, und somit $\mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}_F D} \mathrm{gr}_F N = (X_1, \ldots, X_n)$. Dies ist ein Primideal und insbesondere ein Radikalideal. Es folgen $\mathrm{J}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = (X_1, \ldots, X_n)$ und

$$\mathrm{Ch}(\mathsf{k}[\underline{X}]) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(X_1, \ldots, X_n) = 0 \times \mathsf{k}^n \subset \mathsf{k}^n \times \mathsf{k}^n.$$

Beispiele 6.1.9. Betrachte $D := D(1)$ mit der Ordnungsfiltrierung. Betrachte den D-Modul $M_\alpha = \mathsf{k}[X, X^{-1}]\mathbf{X}^\alpha$ für $\alpha \in \mathsf{k}$. Der Leser mag zuerst die beiden Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ betrachten (vgl. (4.6.1) in Aufgabe 4.6.13 und Aufgabe 4.7.14). Sei $\beta \in \mathsf{k}$ so gewählt, dass X^β den D-Modul M_α erzeugt - eine mögliche Wahl ist

$$\beta := \begin{cases} \alpha & \text{für } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ -1 & \text{für } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Offensichtlich definiert

$$F_p M_\alpha := F_p D.X^\beta \begin{cases} 0 & \text{für } p < 0, \\ \mathsf{k}[X]X^{\beta-p} = \mathsf{k}X^{\beta-p} \oplus \mathsf{k}X^{\beta-p+1} \oplus \ldots & \text{für } p \geq 0, \end{cases}$$

für $p \in \mathbb{Z}$, eine gute Filtrierung FM auf M (bezüglich der Ordnungsfiltrierung auf D). Es folgt

$$\operatorname{gr}_F^p M_a = \begin{cases} 0 & \text{für } p < 0, \\ \mathsf{k}[X]\overline{X}^\beta & \text{für } p = 0, \\ \mathsf{k}\overline{X}^{\beta-p} & \text{für } p > 0. \end{cases}$$

Hier operiert X auf $\operatorname{gr}_F^0 M_a$ in der offensichtlichen Weise und auf allen anderen graduierten Komponenten durch Null, und es gilt

$$\xi.X^{\beta+p} = \begin{cases} 0 & \text{für } p > 0, \\ \underbrace{(\beta+p)}_{\neq 0} X^{\beta+p-1} & \text{für } p \leq 0. \end{cases}$$

Es folgt $\operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}_F D} \operatorname{gr}_F M_\alpha = (X\xi)$, also $\mathrm{J}(\mathsf{k}[X, X^{-1}]\mathbf{X}^\alpha) = (X\xi_1)$

$$\operatorname{Ch}(\mathsf{k}[X, X^{-1}]\mathbf{X}^\alpha) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^2}(X\xi) = (\text{Achsenkreuz}) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^2}(X) \cup \mathcal{V}_{\mathsf{k}^2}(\xi) \subset \mathsf{k}^2.$$

Beachte:

- Alle M_α haben also dieselbe charakteristische Varietät, nämlich das Achsenkreuz, obwohl M_α und $M_{\alpha'}$ dann und nur dann isomorph sind, wenn $\alpha - \alpha' \in \mathbb{Z}$.
- Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ist M_α ein einfacher (= irreduzibler) $D(1)$-Modul (siehe Aufgabe 4.7.14), dessen charakteristische Varietät zwei irreduzible Komponenten hat. Die charakteristische Varietät eines irreduziblen Moduls ist also im Allgemeinen nicht irreduzibel.

Lemma 6.1.10. *Für alle $(x, \zeta) \in \operatorname{Ch}(M)$ und alle $\lambda \in \mathsf{k}$ gilt $(x, \lambda\zeta) \in \operatorname{Ch}(M)$. In der „zweiten Variablen“ $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ ist $\operatorname{Ch}(M)$ also konisch.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass $\mathrm{J}(M)$ ein homogenes Ideal von $\mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ ist (wobei $\deg(X_i) = 0$, $\deg(\xi_i) = 1$).

Seien $(x, \zeta) \in \mathsf{k}^n \times \mathsf{k}^n$. Dann gilt genau dann $(x, \zeta) \in \operatorname{Ch}(M)$, wenn $f(x, \zeta) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und alle $f \in \mathrm{J}(M)^p$.

Für homogenes $f \in \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]^p$ und beliebiges $\lambda \in \mathsf{k}$ gilt $f(x, \lambda\zeta) = \lambda^p f(x, \zeta)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 6.1.11. *Sei*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz endlich erzeugter $D(n)$-Moduln. Dann gilt

$$\operatorname{Ch}(M) = \operatorname{Ch}(M') \cup \operatorname{Ch}(M'')$$

als Teilmengen von k^{2n}.

Beweis. Sei FM eine gute Filtrierung auf M. Dann sind die induzierten Filtrierungen $F'M$ auf M' und $F''M$ auf M'' ebenfalls gut (Lemma 4.4.24). Also ist

$$0 \to \operatorname{gr}_{F'} M' \to \operatorname{gr}_F M \to \operatorname{gr}_{F''} M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Moduln über $\operatorname{gr}_F D(n) = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ (Lemma 2.6.14). Nach Lemma 5.1.9 folgt

$$\operatorname{Ch}(M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_F M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_{F'} M') \cup \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_{F''} M'') = \operatorname{Ch}(M') \cup \operatorname{Ch}(M'').$$

□

Beispiel 6.1.12. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathsf{k}[X] \to \mathsf{k}[X, X^{-1}] \to \underbrace{\frac{\mathsf{k}[X, X^{-1}]}{\xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[X]}}_{\mathsf{k}[\partial]} \to 0$$

von $D(1)$-Moduln, wobei der angedeutete Isomorphismus X^{-1} auf 1 schickt (vgl. (4.6.1) in Aufgabe 4.6.13). Die Vereinigung der beiden Achsen $\mathrm{Ch}(\mathsf{k}[X]) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}}(\xi) = \mathsf{k} \times 0$ und $\mathrm{Ch}(\mathsf{k}[\partial]) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}}(X) = 0 \times \mathsf{k}$ ist das Achsenkreuz $\mathrm{Ch}(\mathsf{k}[X, X^{-1}] = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^2}(X\xi)$, siehe Beispiele 6.1.8 und Beispiel 6.1.9.

6.1.13. Jeden $D(n)$-Modul kann man als $\mathsf{k}[\underline{X}]$-Modul $M = M|_{\mathsf{k}[\underline{X}]}$ auffassen, dessen Träger $\mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M) \subset \mathsf{k}^n$ wir nun betrachten.

Proposition 6.1.14. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann gelten:*

(a) $\mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$ *ist eine abgeschlossene Teilmenge von* k^n.

(b) Es gilt

$$\mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M) = \pi(\mathrm{Ch}(M)),$$

wobei $\pi\colon \mathsf{k}^{2n} \to \mathsf{k}^n$, $(x, \zeta) \mapsto x$, *die Projektion ist.*

Beweis. (a) Sei $D := D(n)$ und $FD = FD(n)$. Sei FM eine gute Filtrierung auf M. Dann ist $\mathrm{gr}_F M$ ein Modul über $\mathrm{gr}_F D$ und per Restriktion der Skalare auch über $\mathrm{gr}_F^0 D = F_0 D = \mathsf{k}[\underline{X}]$. Wir behaupten

$$\mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M) = \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\mathrm{gr}_F M). \tag{6.1.1}$$

Dies folgt aus der Äquivalenz der folgenden Bedingungen für beliebiges $x \in \mathsf{k}^n$ mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_x \in \mathrm{MaxSpec}\, F_0 D$:

- $x \notin \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$,
- $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(M)$,
- $M_{\mathfrak{m}} = 0$,
- $(F^q M)_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ (da $M_{\mathfrak{m}} = \bigcup (F^q M)_{\mathfrak{m}}$),
- $(\mathrm{gr}_F^q M)_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ (da die Filtrierung bei Null beginnend ist),
- $(\mathrm{gr}_F M)_{\mathfrak{m}} = 0$ (da der Funktor $(-)_{\mathfrak{m}} = (F_0 D)_{\mathfrak{m}} \otimes_{F^0 D} -$ mit direkten Summen vertauscht),
- $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Supp}_{\mathrm{Max}}(\mathrm{gr}_F M)$,
- $x \notin \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\mathrm{gr}_F M)$.

Es ist $\mathrm{gr}_F M$ als Modul über $\mathrm{gr}_F D$ endlich erzeugt. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\mathrm{gr}_F M$ von $\mathrm{gr}_F^{\leq N} M$ als $\mathrm{gr}_F D$-Modul erzeugt ist. Der Morphismus

$$\bigoplus_{T \in \mathrm{gr}\, D} \mathrm{gr}_F^{\leq N} M \to \mathrm{gr}_F M,$$
$$(x_T)_{T \in \mathrm{gr}\, D} \mapsto \sum_T T x_T,$$

von $F_0 D$-Moduln ist also surjektiv. Andererseits ist $\mathrm{gr}^{\leq N} M$ ein $F_0 D$-Untermodul von $\mathrm{gr}_F M$. Die Lemmata 5.1.9 und 5.1.10 liefern

$$\mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\mathrm{gr}_F M) \subset \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\bigoplus_{T \in \mathrm{gr}\, D} \mathrm{gr}_F^{\leq N} M) = \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\mathrm{gr}_F^{\leq N} M) \subset \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\mathrm{gr}_F M)$$

und somit $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{gr}_F M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{gr}_F^{\leq N} M)$.

Da $\operatorname{gr}^{\leq N} M$ als $F_0 D$-Modul endlich erzeugt ist (da $\operatorname{gr}_F^{\leq N'} M = 0$ für $N' \ll 0$ gilt), ist $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{gr}_F^{\leq N} M)$ nach Lemma 5.1.12 abgeschlossen in k^n, genauer gilt mit $I := \operatorname{Ann}_{\mathsf{k}[\underline{X}]}(\operatorname{gr}_F^{\leq N} M)$

$$\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{gr}_F M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(\operatorname{gr}_F^{\leq N} M) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I).$$

(b) Wir führen den Beweis fort. Sei $J := \operatorname{Ann}_{\mathsf{k}[\underline{X},\underline{\xi}]}(\operatorname{gr}_F^{\leq N} M) = \operatorname{Ann}_{\mathsf{k}[\underline{X},\underline{\xi}]}(\operatorname{gr}_F M)$; dies ist ein homogenes Ideal mit $J^0 = I$. Es gilt wieder nach Lemma 5.1.12

$$\operatorname{Ch}(M) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_F M) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(J).$$

Sei $(x, \zeta) \in \operatorname{Ch}(M)$. Dann gilt $Q(x, \zeta) = 0$ für alle homogenen Elemente $Q \in J$, also insbesondere für alle $Q \in J^0 = I$. Dies zeigt $x \in \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I) = \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$, also $\pi(\operatorname{Ch}(M)) \subset \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M)$.

Sei umgekehrt $x \in \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(I)$. Dann gilt $0 = Q(x) = Q(x, 0)$ für alle $Q(X) = Q(X, \xi) \in I = J^0$. Für alle homogenen $Q \in J$ vom Grad > 0 gilt automatisch $Q(x, 0) = 0$. Es folgt $(x, 0) \in \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(J) = \operatorname{Ch}(M)$. Wegen $\pi(x, 0) = x$ zeigt dies $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}(M) \subset \pi(\operatorname{Ch}(M))$. $\square$

Beispiel 6.1.15. In den Beispielen 6.1.8 und 6.1.9 rechnet man leicht von Hand nach, dass die Aussagen von Proposition 6.1.14 zutreffen.

Ende der 20. Vorlesung am 17.12.2018.

6.2. Symplektische Geometrie und Bernstein-Ungleichung.

Vorlesung vor der Weihnachtspause, etwas informell.

Annahme 6.2.1. Wir schreiben abkürzend $D = D(n)$. Wir arbeiten der besseren Anschaulichkeit halber über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Alle Aussagen in 6.2 gelten genauso über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null.

Definition 6.2.2. Eine **Poisson-Algebra** ist eine (nicht notwendig kommutative) Algebra A zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\{,\}\colon A \times A \to A$, genannt **Poisson-Klammer**, so dass gelten:

(a) Der Vektorraum A zusammen mit der Poissonklammer $\{,\}$ ist eine Lie-Algebra.
(b) Kompatibilität von Multiplikation und Lie-Klammer: Für alle $a \in A$ ist $\{a, -\}\colon A \to A$ eine Derivation, d. h. für alle $b, c \in A$ gilt

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}.$$

Beispiel 6.2.3. Jede Algebra A wird durch $\{a, b\} := [a, b] = ab - ba$ zu einer Poisson-Algebra (oder auch durch die triviale Poisson-Klammer $\{a, b\} = 0$). Auf kommutativen Algebren verschwindet diese Poisson-Klammer. Trotzdem kann es auf kommutativen Algebren interessante Poisson-Klammern geben, wie das folgende Resultat zeigt.

Lemma 6.2.4. *Die bilinearen Abbildungen*

$$\begin{aligned} F_p D \times F_q D &\to F_{p+q-1}, \\ (S, T) &\to [S, T] = ST - TS, \end{aligned}$$

für $p, q \in \mathbb{Z}$, induzieren bilineare Abbildungen

$$\{-,-\}\colon \operatorname{gr}_F^p D \times \operatorname{gr}_F^q D \to \operatorname{gr}_F^{p+q-1} D \tag{6.2.1}$$

und

$$\{-,-\}\colon \operatorname{gr}_F D \times \operatorname{gr}_F D \to \operatorname{gr}_F D.$$

Mit dieser Abbildung als Poisson-Klammer wird $\operatorname{gr}_F D$ *zu einer Poisson-Algebra.*[71]

Beweis. Nach Satz 3.1.16.(c) und Satz 3.2.6 sind die Abbildungen wohldefiniert. Alle restlichen Aussagen sind offensichtlich. □

Bemerkung 6.2.5. Sei M ein endlich erzeugter D-Modul mit einer guten Filtrierung FM. Sei $I := \operatorname{Ann}_{\operatorname{gr}_F D} \operatorname{gr}_F M$. Dann ist leicht zu sehen, dass

$$\{I, I\} \subset I$$

gilt. In der Tat, seien $S \in F_p D$ und $T \in F_q D$ mit $\overline{S} \in I^p$ und $\overline{T} \in I^q$. Es gelten also

$$S.F_r M \subset F_{p+r-1} M \qquad \text{und} \qquad T.F_r M \subset F_{q+r-1} M$$

für alle $r \in \mathbb{Z}$. Es folgt $ST.F_r M, TS.F_r M \subset F_{p+q+r-2} M$ und somit $[S,T].F_r M \subset F_{p+q+r-2} M$. Also annihiliert $\{\overline{S}, \overline{T}\} = \overline{[S,T]} \in \operatorname{gr}_F^{p+q-1} D$ alle Elemente von $\operatorname{gr}_F^r M$. Dies zeigt $\{S,T\} \in I$ und somit $\{I, I\} \subset I$.

Es ist jedoch keineswegs leicht zu sehen, dass $\{\sqrt{I}, \sqrt{I}\} \subset \sqrt{I}$ gilt (bitte versuchen!). Dies ist der Inhalt des folgenden Resultats.

Satz 6.2.6 (Spezialfall des Satzes von Gabber, siehe [Gab81, Thm. I])**.** *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann ist das charakteristische Ideal $\mathrm{J}(M)$ abgeschlossen unter der Poisson-Klammer auf $\operatorname{gr}_F D(n)$, d. h.*

$$\{\mathrm{J}(M), \mathrm{J}(M)\} \subset \mathrm{J}(M).$$

Beweis. Siehe [Gab81]. □

Korollar 6.2.7 (Geometrische Form der Bernstein-Ungleichung)**.** *Für jede irreduzible Komponente K von $\operatorname{Ch}(M)$ gilt*

$$\dim K \geq n.$$

Insbesondere gilt im Fall $M \neq 0$

$$\dim \operatorname{Ch}(M) \geq n.$$

6.2.8. Die Teilaussage $\dim \operatorname{Ch}(M) \geq n$ dieses Korollars ist wegen $\dim \operatorname{Ch}(M) = d_B(M)$ (Satz 6.3.1) zur algebraischen Bernstein-Ungleichung $d_B(M) \geq n$ (Satz 4.5.4) äquivalent. Die Ungleichungen $\dim K \leq 2n$ und $\dim \operatorname{Ch}(M) \leq 2n$ sind wegen $K, \operatorname{Ch}(M) \subset \mathbb{C}^{2n}$ trivial.

6.2.9. Wir wollen zeigen, wie Korollar 6.2.7 mittels symplektischer Geometrie aus dem Satz von Gabber 6.2.6 folgt.

Definition 6.2.10. Ein **symplektischer Vektorraum** ist ein endlichdimensionaler (komplexer) Vektorraum W zusammen mit einer nicht ausgearteten, alternierenden Bilinearform $\omega\colon W \times W \to \mathbb{C}$,[72] [73] genannt **symplektische Form**.

[71] Wenn man $\operatorname{gr}_F D$ als graduierte Algebra betrachtet, so senkt die Poisson-Klammer den Grad um Eins, wie ja aus (6.2.1) klar ist. Man könnte also sagen, dass $\operatorname{gr}_F D$ eine graduierte Poisson-Algebra mit Poisson-Klammer vom Grad -1 ist.

[72] Alternierend bedeutet $\omega(w,w) = 0$ für alle $w \in W$; es folgt Schiefsymmetrie, also $\omega(w,v) = -\omega(v,w)$ für alle $w, w' \in W$. In Charakteristik $\neq 2$ ist dies eine äquivalente Forderung.

[73] Nicht ausgeartet bedeutet: Für jedes $w \in W$ folgt aus $\omega(w,-) = 0$ oder $\omega(-,w) = 0$ bereits $w = 0$.

Beispiel 6.2.11. Sei V ein endlichdimensionaler (komplexer) Vektorraum. Dann wird $V \oplus V^*$ durch

$$\begin{aligned} \omega\colon V \oplus V^* \times V \oplus V^* &\to \mathbb{C}, \\ ((u,\lambda),(v,\mu)) &\mapsto \mu(u) - \lambda(v), \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

zu einem symplektischen Vektorraum.

Sei $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ eine Basis von V und $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ die dazu duale Basis von V^*. Bezüglich der Basis $(\underline{\xi}, \underline{X})$ von $V \oplus V^*$ ist ω dann durch die invertierbare schiefsymmetrische Matrix

$$\Omega := \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

gegeben (vgl. Darboux-Basis), es gilt also

$$\omega(A,B) = A^{\mathrm{t}} \Omega B,$$

wenn wir die Elemente $A, B \in V \oplus V^*$ rechts als Spaltenvektoren $A, B \in \mathbb{C}^{2n}$ auffassen.

6.2.12. Jeder symplektische Vektorraum ist (als Vektorraum mit Bilinearform) isomorph zu $(V \oplus V^*, \omega)$, wobei V ein geeigneter endlichdimensionaler Vektorraum ist (das ist eine Übung in linearer Algebra). Insbesondere hat jeder symplektische Vektorraum gerade Dimension, und symplektische Vektorräume sind bis auf Isomorphie durch ihre (gerade) Dimension klassifiziert.

6.2.13. Sei (W, ω) ein symplektischer Vektorraum. Weil ω nicht ausgeartet ist, ist

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi\colon W &\xrightarrow{\sim} W^*, \\ w &\mapsto \Phi(w) := \omega(w, -), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Insbesondere gilt

$$\omega(\Phi^{-1}(\lambda), -) = \lambda \tag{6.2.3}$$

für alle $\lambda \in W^*$.

Definition 6.2.14. Ist U ein Untervektorraum eines symplektischen Vektorraums (W, ω), so heißt

$$U^{\perp\omega} := \{w \in W \mid \omega(w, U) = 0\}$$

der **bezüglich ω zu U orthogonale Untervektorraum**.

6.2.15. Es gilt

$$\dim W = \dim U + \dim U^{\perp\omega},$$

denn die lineare Abbildung

$$W \underset{\sim}{\xrightarrow{\Phi}} W^* \overset{\text{Restriktion}}{\twoheadrightarrow} U^*$$

ist surjektiv, da sich jede Linearform auf U zu einer Linearform auf W fortsetzen läßt, und hat als Kern $U^{\perp\omega}$. Aus $U \subset (U^{\perp\omega})^{\perp\omega}$ folgt damit aus Dimensionsgründen Gleichheit $U = (U^{\perp\omega})^{\perp\omega}$. Im Allgemeinen gilt $U \cap \dim U^{\perp\omega} \neq 0$. Deswegen gefällt mir der verbreitete Begriff *symplektisches Komplement* für $U^{\perp\omega}$ nicht.

Definition 6.2.16. Ein Unterraum U eines symplektischen Vektorraums (W, ω) heißt

- **isotrop**, falls $U \subset U^{\perp\omega}$;

- **koisotrop**, falls $U \supset U^{\perp\omega}$;
- **lagrange**, falls $U = U^{\perp\omega}$.

Beispiele 6.2.17. (a) Eindimensionale Unterräume sind stets isotrop, denn ω ist alternierend.
(b) Genau dann ist U koisotrop, wenn $U^{\perp\omega}$ isotrop ist.
(c) Also sind einskodimensionale Unterräume stets koisotrop.

6.2.18. Für uns sind nur koisotrope Unterraum wichtig. Ist U koisotrop, so gilt $\dim W = \dim U + \dim U^{\perp\omega} \leq 2 \dim U$, also

$$\frac{1}{2} \dim W \leq \dim U.$$

Beweis von Korollar 6.2.7. Sei $V := \mathbb{C}^n$. Wie in Beispiel 6.2.11 erklärt, besitzt $W := V \oplus V^* = \bigoplus \mathbb{C}\xi_i \oplus \bigoplus \mathbb{C}X_i = \mathbb{C}^{2n}$ eine kanonische symplektische Form ω.

Sei $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ die Standardbasis von V und sei $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ die dazu duale Basis von V^*. Die X_i sind die üblichen Koordinatenfunktionen auf V. Die polynomialen Funktionen auf V bzw. W sind genau die Elemente von $\mathbb{C}[\underline{X}]$ bzw. $\mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}]$.

Sei Φ wie in 6.2.13. Definiere

$$\begin{aligned} \{-,-\} \colon \mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}] \times \mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}] &\to \mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}], \\ (f, g) &\mapsto \{f, g\} = \omega(\Phi^{-1}(df), \Phi^{-1}(dg), \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite die Funktion

$$\begin{aligned} W &\to \mathbb{C}, \\ p &\mapsto \omega(\Phi^{-1}(d_p f), \Phi^{-1}(d_p g) \overset{(6.2.3)}{=} d_p f(\Phi^{-1}(d_p g)), \end{aligned}$$

bezeichnet[74]; diese Funktion ist polynomial, also ein Element von $\mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}]$, denn eine offensichtliche Rechnung zeigt

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\partial_{\xi_i} f \cdot \partial_{X_i} g - \partial_{X_i} f \cdot \partial_{\xi_i} g \Big). \tag{6.2.4}$$

Mit dieser expliziten Formel rechnet man sofort nach, dass $\mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ mit $\{-,-\}$ als Poisson-Klammer eine Poisson-Algebra wird.[75]

Allgemein besitzt jedes Kotangentialbündel einer glatten Varietät bzw. Mannigfaltigkeit eine kanonische symplektische Struktur (vgl. hamiltonsche Mechanik). Die Algebra der regulären bzw. glatten Funktionen auf jeder symplektischen glatten Varietät bzw. Mannigfaltigkeit besitzt stets eine kanonische Poisson-Klammer. In unserem Fall ist $W = V \oplus V^* = V \times V^*$ das Kotangentialbündel $\mathrm{T}^* V$ von V. Es trägt die kanonische symplektische Form $\omega = \sum_{i=1}^n dX_i \wedge d\xi_i \in \Omega^2(\mathrm{T}^* V)$. Ihre Auswertung an einem Punkt $p \in W$ ist ein Element $\omega_p \in \wedge^2((\mathrm{T}_p W)^*) \overset{\text{can}}{=} (\wedge^2(\mathrm{T}_p W))^*$, also eine alternierende Abbildung $\omega_p \colon \mathrm{T}_p W \times \mathrm{T}_p W \to \mathbb{C}$. Identifizieren wir den Tangentialraum $\mathrm{T}_p W$ in offensichtlicher Weise mit W, so ist ω_p gerade die Abbildung (6.2.2).

[74] Dabei ist $d_p f \in W^*$ durch den Zeilenvektor $(\partial_{\xi_1}(f), \ldots, \partial_{\xi_n}(f), \partial_{X_1}(f), \ldots, \partial_{X_n}(f))(p)$ gegeben.

[75] Wenn man $\mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ so graduiert, dass alle X_i Grad Null haben und alle ξ_i Grad Eins, so ist nach (6.2.4) klar, dass die Poisson-Klammer homogener Elemente vom Grad p und q Grad $p + q - 1$ hat.

Der Isomorphismus von graduierten Algebren

$$\operatorname{gr}_F D \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}]$$

(Sätze 3.2.4 und 3.2.6) ist sogar ein Isomorphismus von Poisson-Algebren: Auf Grund der Axiome einer Poisson-Algebra genügt es, die Verträglichkeit dieses Isomorphismus mit den Poisson-Klammern auf allen Algebra-Erzeugern $\overline{X_i} \in \operatorname{gr}_F^0 D$ und $\overline{\partial_i} \in \operatorname{gr}_F^1 D$ von $\operatorname{gr}_F D$ nachzurechnen, wo es offensichtlich ist; beispielsweise gilt links

$$\{\overline{\partial}_i^1, \overline{X}_j^0\} = \overline{[\partial_i, X_j]}^0 = \overline{\delta_{ij}}^0 = \delta_{ij}$$

und rechts

$$\{\xi_i, X_j\} = \sum_{\ell=1}^{n} \partial_{\xi_\ell} \xi_i \cdot \partial_{X_\ell} X_j = \delta_{ij}$$

Der Satz von Gabber 6.2.6 sagt uns also, dass das charakteristische Ideal $\mathrm{J}(M)$ eines endlich erzeugten D-Moduls M unter der Poisson-Klammer auf $\mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ abgeschlossen ist.

Wegen $\mathrm{J}(M) = \mathcal{I}_{\mathsf{k}^{\mathrm{n}}}(\mathrm{Ch}(M))$ (siehe 6.1.6) folgt Korollar 6.2.7 aus dem folgenden Lemma 6.2.19 (in dem man $W = T^*V$ durch eine beliebige äquidimensionale glatte symplektische Varietät der Dimension n ersetzen könnte).

Lemma 6.2.19. *Sei $Z \subset W = V \oplus V^* = \mathbb{C}^{2n}$ eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge (also eine abgeschlossene Untervarietät). Dann sind äquivalent:*

(a) $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^{\mathrm{n}}}(Z)$ ist abgeschlossen unter der Poisson-Klammer auf $\mathbb{C}[\underline{X}, \underline{\xi}]$.

(b) Für alle $z \in Z$ ist $\mathrm{T}_z Z$ ein[76] koisotroper Untervektorraum des symplektischen Vektorraums $\mathrm{T}_z W = W$ (es genügt, diese Bedingung für alle $z \in Z_{\mathrm{reg}}$[77] zu verlangen[78]).

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt $\dim K \geq n$ für jede irreduzible Komponente von Z. Insbesondere gilt $\dim Z \geq n$ im Fall $Z \neq \emptyset$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Wir benötigen das folgende Hilfsresultat:

Lemma 6.2.20 (Konormalenvektor liften)**.** *Sei $z \in Z$ und sei $\lambda\colon \mathbb{C}^{2n} = W = \mathrm{T}_z W \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung mit $\lambda|_{\mathrm{T}_z Z} = 0$.* [79] *Dann gibt es ein $g \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^{\mathrm{n}}}(Z)$ mit $\lambda = d_z g$.*

Beweis. Wähle Erzeuger $f_1, \ldots, f_\ell$ von $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^{\mathrm{n}}}(Z)$. Für uns ist $\mathrm{T}_z Z$ (differentialgeometrisch anschaulich) als Kern der linearen Abbildung

$$F := \begin{pmatrix} d_z f_1 \\ \vdots \\ d_z f_\ell \end{pmatrix} = (\partial_j f_i(z))_{i=1,\ldots\ell, j=1\ldots,2n} \colon \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^\ell$$

definiert. Die angegebene Matrix ist die Jacobi-Matrix ausgewertet bei z[80]. Sei $B \subset \mathbb{C}^\ell$ ihr Bild. Da λ auf $\mathrm{T}_z Z$ verschwindet, faktorisiert λ wie angedeutet eindeutig zu einer linearen

[76] Im Beweis von Lemma wird erklärt, mit welcher Definition des Tangentialraums wir arbeiten.

[77] Es ist Z_{reg} die Menge aller Punkte $z \in Z$, für die $\mathcal{O}_{Z,z}$ ein regulärer lokaler Ring ist.

[78] In [Cou95] wird Z in diesem Fall involutiv genannt, was wohl ein Synonym für koisotrop ist.

[79] Es ist also λ ein Element der Faser $\left(\frac{\mathrm{T}_z W}{\mathrm{T}_z Z}\right)^*$ des Konormalenbündels über z.

[80] Dabei ist $\partial_j = \partial_{X_j}$ für $1 \leq j \leq n$ und $\partial_j = \partial_{X_{j-n}}$ für $n \leq j \leq 2n$.

Abbildung λ':

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{T}_z Z \arrow[r] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\lambda"'] & B \arrow[d, dotted, "\lambda'"] & \subset & \mathbb{C}^\ell \arrow[dl, dotted, "\lambda''"] \\
 & & & \mathbb{C} & &
\end{tikzcd}$$

Wie weiter angedeutet, können wir die lineare Abbildung λ' (im allgemeinen uneindeutig) linear auf $\mathbb{C}^\ell$ fortsetzen. Diese Fortsetzung λ'' ist durch einen Zeilenvektor $(a_1, \dots, a_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ gegeben. Es gilt

$$\lambda = \lambda'' \circ F = \sum_{i=1}^{\ell} a_i d_z f_i = d_z\Big(\sum_{i=1}^{\ell} a_i f_i\Big).$$

Wir können also $g := \sum_{i=1}^{\ell} a_i f_i \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$ wählen. $\square$

Sei $z \in Z$. Zu zeigen ist $(\mathrm{T}_z Z)^{\perp\omega} \subset T_z Z$. Sei $A \in (\mathrm{T}_z Z)^{\perp\omega} \subset W = \mathbb{C}^{2n}$. Dann verschwindet

$$\Phi(A) = \omega(A, -)\colon \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$$

auf $\mathrm{T}_z Z$. Nach Lemma 6.2.20 gibt es ein $g \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$ mit $d_z g = \Phi(A)$.

Für beliebiges $f \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$ gilt laut Annahme an die Poissonklammer $\{f, g\} \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$ und somit

$$0 = \{f, g\}(z) = \omega(\Phi^{-1}(d_z f), \Phi^{-1}(d_z g) = \omega(\Phi^{-1}(d_z f), A) \overset{(6.2.3)}{=} d_z f(A).$$

Also liegt A im simultanen Kern aller $d_z f$, für $f \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$. Dies ist aber $\mathrm{T}_z Z$ (vgl. Beweis der Hilfsaussage, Lemma 6.2.20). Somit ist $\mathrm{T}_z Z$ koisotrop.

(b) $\Rightarrow$ (a): (Implikation unwichtig für uns) Seien $g \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$ und $z \in Z_{\mathrm{reg}}$. Dann verschwindet $d_z g\colon \mathrm{T}_z W = W \to \mathbb{C}$ auf $\mathrm{T}_z Z$. Wegen

$$d_z g \overset{(6.2.3)}{=} \omega(\Phi^{-1}(d_z g), -)$$

gilt $\Phi^{-1} \in (\mathrm{T}_z Z)^{\perp\omega}$ und mit der angenommenen Koisotropie der Tangentialräume

$$\Phi^{-1}(d_z g) \in (\mathrm{T}_z Z)^{\perp\omega} \subset T_z Z.$$

Für beliebiges $f \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$ folgt somit

$$\{f, g\}(z) = \omega(\Phi^{-1}(d_z f), \Phi^{-1}(d_z g) \overset{(6.2.3)}{=} d_z f(\Phi^{-1}(d_z g)) = 0.$$

Da $z \in Z_{\mathrm{reg}}$ beliebig war und Z_{reg} offen und dicht in Z ist (siehe [Har77, Thm. 5.3] (da Varietäten dort als irreduzibel vorausgesetzt sind, muss man Z in irreduzible Komponenten zerlegen und ein kleines Argument ergänzen), oder [GW10, Remark 6.25.(4)] für allgemeinere Ausagen), folgt $\{f, g\}|_Z = 0$, also $\{f, g\} \in \mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$. Also ist $\mathcal{I}_{\mathsf{k}^\mathrm{n}}(Z)$ abgeschlossen unter der Poisson-Klammer

Die Äquivalenz der beiden Bedingungen in Lemma 6.2.19 ist damit gezeigt. Sind beide Bedingungen erfüllt, so gilt $\dim \mathrm{T}_z Z \geq n$ für alle $z \in Z$, denn koisotrope Vektorräume haben mindestens die halbe Dimension des umgebenden Raumes (siehe 6.2.18). Hoffentlich ist anschaulich klar, dass daraus $\dim K \geq n$ für jede irreduzible Komponente von Z folgt.

Wer die Formel $\dim Z = \inf_{z \in Z} \dim \mathrm{T}_z Z$ kennt, schließt sofort $\dim Z \geq n$ im Fall $Z \neq \emptyset$. Ist K eine irreduzible Komponente von Z, so sei K_0 die offene Teilmenge von K all derjenigen Punkte, die in keiner anderen irreduziblen Komponente liegen. Es ist K_0 dicht in K und somit

gilt $\dim K = \dim K_0$. Außerdem gilt für alle $z \in K_0$ die Gleichheit $\mathrm{T}_z K_0 = T_z Z$. Mit der Formel $\dim K_0 = \inf_{z \in K_0} \dim \mathrm{T}_z K_0$ liefert dies ebenfalls $\dim K \geq n$.

Für diejenigen, die diese Formeln nicht kennen, versuchen wir, eine ad hoc Begründung zu geben.

Sei K eine irreduzible Komponente von Z. Sei $A := \frac{\mathbb{C}[\underline{X},\underline{\xi}]}{\mathcal{I}_{\mathrm{k}^{\mathrm{n}}}(K)}$ der Koordinatenring von K. Für $z \in K$ sei $\mathfrak{m}_z$ das zugehörige maximale Ideal in A. Aus 5.3.8 und Satz 5.3.11 erhalten wir

$$\dim K = \dim A = \underbrace{\dim(A/\mathfrak{m}_z)}_{=\,0,\text{ da Körper}} + \mathrm{ht}(\mathfrak{m}_z) = \dim A_{\mathfrak{m}_z}$$

für alle $z \in K$.

Nach [AM69, Cor. 11.15] gilt

$$\dim A_{\mathfrak{m}_z} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{n}_z^2},$$

wobei $\mathfrak{n}_z := \mathfrak{m}_z A_{\mathfrak{m}_z}$ das maximale Ideal in $A_{\mathfrak{m}_z}$ ist. Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn $A_{\mathfrak{m}_z}$ ein regulärer lokaler Ring ist (dies ist eine mögliche Definition eines regulären lokalen Rings, siehe [AM69, Thm. 11.22]), wenn also $z \in K_{\mathrm{reg}}$ gilt.

Es gilt $\mathrm{T}_z K \cong (\frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{n}_z^2})^*$ ([GW10, Def. 6.2 und Example 6.5]). Zusammengefaßt erhalten wir für alle $z \in K_{\mathrm{reg}}$

$$\dim K = \dim \mathrm{T}_z K.$$

Wir erinnern daran, dass $K_{\mathrm{reg}} \subset K$ offen und dicht ist.

Sei $C \subset Z$ die Vereinigung aller irreduziblen Komponenten $\neq K$ von Z; dies ist eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von Z. Für alle $z \in K - C$ gilt $\mathrm{T}_z K = \mathrm{T}_z Z$, denn die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{K,z} = A_{\mathfrak{m}_z}$ und $\mathcal{O}_{Z,z}$ stimmen überein, und somit die Quotienten ihrer maximalen Ideale modulo deren Quadrate, und die Dualräume dieser Quotienten.

Da K_{reg} und $K - C$ nichtleere offene Teilmengen der irreduziblen Menge K sind, ist $K_{\mathrm{reg}} \cap (K - C) = K_{\mathrm{reg}} - C$ nicht leer. Indem wir ein beliebiges $z \in K_{\mathrm{reg}} - C \neq \emptyset$ wählen, erhalten wir

$$\dim K = \dim \mathrm{T}_z K = \dim \mathrm{T}_z Z \geq n.$$

Da $\dim Z$ das Supremum der Dimensionen der (endlich vielen) irreduziblen Komponenten von Z ist, folgt $\dim Z \geq n$ im Falle $Z \neq \emptyset$. □

Dies beendet den Beweis von Korollar 6.2.7. □

Ende der 21. Vorlesung am 19.12.2018.

6.3. **Krull-Dimension der charakteristischen Varietät als Bernstein-Dimension.**

Satz 6.3.1. *Für jeden endlich erzeugten $D(n)$-Modul M stimmt die Dimension der charakteristischen Varietät mit der Bernstein-Dimension überein, in Formeln*

$$\dim \mathrm{Ch}(M) = d_B(M). \tag{6.3.1}$$

[81]

[81] Die Bernstein-Multiplizität $e_B(M)$ kann man nicht aus $\mathrm{Ch}(M)$ bestimmen, denn es gilt $e_B(M \oplus M) = 2e_B(M)$, aber $\mathrm{Ch}(M \oplus M) = \mathrm{Ch}(M)$.

6.3.2. Für $M \neq 0$ folgt aus der Bernstein-Ungleichung $d_B(M) \geq n$ (Satz 4.5.4) und somit $\dim(\mathrm{Ch}(M)) \geq n$. Diese Aussage ist etwas schwächer als die Aussage von Korollar 6.2.7, die wir im Abschnitt 6.2 aus dem (nicht bewiesenen) Satz von Gabber 6.2.6 gefolgert haben. Dort haben wir gesehen, dass die charakteristische Varietät $\mathrm{Ch}(M)$ eine koisotrope (oder involutive) Untervarietät des $\mathsf{k}^{2n} = \mathrm{T}^*\,\mathsf{k}^n$ ist und somit all ihre irreduziblen Komponenten Dimension $\geq n$ haben müssen.

6.3.3. Man beachte, dass $\mathrm{Ch}(M)$ mit Hilfe der Ordnungsfiltrierung, $d_B(M)$ aber mit Hilfe der Bernstein-Filtrierung auf der Weyl-Algebra $D(n)$ definiert ist. Dies macht den Beweis von Satz 6.3.1 diffizil.

Beweis. [82] Setze $D := D(n)$. Sei M von Elementen $m_1, \ldots, m_\ell$ erzeugt, wobei ohne Einschränkung $\ell \geq 1$ gilt. Wir zeigen die Aussage per Induktion über ℓ. Wir beginnen mit dem (einfachen) Induktionsschritt und zeigen danach den Induktionsanfang $\ell = 1$.

Induktionsschritt: Setze $M' := Dm_1 + \cdots + Dm_{\ell-1}$ und $M'' := M/M'$. Per Induktionsannahme gilt die Aussage des Satzes für M' und M''. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ch}(M)) = \dim(\mathrm{Ch}(M') \cup \mathrm{Ch}(M'')) &= \max(\mathrm{Ch}(M'), \mathrm{Ch}(M'')) \\ &= \max(d_B(M'), d_B(M'')) = d_B(M)\end{aligned}$$

unter Verwendung der Lemmata 6.1.11 und 4.4.26 und von Bemerkung 5.3.4.

Bevor wir die Induktionsannahme zeigen, führen wir die folgende Notation ein. Sei $A = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$. Wir können A auf verschieden Weisen als graduierte Algebra auffassen; für uns sind nun relevant:

- Sei A_F die graduierte Algebra, deren unterliegende Algebra A ist und für die alle X_i homogen vom Grad Null und alle ∂_i homogen vom Grad Eins sind.
  Für die Ordnungsfiltrierung FD auf D gilt $\mathrm{gr}_F\, D \xrightarrow{\sim} A_F$ (Sätze 3.2.4 und 3.2.6). Wir identifizieren im Folgenden $\mathrm{gr}_F\, D = A_F$ entlang dieses Isomorphismus graduierter Algebren.
- [83] Für $s \in \mathbb{N}$ sei $A_{(s)}$ die graduierte Algebra, deren unterliegende Algebra A ist und für die alle X_i homogen vom Grad Eins und alle ∂_i homogen vom Grad s sind.
  Für die Bernstein-Filtrierung BD auf D gilt $\mathrm{gr}_B\, D \xrightarrow{\sim} A_{(1)}$ (Satz 2.5.19).

Induktionsannahme: Zu zeigen ist (6.3.1) für zyklische D-Moduln M.

Sei M ein zyklischer D-Modul. Die Wahl eines Erzeugers liefert einen Epimorphismus $D \twoheadrightarrow M$. Sei L sein Kern, ein Linksideal in D, so ist

$$0 \to L \to D \to M \to 0 \tag{6.3.2}$$

eine kurze exakte Sequenz von D-Moduln, also $M \cong D/L$. Mit der guten Ordnungsfiltrierung FD auf D und den induzierten guten Filtrierungen FL auf L und FM auf M erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{gr}_F\, L \to A_F \to \mathrm{gr}_F\, M \to 0 \tag{6.3.3}$$

graduierter Moduln über der graduierten Algebra $A_F = \mathrm{gr}_F\, D$. Es folgt $\frac{A}{\mathrm{gr}_F\, L} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_F\, M$, also $\mathrm{gr}_F\, L = \mathrm{Ann}_A(\mathrm{gr}_F\, M)$, und somit nach Definition 6.1.5 der charakteristischen Varietät und

[82] Der folgende Beweis ist mein Versuch, den Beweis im Vorlesungsskript von Milicic nachzuvollziehen.

[83] Wird erst im Beweis von (6.3.5) benötigt.

Lemma 5.1.12

$$\mathrm{Ch}(M) = \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_F M) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_F L).$$

Es genügt also, die beiden Ungleichungen

$$\dim \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_F M) \leq d_B(M) \tag{6.3.4}$$

und

$$\dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_F L) \geq d_B(M) \tag{6.3.5}$$

zu zeigen.

Wir zeigen zuerst (6.3.4). Sei BD die Bernsteinfiltrierung auf D. Seien BL und BM die induzierten Filtrierungen auf L und $M \cong D/L$. Für $p \in \mathbb{Z}$ betrachte die Inklusionen

$$\begin{array}{ccccc} & & L & \subset & D \\ & & \cup & & \cup \\ B_pL & = & L \cap B_pD & \subset & B_pD. \end{array}$$

Wir versehen die endlichdimensionalen Vektorräume B_pD und B_pL mit den von der Ordnungsfiltrierung FD induzierten Vektorraum-Filtrierungen und nennen diese FB_pD und FB_pL. Gehen wir zu den assoziierten graduierten Vektorräumen über, so erhalten wir das kommutative Diagramm von Inklusionen (genauer: injektiven Abbildungen)

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{gr}_F L & \subset & \mathrm{gr}_F D & = & A_F \\ \cup & & \cup & & \\ \mathrm{gr}_F B_pL & \subset & \mathrm{gr}_F B_pD. & & \end{array}$$

Für $q \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathrm{gr}_F^q B_pD = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|=q, |\alpha|+|\beta|\leq p}} \mathsf{k}X^\alpha\xi^\beta & \text{falls } 0 \leq q \leq p, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei GA die Gradfiltrierung auf $A = \mathsf{k}[\underline{X}, \underline{\xi}]$ (also $G_pA = \bigoplus_{|\alpha|+|\beta|\leq p} \mathsf{k}X^\alpha\xi^\beta$). Es bezeichne $G\,\mathrm{gr}_F L$ und $G\,\mathrm{gr}_F M$ die induzierten Filtrierung auf $\mathrm{gr}_F L$ und $\mathrm{gr}_F M$. Es folgt $\mathrm{gr}_F B_pD = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_F^q B_pD \subset G_pA$, somit $\mathrm{gr}_F B_pL \subset G_p\,\mathrm{gr}_F L$ und

$$\dim B_pL = \dim \mathrm{gr}_F B_pL \leq \dim G_p\,\mathrm{gr}_F L.$$

Wegen $\dim B_pD = \dim G_pA$ folgt

$$\dim B_pM = \dim B_pD - \dim B_pL \geq \dim G_pA - \dim G_p\,\mathrm{gr}_F L = \dim G_p\,\mathrm{gr}_F M.$$

Da die Filtrierungen BM (bezüglich (D, BD)) und $G\,\mathrm{gr}_F M$ (bezüglich (A, GA)) gut sind, folgt für die Hilbert-Dimensionen

$$d_B(M) \geq d_G(\mathrm{gr}_F M) = \dim \mathrm{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_F M),$$

wobei die zweite Gleichung aus Satz 5.3.13 folgt. Dies zeigt (6.3.4).

Es bleibt (6.3.5) zu zeigen. Neben der Ordnungsfiltrierung FD und der Bernstein-Filtrierung BD auf D benötigen wir gewisse „interpolierende“ Filtrierungen $B^{(s)}D$ auf D. Sei $s \in \mathbb{N}$. Definiere für $p \in \mathbb{Z}$

$$B_p^{(s)}D := \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta\ \in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|+s|\beta|\leq p}} \mathsf{k}X^\alpha\partial^\beta.$$

Indem man den Beweis von Satz 2.5.9 in offensichtlicher Weise adaptiert, zeigt man, dass die $B_p^{(s)}D$ eine ausschöpfende nicht-negative Filtrierung $B^{(s)}D$ auf D definieren, die zusätzlich

$$[B_p^{(s)}D, B_q^{(s)}D] \subset B_{p+q-2}^{(s)}D$$

erfüllt. (Es ist $B^{(1)}D = BD$ die Bernstein-Filtrierung.) Die offensichtliche Adaption des Beweises von Satz 2.5.19 zeigt, dass die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi_p^{(s)} \colon B_p^{(s)}D &\to A_{(s)}^p, \\ \sum_{|\alpha|+s|\beta|\leq p} c_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta &\mapsto \sum_{|\alpha|+s|\beta|=p} c_{\alpha\beta}X^\alpha\xi^\beta, \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

für $p \in \mathbb{Z}$, einen Isomorphismus

$$\operatorname{gr}_{B^{(s)}} D \xrightarrow{\sim} A_{(s)}$$

graduierter Algebren induzieren. Wir identifizieren oft $\operatorname{gr}_{B^{(s)}} D = A_{(s)}$ entlang dieses Isomorphismus.

Es bezeichne $G^{(s)}A$ die von der Graduierung auf $A_{(s)}$ induzierte Filtrierung auf A, also

$$G_p^{(s)}A := \bigoplus_{j\leq p} A_{(s)}^j = \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|+s|\beta|\leq p}} \mathsf{k}X^\alpha\xi^\beta$$

für $p \in \mathbb{Z}$. Es ist $G^{(1)}A = GA$ die übliche Gradfiltrierung.

Offensichtlich gelten

$$\begin{aligned} &G_p^{(s)}A \subset G_p^{(1)}A = G_pA && \text{und} \\ &G_p^{(1)}A = G_pA \subset G_{sp}^{(s)}A && \text{für alle } s \geq 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ist $A \twoheadrightarrow N$ ein Epimorphismus von A-Moduln und bezeichnet $G^{(s)}N$ die induzierte Filtrierung auf dem Quotient N, so folgt (wobei $GN := G^{(1)}N$)

$$\begin{aligned} &G_p^{(s)}N \subset G_pN && \text{und} \\ &G_pN \subset G_{sp}^{(s)}N && \text{für alle } s \geq 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Betrachten wir wieder die Filtrierungen $B^{(s)}D$ von D, so gilt analog

$$\begin{aligned} &B_p^{(s)}D \subset B_p^{(1)}D = B_pD && \text{und} \\ &B_p^{(1)}D = B_pD \subset B_{sp}^{(s)}D && \text{für alle } s \geq 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Versehen wir $L \subset D$ und $M \cong D/L$ mit den induzierten Filtrierungen $B^{(s)}L$ und $B^{(s)}M$, so folgt

$$\begin{aligned} &B_p^{(s)}M \subset B_p^{(1)}M = B_pM && \text{und} \\ &B_p^{(1)}M = B_pM \subset B_{sp}^{(s)}M && \text{für alle } s \geq 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Sei $t \in \mathbb{N}$. Aus der kurzen exakten Sequenz (6.3.2) erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{gr}_{B^{(t)}} L \to A_{(t)} \to \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M \to 0$$

graduierter Moduln über $\operatorname{gr}_{B^{(t)}} D \xrightarrow{\sim} A_{(t)}$.

Insbesondere (durch Vergessen der Graduierung) haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{gr}_{B^{(t)}} L \to A \to \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M \to 0$$

von A-Moduln. Es folgt $\operatorname{Ann}_A(\operatorname{gr}_{B^{(t)}} M) = \operatorname{gr}_{B^{(t)}} L$. Die Filtrierungen $G^{(s)}A$ auf A induzieren Filtrierungen $G^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M$ auf $\operatorname{gr}_{B^{(t)}} M$. Aus (6.3.7), angewandt auf den Quotienten $N = \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M$, folgt

$$\begin{aligned} &G_p^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M \subset G_p \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M && \text{und} \\ &G_p \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M \subset G_{sp}^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(t)}} M && \text{für alle } s \geq 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wir dürfen hier $t = s$ setzen und erhalten

$$\begin{aligned} &G_p^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M \subset G_p \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M && \text{und} \\ &G_p \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M \subset G_{sp}^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M && \text{für alle } s \geq 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Sei nun $s \in \mathbb{N}$. Die Filtrierung $G^{(s)}A$ kommt von der Graduierung auf $A_{(s)}$. Da $A_{(s)} \twoheadrightarrow \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M$ ein Epimorphismus graduierter $A_{(s)}$-Moduln ist, ist die induzierte Filtrierung $G^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M$ assoziiert zu der Graduierung auf $\operatorname{gr}_{B^{(s)}} M$. Daraus folgt die erste der folgenden zwei Gleichungen, die zweite ist eh klar (sie folgt aus den offensichtlich kurzen exakten Sequenzen per Induktion, da die Filtrierung $B^{(s)}M$ bei Null beginnend ist), wobei $p \in \mathbb{Z}$:

$$\dim G_p^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M = \dim \bigoplus_{j \leq p} \operatorname{gr}^j_{B^{(s)}} M = \dim B_p^{(s)} M.$$

Daraus folgt mit den Inklusionen in (6.3.8) und (6.3.9) für beliebige $p \in \mathbb{Z}$ und $s \geq 1$

$$\dim B_p M \leq \dim B_{sp}^{(s)} M = \dim G_{sp}^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M \leq \dim G_{sp} \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M$$

und

$$\dim G_p \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M \leq \dim G_{sp}^{(s)} \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M = \dim B_{sp}^{(s)} M \leq \dim B_{sp} M.$$

Da die Filtrierungen BM (bezüglich (D, BD)) und $G \operatorname{gr}_{B^{(s)}} M$ (bezüglich (A, GA)) gut sind, folgt für die Hilbert-Dimensionen

$$d_B(M) = d_G(\operatorname{gr}_{B^{(s)}} M) = \dim \operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_{B^{(s)}} M) = \dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_{B^{(s)}} L) \qquad \text{für alle } s \geq 1,$$

wobei die zweite Gleichung aus Satz 5.3.13 und die dritte Gleichung aus Lemma 5.1.12 mit der obigen Beobachtung $\operatorname{Ann}_A(\operatorname{gr}_{B^{(s)}} M) = \operatorname{gr}_{B^{(s)}} L$ folgen. Für die gewünschte Abschätzung (6.3.5) genügt es somit,

$$\dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_F L) \geq \dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\operatorname{gr}_{B^{(s)}} L) \tag{6.3.10}$$

für ein $s \geq 1$ zu zeigen. Zur Orientierung im Beweis: Unser nächstes Zwischenziel ist die Inklusion (6.3.13) für ein geeignetes $s \geq 1$, aus der die gewünschte Ungleichung dann schnell folgt.

Ende der 22. Vorlesung am 7.1.2019.

Wir benötigen etwas Notation zur Formulierung der Hilfaussage Lemma 6.3.4. Sei

$$h_p\colon G_pA \to A^p, \tag{6.3.11}$$
$$Q = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,\\ |\alpha|+|\beta|\le p}} q_{\alpha\beta}X^\alpha\xi^\beta \mapsto h_p(Q) := \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,\\ |\alpha|+|\beta|=p}} q_{\alpha\beta}X^\alpha\xi^\beta.$$

die Abbildung, die einem Polynom vom Grad $\le p$ seinen homogenen Anteil vom Grad p zuordnet. Wir erinnern außerdem an die m-Symbolabbildung (wobei $m \in \mathbb{N}$)

$$\mathrm{Sym}_m\colon F_mD \to (A_F)^m, \tag{6.3.12}$$
$$T = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\\ |\beta|\le m}} t_\beta(\underline{X})\partial^\beta \mapsto \mathrm{Sym}_m(T) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\\ |\beta|=m}} t_\beta(\underline{X})\xi^\beta,$$

vgl. 3.2.7. (Unter der Identifikation $\mathrm{gr}_F D = A_F$ ist diese Abbildung schlicht die Abbildung $F_mD \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_F^m D = (A_F)^m$.)

Lemma 6.3.4. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $T \in F_mD$ mit $\mathrm{Sym}_m(T) \neq 0$. Sei p der übliche Grad von $\mathrm{Sym}_m(T)$ als Polynom, also $\mathrm{Sym}_m(T) \in G_pA - G_{p-1}A$ (es gilt $p \ge m$). Dann gibt es ein $s_0 \ge 1$, so dass für alle $s \ge s_0$ die Aussagen $T \in B^{(s)}_{p-m+sm}D$ und*

$$h_p(\mathrm{Sym}_m(T)) = \psi^{(s)}_{p-m+sm}(T)$$

gelten (siehe (6.3.6) für die Definition von $\psi^{(s)}_p$).[84]

Beispiel 6.3.5. Sei $T = X^3\partial + X\partial^2 + \partial^2 \in F_2D(1)$, also $m = 2$. Dann hat $\mathrm{Sym}_2(T) = X\xi^2 + \xi^2$ Grad $p = 3$ und es gilt $h_3(\mathrm{Sym}_2(T)) = X\xi^2$. Andererseits gelten

$$\psi^{(s)}_{p-m+sm}(T) = \psi^{(s)}_{1+sm}(T) = \begin{cases} \psi^{(1)}_3(T) \text{ nicht definiert, da } T \notin B^{(1)}_3D(1) = B_3D(1) & \text{für } s = 1,\\ \psi^{(2)}_5(T) = X^3\xi + X\xi^2 & \text{für } s = 2,\\ \psi^{(s)}_{1+2s}(T) = X\xi^2 & \text{für } s \ge 3. \end{cases}$$

Die Aussage des Lemmas gilt also für $s_0 = 3$.

Beweis von Lemma 6.3.4. Schreibe

$$T = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\le a, |\beta|\le m} t_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta$$

für geeignete $a \in \mathbb{N}$ und $t_{\alpha\beta} \in \mathsf{k}$. Nach Annahme hat

$$\mathrm{Sym}_m(T) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\le a, |\beta|=m} t_{\alpha\beta}X^\alpha\xi^\beta$$

Grad p, und somit gilt

$$h_p(\mathrm{Sym}_m(T)) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\le a, |\beta|=m, |\alpha|=p-m} t_{\alpha\beta}X^\alpha\partial^\beta.$$

Wir behaupten, dass die Aussage des Lemmas für $s_0 := \max(a + m - p + 1, 1)$ gilt. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le a$ und $|\beta| \le m$. Sei $s \ge s_0$. Es gilt $X^\alpha\partial^\beta \in B^{(s)}_{|\alpha|+s|\beta|}D$. Wir unterscheiden drei Fälle:

[84] Die erste Aussage stellt sicher, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung definiert ist.

- $|\beta| = m$ und $|\alpha| = p - m$: Dann gilt $X^\alpha \partial^\beta \in B^{(s)}_{p-m+sm} D$.
- $|\beta| = m$ und $|\alpha| < p - m$: Dann gilt $X^\alpha \partial^\beta \in B^{(s)}_{p-m+sm-1} D$.
- $|\beta| < m$: Dann gilt $X^\alpha \partial^\beta \in B^{(s)}_{|\alpha|+s|\beta|} D \subset B^{(s)}_{a+s(m-1)} D$. Wegen $s \geq a + m - p + 1$ folgt $a - s \leq p - m - 1$ und somit $a + sm - s \leq p - m + sm - 1$, also $X^\alpha \partial^\beta \in B^{(s)}_{p-m+sm-1} D$.

Daraus folgen wie gewünscht $T \in B^{(s)}_{p-m+sm} D$ und

$$\psi^{(s)}_{p-m+sm}(T) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq a, |\beta| = m, |\alpha| = p-m} t_{\alpha\beta} X^\alpha \xi^\beta.$$

□

Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{gr}_F L \to A \to \operatorname{gr}_F M \to 0$$

aus (6.3.3) und vergiss kurzzeitig die Graduierungen. Versieh A mit der Filtrierung $GA = G^{(1)}A$ und betrachte die induzierten Filtrierungen $G \operatorname{gr}_F L$ auf $\operatorname{gr}_F L$ und $G \operatorname{gr}_F M$ auf $\operatorname{gr}_F M$. Dies liefert wegen $A_{(1)} \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_G A$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{gr}_G \operatorname{gr}_F L \to A_{(1)} \to \operatorname{gr}_G \operatorname{gr}_F M \to 0$$

von graduierten $A_{(1)}$-Moduln. Da A noethersch ist, ist das (homogene) Ideal $\operatorname{gr}_G \operatorname{gr}_F L$ endlich erzeugt. Wir wollen Erzeuger geeignet liften und starten mit einer Vorüberlegung.

Sei $p \in \mathbb{Z}$ und $E \in \operatorname{gr}^p_G \operatorname{gr}_F L$. Wähle einen Lift

$$\hat{E} \in G_p \operatorname{gr}_F L \subset G_p A = \bigoplus_{|\alpha|+|\beta| \leq p} \mathsf{k} X^\alpha \xi^\beta$$

von E, d. h. es gilt

$$h_p(\hat{E}) = E,$$

wobei $h_p \colon G_p \operatorname{gr}_F L \to \operatorname{gr}^p_G \operatorname{gr}_F L$ die Einschränkung der Abbildung h_p in (6.3.11) ist.

Sei

$$\hat{E} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{E}_j \in \operatorname{gr}_F L = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{gr}^j_F L$$

die Zerlegung in homogene Komponenten.

Wir behaupten, dass alle $\hat{E}_j$ ebenfalls in $G_p A$ und damit in $G_p \operatorname{gr}_F L$ liegen. In der Tat, schreibt man $\hat{E} = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq p} c_{\alpha\beta} X^\alpha \xi^\beta$, so folgt $\hat{E}_j = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq p, |\beta| = j} c_{\alpha\beta} X^\alpha \xi^\beta \in G_p A$ (und auch $\hat{E}_j = 0$ für alle $j \notin [0, p]$).

Sei $J := \{j \in \mathbb{Z} \mid \hat{E}_j \in G_p A - G_{p-1} A\}$ die (endliche) Menge all derjenigen $j \in \mathbb{Z}$, für die $\hat{E}_j$ Grad p hat. Wegen

$$\hat{E}' := \hat{E} - \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z} - J} \hat{E}_j}_{\in G_{p-1} \operatorname{gr}_F L} = \sum_{j \in J} \hat{E}_j$$

gilt

$$h_p(\hat{E}') = h_p(\hat{E}) = E.$$

Sei $\tilde{E}_j \in F_j L$ ein Lift von $\hat{E}_j \in \operatorname{gr}^j_F L$, d. h. es gilt

$$\operatorname{Sym}_j(\tilde{E}_j) = \hat{E}_j,$$

wobei $\mathrm{Sym}_j\colon F_jL \to \mathrm{gr}_F L$ die Einschränkung der Symbolabbildung (6.3.12) ist.

Nach Definition von J und Lemma 6.3.4 (und weil J endlich ist) gibt es ein $s_0 \geq 1$, so dass für alle $j \in J$ und alle $s \geq s_0$ die Aussagen $\tilde{E}_j \in B^{(s)}_{p-j+sj}D$ und

$$\psi^{(s)}_{p-j+sj}(\tilde{E}_j) = h_p(\mathrm{Sym}_j(\tilde{E}_j)) = h_p(\hat{E}_j) \in \mathrm{gr}^p_G \,\mathrm{gr}_F L$$

gelten. Es folgt

$$E = h_p(\hat{E}') = \sum_{j\in J} h_p(\hat{E}_j) = \sum_{j\in J} \psi^{(s)}_{p-j+sj}(\tilde{E}_j)$$

für alle $s \geq s_0$. Dies beendet die Vorüberlegung.

Seien nun $E_1, \ldots, E_\ell$ homogene Erzeuger des homogenen Ideals $\mathrm{gr}_G \,\mathrm{gr}_F L$ von A, wobei E_i Grad p_i habe. Nach der Vorüberlegung gibt es ein $s_0 \geq 1$ und Elemente $\tilde{E}_{ij} \in F_jL$, für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ und j in einer von i abhängigen endlichen Indexmenge J_i, so dass für alle $s \geq s_0$ und alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ die Aussagen $\tilde{E}_{ij} \in B^{(s)}_{p_i-j+sj}D$ und

$$\psi^{(s)}_{p_i-j+sj}(\tilde{E}_{ij}) = h_p(\mathrm{Sym}_j(\tilde{E}_{ij})) \in \mathrm{gr}^p_G \,\mathrm{gr}_F L,$$

für alle $j \in J_i$, und

$$E_i = \sum_{j\in J_i} \psi^{(s)}_{p_i-j+sj}(\tilde{E}_{ij})$$

gelten. Die Elemente $\psi^{(s)}_{p_i-j+sj}(\tilde{E}_{ij})$ sind also Erzeuger des Ideals $\mathrm{gr}_G \,\mathrm{gr}_F L$ von A.

Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B^{(s)}_p D \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[rr, bend left, "\psi^{(s)}_p"] & \mathrm{gr}^p_{B^{(s)}} D \arrow[r, phantom, "="] & A_{(s)} \\
\cup & \cup & \\
B^{(s)}_p L \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathrm{gr}^p_{B^{(s)}} L &
\end{tikzcd}$$

zeigt, dass die Abbildung $\psi^{(s)}_p$ (siehe (6.3.6)) Elemente von $B^{(s)}_p L$ nach $\mathrm{gr}^p_{B^{(s)}} L$ abbildet. Wegen $\tilde{E}_{ij} \in F_jL \cap B^{(s)}_{p_i-j+sj}D \subset L \cap B^{(s)}_{p_i-j+sj}D = B^{(s)}_{p_i-j+sj}L$ folgt $\psi^{(s)}_{p_i-j+sj}(\tilde{E}_{ij}) \in \mathrm{gr}^{p_i-j+sj}_{B^{(s)}} L$ für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $j \in J_i$. Wir folgern die Inklusion

$$\mathrm{gr}_G \,\mathrm{gr}_F L \subset \mathrm{gr}_{B^{(s)}} L \tag{6.3.13}$$

von Idealen von A (für alle $s \geq s_0$) und somit

$$\mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_G \,\mathrm{gr}_F L) \supset \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_{B^{(s)}} L).$$

Mit Lemma 5.3.14 (angewandt auf das Ideal $\mathrm{gr}_F L$) erhalten wir die Abschätzung

$$\dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_F L) = \dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_G \,\mathrm{gr}_F L) \geq \dim \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{gr}_{B^{(s)}} L).$$

Dies zeigt (6.3.10) und beendet den Beweis von Satz 6.3.1. □

Aufgabe 6.3.6. Sei M ein von einem Element $m \in M$ erzeugter $D(n)$-Modul. Sei $L = \mathrm{Ann}_{D(n)}(m)$, also $M \xrightarrow{\sim} D(n)/L$, $T \mapsto Tm$.

(a) Dann gilt

$$\mathrm{Ch}(M) = \{(x,\zeta) \in \mathsf{k}^{2n} \mid \mathrm{Sym}_{\mathrm{Fdeg}(Q)}(Q)(x,\zeta) = 0 \text{ für alle } Q \in L - 0\},$$

wobei $\mathrm{Fdeg}(Q)$ in analoger Weise zum Bernstein-Grad $\mathrm{Bdeg}(Q)$ definiert ist. [85]

(b) Im Fall $L = D(n)Q$ für ein $Q \neq 0$ gilt Gleichheit

$$\mathrm{Ch}(M) = \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{Sym}_{\mathrm{Fdeg}(Q)}(Q)).$$

Definition 6.3.7. Seien A und B Ringe. Ein **A-B-Bimodul** ist eine abelsche Gruppe X mit einer A-Linksmodulstruktur und einer B-Rechtsmodulstruktur[86], so dass $a.(x.b) = (a.x).b$ für alle $a \in A$, $x \in X$ und $b \in B$ gilt.

Aufgabe 6.3.8. Seien A, B Ringe und sei $X = {}_AX_B$ ein A-B-Bimodul. Sei N ein B-Linksmodul. Dann ist die abelsche Gruppe $X \otimes_B N$ in naheliegender Weise ein A-Linksmodul. Genauer definiert $X \otimes_B -$ einen Funktor $\mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A)$.

Hinweis: Für $a \in A$ gilt $a. \in \mathrm{End}_{-B}(X)$, wobei $\mathrm{End}_{-B}(X)$ die Menge der Endomorphismen von X als B-Rechtsmodul bezeichnet. Wegen der Funktorialität des Tensorprodukts ist $(a.) \otimes \mathrm{id}_N$ ein Endomorphismus der abelschen Gruppe $X \otimes_B N$.

Wichtiger Spezialfall: Sei $\varphi\colon B \to A$ ein Morphismus von Ringen und betrachte $A = {}_AA_B$ als A-B-Bimodul. Dann ist $A \otimes_B N$ ein A-Linksmodul. Der Funktor $A \otimes_B -\colon \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A)$ heißt **Erweiterung der Skalare** entlang φ.

Aufgabe 6.3.9. Seien A, B Ringe. Sei $X = {}_AX_B$ ein A-B-Bimodul.

(a) Ist M ein A-Linksmodul, so ist $\mathrm{Hom}_A(X, M)$ in naheliegender Weise ein B-Linksmodul.

Seien $M \in \mathrm{Mod}(A)$ und $N \in \mathrm{Mod}(B)$.

(b) (Tensor-Hom-Adjunktion $((X \otimes_B -, \mathrm{Hom}_A(X, -)))$ Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(X \otimes_B N, M) &\overset{\sim}{\leftrightarrows} \mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{Hom}_A(X, M)), \\ f &\mapsto \Big(n \mapsto f(- \otimes n)\Big), \\ \Big(x \otimes n \mapsto (g(n)(x))\Big) &\leftarrow\!\shortmid g, \end{aligned}$$

sind zueinander inverse Abbildungen[87].

(c) Sei $\varphi\colon B \to A$ ein Morphismus von Ringen. Betrachte den A-B-Bimodul $A = {}_AA_B$. Dann ist für jeden A-Modul M die naheliegende Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{res}^A_B\, M$$

von B-Moduln (Restriktion der Skalare ist in Definition 4.4.36 erklärt). Insbesondere gilt

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B N, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{res}^A_B\, M).$$

[85] Insbesondere gilt im Fall $L = \sum_{i \in I} D(n)Q_i$ für Elemente $Q_i \in D(n) - 0$ die Inklusion

$$\mathrm{Ch}(M) \subset \cap_{i \in I} \mathcal{V}_{\mathsf{k}^{2n}}(\mathrm{Sym}_{\mathrm{Fdeg}(Q_i)}(Q_i)).$$

(Im Allgemeinen gilt hier aber keine Gleichheit, siehe [Kas03, S. 18,19 und Lemma 2.11].)

[86] Hier meinen wir mit einer A-Linksmodulstruktur die entsprechende Skalarmultipliation $A \times X \to X$, und analog für die B-Rechtsmodulstruktur.

[87] falls *naheliegend* oben richtig interpretiert wurde

(d) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Morphismus von Ringen. Betrachte den A-B-Bimodul $B = {}_AB_B$. Dann ist für jeden B-Modul N die naheliegende Abbildung ein Isomorphismus

$$X \otimes_B N \xrightarrow{\sim} \operatorname{res}_A^B N$$

von A-Moduln. Insbesondere gilt

$$\operatorname{Hom}_A(\operatorname{res}_A^B N, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_B(N, \operatorname{Hom}_A(B, M)).$$

Aufgabe 6.3.10 (Tensorprodukt mit Grundring)**.** Sei A ein Ring und M ein A-Linksmodul. Dann ist $a \otimes m \mapsto am$ ein Isomorphismus

$$A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M$$

von A-Linksmoduln.

Aufgabe 6.3.11 (Assoziativität des Tensorprodukts)**.** Seien A, B, C Ringe. Seien $X = X_A$ ein A-Rechtsmodul, $Y = {}_AY_B$ ein A-B-Bimodul und $Z = {}_BY$ ein B-Linksmodul. Dann gilt

$$(X \otimes_A Y) \otimes_B Z \cong X \otimes_A (Y \otimes_B Z),$$

wobei wir verwenden, dass $X \otimes_A Y$ nach Aufgabe 6.3.8 ein B-Linksmodul ist und $Y \otimes_B Z$ analog ein A-Rechtsmodul ist.

Aufgabe 6.3.12 (Kürzen beim Tensorprodukt)**.** Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Morphismus von Ringen. Seien $X = X_B$ ein B-Rechtsmodul und $M = {}_AM$ ein A-Linksmodul. Dann ist

$$\begin{aligned} X \otimes_A M &\to X \otimes_B (B \otimes_A M), \\ x \otimes m &\mapsto x \otimes (1 \otimes m), \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus abelscher Gruppen. Dabei wird X im Ausdruck links als A-Rechtsmodul aufgefaßt und B rechts als B-A-Bimodul.

Hinweis: Aufgaben 6.3.11 und 6.3.10.

Aufgabe 6.3.13. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist die naheliegende Abbildung ein Isomorphismus

$$D(m) \otimes D(n) \xrightarrow{\sim} D(m+n)$$

von Algebren.

Aufgabe 6.3.14. Seien A und B Ringe. Dann ist für $M \in \operatorname{Mod}(A)$ und $N \in \operatorname{Mod}(B)$ die abelsche Gruppe $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ in naheliegender Weise ein Modul über $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

Aufgabe 6.3.15. Seien $I = I_R$ ein Rechtsideal in einem Ring R und M ein R-Linksmodul. Dann induziert $(\overline{r}, m) \mapsto \overline{rm}$ einen Isomorphismus

$$R/I \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M/IM.$$

Aufgabe 6.3.16. Gegeben R-Rechtsmoduln M_i, für $i \in I$, und einen R-Linksmodul N gilt $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N)$ als abelsche Gruppen (funktoriell in $(M_i)_{i\in I}$ und N für fixierte Indexmenge I).

Aufgabe 6.3.17. Gegeben ein **kommutativer** Ring R, ein R-Rechtsmodul M und ein R-Linksmodul N ist die abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ in kanonischer Weise ein R-Linksmodul (und in kanonischer Weise ein R-Rechtsmodul, und jedes Element $r \in R$ operiert in gleicher Weise von links wie von rechts).

Aufgabe 6.3.18. Sei R ein Ring. Sei $E = E_R$ ein freier R-Rechtsmodul vom Rang Eins und $F = {}_RF$ ein freier R-Linksmodul vom Rang Eins.

(a) Dann gibt es einen Isomorphimus $E \otimes_R F \xrightarrow{\sim} R$ von **abelschen Gruppen** (hier bezeichnet also R die unterliegende abelsche Gruppe von R)[88].

(b) Ist R kommutativ, so gibt es einen Isomorphismus $E \otimes_R F \xrightarrow{\sim} R$ von R-Linksmoduln. (vgl. Aufgabe 6.3.17). Genauer: Ist $e \in E$ eine Basis von E als R-Rechtsmodul[89] und f eine Basis von F als R-Linksmodul, dann ist $e \otimes f$ eine R-Linksbasis.

(c) Sei R kommutativ. Folgern Sie (mit Aufgabe 6.3.16): Sind (e_i) eine R-Rechtsbasis von $M = M_R$ und $(f_j)_{j\in J}$ eine R-Linksbasis von $N = {}_RN$, so ist $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine R-Linksbasis von $M \otimes_R N$.

Hausaufgaben: Alle Ringe in den Aufgaben sind nicht notwendig kommutativ. Der Begriff eines Bimoduls ist in Definition 6.3.7 erklärt.

(1) Aufgabe 6.3.6
(2) Aufgabe 6.3.9 (mindestens die ersten beiden Teile). Teilaufgabe (b) ist sehr nützlich. Bitte hier alle Details (Wohldefiniertheit) checken. Die A-Modulstruktur auf $X \otimes_B N$ ist die aus Aufgabe 6.3.8, die hoffentlich bereits in der Übung erklärt wurde.
(3) Aufgabe 6.3.13
(4) Aufgaben 6.3.10, 6.3.11, 6.3.12 (Standardaufgaben zum Tensorprodukt; nicht alle Details müssen aufgeschrieben werden, aber bitte trotzdem sorgfältig überlegen, warum die Abbildungen wohldefiniert sind)

7. Inverses und direktes Bild für Moduln über Weyl-Algebren

7.1. Inverses Bild oder Pullback.

7.1.1. Für $m, n \in \mathbb{N}$ setze $\mathcal{X} := \mathsf{k}^m$ und $\mathcal{Y} := \mathsf{k}^n$. Seien $\mathsf{k}[\mathcal{X}] := \mathsf{k}[X_1, \dots, X_m]$ und $\mathsf{k}[\mathcal{Y}] := \mathsf{k}[Y_1, \dots, Y_n]$ die Algebren der polynomialen Funktionen auf $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$. Sei

$$f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X},$$
$$y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y)),$$

eine polynomiale Abbildung; damit meinen wir, dass alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ polynomial sind, also $f_1, \dots, f_m \in \mathsf{k}[\mathcal{Y}]$ (vgl. Aufgabe 2.2.9).

Der **Komorphismus** $f^\sharp$ von f ist der durch

$$f^\sharp\colon \mathsf{k}[\mathcal{X}] \to \mathsf{k}[\mathcal{Y}],$$
$$P = P(X_1, \dots, X_m) \mapsto f^\sharp(P) := P(f_1, \dots, f_m),$$

definierte Algebrenmorphismus; es gilt $f^\sharp(P) = P \circ f$, wenn man P und $f^\sharp(P)$ als polynomiale Funktionen auffasst.

[88] Es ist $E \otimes_R F$ im Allgemeinen nur eine abelsche Gruppe. Natürlich ist R ein R-R-Bimodul, und man kann diese Bimodulstruktur entlang eines gewählten Isomorphismus nach $E \otimes_R F$ transferieren; die so erhaltene Bimodulstruktur hängt aber von der Wahl des Isomorphismus $E \otimes_R F \xrightarrow{\sim} R$ ab.

[89] Das bedeutet, dass jedes Element von E die Form er für ein eindeutiges $r \in R$ hat. Diese Bedingung ist echt stärker als die Bedingung $E = eR$ (unter der Annahme, dass E frei vom Rang eins ist) - ein Gegenbeispiel liefert Aufgabe 2.3.16: Sei $A \neq 0$ die Algebra dort. Dann ist 1 eine A-Rechtsbasis und Y ein A-Rechtserzeuger, aber keine Basis, denn $Y(XY - 1) = 0$.

Ist M ein $\mathsf{k}[\mathcal{X}]$-Modul, so liefert Skalarerweiterung entlang $f^\sharp$ (siehe Aufgabe 6.3.8) den $\mathsf{k}[\mathcal{Y}]$-Modul

$$f^*(M) := \mathsf{k}[\mathcal{Y}] \otimes_{\mathsf{k}[\mathcal{X}]} M = \mathsf{k}[\mathcal{Y}] \otimes_{f^\sharp, \mathsf{k}[\mathcal{X}]} M.$$

Genauer erhalten wir einen Funktor

$$f^* \colon \operatorname{Mod}(\mathsf{k}[\mathcal{X}]) \to \operatorname{Mod}(\mathsf{k}[\mathcal{Y}]). \tag{7.1.1}$$

Ende der 23. Vorlesung am 9.1.2019.

7.1.2. Seien

$$D_{\mathcal{X}} := \operatorname{Diff}(\mathsf{k}[\mathcal{X}]) = \langle X_1, \ldots, X_m, \partial_{X_1}, \ldots, \partial_{X_m} \rangle_{\text{Algebra}} = D(m)$$

und

$$D_{\mathcal{Y}} := \operatorname{Diff}(\mathsf{k}[\mathcal{Y}]) = \langle Y_1, \ldots, Y_n, \partial_{Y_1}, \ldots, \partial_{Y_n} \rangle_{\text{Algebra}} \cong D(n)$$

die zugehörigen Algebren von Differentialoperatoren.

Aufgabe 7.1.3 (Kettenregel)**.** Unter den obigen Voraussetzungen gilt für $P \in \mathsf{k}[\mathcal{X}]$

$$\partial_{Y_j}(P \circ f) = \sum_{i=1}^{m} \partial_{Y_j}(f_i)(\partial_{X_i}(P) \circ f).$$

Hinweis: Aufgabe 3.1.21. Zwei Derivationen stimmen überein, wenn sie auf Algebrenerzeugern übereinstimmen.

Lemma 7.1.4. *Sei $f \colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathcal{X} = \mathsf{k}^m$ eine polynomiale Abbildung wie oben. Sei $M \in \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{X}})$. Dann gibt es auf $f^*(M)$ genau eine $D_{\mathcal{Y}}$-Modulstruktur, die die $\mathsf{k}[\mathcal{Y}]$-Modulstruktur fortsetzt und*[90]

$$\partial_{Y_j}.(Q \otimes v) = \partial_{Y_j}(Q) \otimes v + \sum_{i=1}^{m} Q \partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}.v$$

für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, $Q \in \mathsf{k}[\mathcal{Y}]$ und $v \in M$ erfüllt. Wir bezeichnen den so erhaltenen $D_{\mathcal{Y}}$-Modul als $f^+(M)$.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, die Existenz ist zu zeigen.

Die rechte Seite von (7.1.4) ist $\mathsf{k}[\mathcal{X}]$-bilinear in Q und v, denn für $P \in \mathsf{k}[\mathcal{X}]$ gilt (die zweite Gleichheit verwendet die Kettenregel für polynomiale Abbildungen und formale Ableitungen

[90] Man kann die Formel durch die Ableitung von f motivieren.

siehe Aufgabe 7.1.3, die letzte Gleichheit verwendet $[\partial_{X_i}, P] = \partial_{X_i}(P)$)

$$
\begin{aligned}
\partial_{Y_j}(Qf^\sharp(P)) \otimes v + \sum_{i=1}^m Qf^\sharp(P)(v)\partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}.v \\
&= \partial_{Y_j}(Q)f^\sharp(P) \otimes v + Q\partial_{Y_j}(\underbrace{f^\sharp(P)}_{=P\circ f}) \otimes v + \sum_{i=1}^m Qf^\sharp(P)\partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}.v \\
&= \partial_{Y_j}(Q) \otimes Pv + Q\sum_{i=1}^m \partial_{Y_j}(f_i)\underbrace{(\partial_{X_i}(P)\circ f)}_{f^\sharp(\partial_{X_i}(P))} \otimes v + \sum_{i=1}^m Q\partial_{Y_j}(f_i) \otimes P\partial_{X_i}.v \\
&= \partial_{Y_j}(Q) \otimes Pv + \sum_{i=1}^m Q\partial_{Y_j}(f_i) \otimes (\partial_{X_i}(P)v + P\partial_{X_i}.v) \\
&= \partial_{Y_j}(Q) \otimes Pv + \sum_{i=1}^m Q\partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}(Pv).
\end{aligned}
$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts liefert dies eine lineare Abbildung $\partial_{Y_j}\colon f^*M \to f^*M$, die (7.1.4) erfüllt.

Es bleibt zu zeigen, dass die Endomorphismen $Y_1, \dots, Y_n, \partial_{Y_1}, \dots, \partial_{Y_n}$ von f^*M die Relationen der Weyl-Algebra erfüllen (siehe 2.7.10). Es ist klar, dass $[Y_\ell, Y_j] = 0$ gilt. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\partial_{Y_\ell}.(\partial_{Y_j}.(Q \otimes v)) &= \partial_{Y_\ell}.(\partial_{Y_j}(Q) \otimes v) + \sum_{i=1}^m \partial_{Y_\ell}.(Q\partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}.v) \\
&= \partial_{Y_\ell}(\partial_{Y_j}(Q)) \otimes v + \sum_{h=1}^m \partial_{Y_j}(Q)\partial_{Y_\ell}(f_h) \otimes \partial_{X_h}.v \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \partial_{Y_\ell}(Q\partial_{Y_j}(f_i)) \otimes \partial_{X_i}.v + \sum_{i=1}^m\sum_{h=1}^m Q\partial_{Y_j}(f_i)\partial_{Y_\ell}(f_h) \otimes \partial_{X_h}(\partial_{X_i}.v) \\
&= \partial_{Y_\ell}(\partial_{Y_j}(Q)) \otimes v + \sum_{h=1}^m \partial_{Y_j}(Q)\partial_{Y_\ell}(f_h) \otimes \partial_{X_h}.v \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \partial_{Y_\ell}(Q)\partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}.v + \sum_{i=1}^m Q\partial_{Y_\ell}(\partial_{Y_j}(f_i)) \otimes \partial_{X_i}.v \\
&\quad + \sum_{i=1}^m\sum_{h=1}^m Q\partial_{Y_j}(f_i)\partial_{Y_\ell}(f_h) \otimes \partial_{X_h}(\partial_{X_i}.v)
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn man ℓ und j vertauscht und stimmt somit mit $\partial_{Y_j}.(\partial_{Y_\ell}.(Q \otimes v))$ überein. Dies zeigt die Relation $[\partial_{Y_\ell}, \partial_{Y_j}] = \delta_{\ell j}$. Die Relation $[\partial_{Y_j}, Y_\ell] = \delta_{j\ell}$

folgt aus der Rechung

$$\begin{aligned}
[\partial_{Y_j}, Y_\ell].(Q \otimes v) &= \partial_{Y_j}(Y_\ell Q) \otimes v + \sum_{i=1}^{m} Y_\ell Q \partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}.v \\
&\quad - Y_\ell \partial_{Y_j}(Q) \otimes v - \sum_{i=1}^{m} Y_\ell Q \partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i}.v \\
&= \partial_{Y_j}(Y_\ell Q) \otimes v - Y_\ell \partial_{Y_j}(Q) \otimes v \\
&= ([\partial_{Y_j}, Y_\ell](Q)) \otimes v \\
&= \delta_{j\ell} Q \otimes v.
\end{aligned}$$

□

Definition 7.1.5. Ist $\varphi\colon M \to M'$ ein Morphismus von $D_{\mathcal{X}}$-Moduln, so ist $f^*\varphi\colon f^*M \to f^*M'$ sogar ein Morphismus $f^+M \to f^+M'$ von $D_{\mathcal{Y}}$-Moduln, den wir mit $f^+\varphi$ bezeichnen. Wir erhalten so den Funktor

$$f^+\colon \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{X}}) \to \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}}).$$

Dieser heißt **inverses Bild** (oder **Pullback**) (von D-Moduln[91]) entlang f.

7.1.6. Die Funktoren f^* und f^+ sind rechtsexakt[92] (dies ist klar für f^*, da das Tensorprodukt rechtsexakt ist, und folgt dann sofort für f^+, denn Exaktheit einer Sequenz $L \to M \to N$ von Moduln bei M kann auf den unterliegenden abelschen Gruppen getestet werden).

Beispiel 7.1.7 ([Kas03, Example 4.1])**.** Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}
f = Y^2\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k} &\to \mathsf{k} = \mathcal{X}, \\
y &\mapsto y^2.
\end{aligned}$$

Betrachte den zyklischen (und insbesondere endlich erzeugten) $D_{\mathcal{X}}$-Modul $M = D_{\mathcal{X}} = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} \mathsf{k}[X]\partial_X^b$. Dann gelten (wobei $\otimes = \otimes_{\mathsf{k}}$)

$$f^+(M) = \mathsf{k}[Y] \otimes_{\mathsf{k}[X]} D_{\mathcal{X}} = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} \mathsf{k}[Y] \otimes \mathsf{k}\partial_X^b$$

und

$$\partial_Y(P \otimes \partial_X^b) = \partial_Y(P) \otimes \partial_X^b + 2YP \otimes \partial_X^{b+1}$$

für $P \in \mathsf{k}[Y]$ und $b \in \mathbb{N}$ oder

$$\partial_Y(Y^a \otimes \partial_X^b) = aY^{a-1} \otimes \partial_X^b + 2Y^{a+1} \otimes \partial_X^{b+1}.$$

für $a, b \in \mathbb{N}$. Der Modul $f^+(M)$ ist nicht endlich erzeugt (siehe Aufgabe 7.1.8). Im Allgemeinen erhält f^+ Endliche-Erzeugtheit also nicht (siehe 7.3.2 für ein einfacheres Beispiel).

Aufgabe 7.1.8. Zeige, dass der $D_{\mathcal{Y}}$-Modul $f^+(M)$ aus Beispiel 7.1.7 nicht endlich erzeugt ist.

[91] Hier ist *D-Modul* als *Modul über einem geeigneten Ring von Differentialoperatoren* zu lesen.

[92] Offensichtlich sind sie additiv im Sinne der Definition A.0.25; dies ist eine Bedingung für Rechtsexaktheit.

Hinweis:[93] Setze $D = D_{\mathcal{Y}} \cong D(1)$. Analog zu unserer ursprünglichen Definition der Weyl-Algebra sei E die Unteralgebra von $\mathrm{End}(\mathsf{k}[Y, Y^{-1}])$, die von den linearen Abbildungen $Y\cdot$, $Y^{-1}\cdot$ und ∂_Y erzeugt wird. (Es gilt $E = \mathrm{Diff}(\mathsf{k}[Y, Y^{-1}]$.[94]) In offensichtlicher Weise ist E ein D-Modul. Man glaube oder beweise analog zu Satz 2.2.7, dass $E = \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}} \mathsf{k}\partial_Y^b Y^a = \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}} \mathsf{k}[\partial_Y]Y^a$ gilt. Betrachte den Untervektorraum

$$N := \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} \mathsf{k}[Y](Y^{-1}\partial_Y)^b \subset E$$

(per Anwenden auf ein Monom Y^q für großes q sieht man sofort, dass die Summe direkt ist). Zeige, dass N ein D-Untermodul von E ist, der per $Y^a(Y^{-1}\partial_Y)^b \mapsto 2^b Y^a \otimes \partial_X^b$ isomorph zu $f^+(M)$ ist. Es reicht somit zu zeigen, dass N als D-Modul nicht endlich erzeugt ist. Zeige dafür

$$(Y^{-1}\partial_Y)^b = \underbrace{(2b-1)(2b-3)\cdots 3\cdot 1}_{\neq 0} \cdot Y^{-2b} + \underbrace{\bigoplus_{a>-2b} \mathsf{k}[\partial_Y]Y^a}_{=DY^{-2b+1}} \tag{7.1.2}$$

für alle $b \in \mathbb{N}$ (es reicht, dass der Faktor vor Y^{-2b} nicht Null ist). Nehmen wir an, dass N als D-Modul von endlich vielen Elementen erzeugt ist. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Z}$, so dass all diese Erzeuger in

$$\bigoplus_{a\geq q, b\in\mathbb{N}} \mathsf{k}\partial_Y^b Y^a = \bigoplus_{a\geq q} \mathsf{k}[\partial_Y]Y^a = DY^q$$

liegen. Als D-Untermodul von E enthält dieser N. Für genügend großes $b \gg 0$ ist aber $(Y^{-1}\partial_Y)^b \in N$ nach (7.1.2) sicherlich nicht in diesem Untermodul enthalten (Widerspruch).

Definition 7.1.9. Beachte, dass der $D_{\mathcal{Y}}$-(Links)modul

$$D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} := D_{f\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{X}} := D_f := f^+(D_{\mathcal{X}}) = \mathsf{k}[\mathcal{Y}] \otimes_{\mathsf{k}[\mathcal{X}]} D_{\mathcal{X}}$$

in offensichtlicher Weise ein $D_{\mathcal{X}}$-Rechtsmodul ist. Die Linksoperation von $D_{\mathcal{Y}}$ und die Rechtsoperation von $D_{\mathcal{X}}$ kommutieren offensichtlich miteinander. Dies bedeutet, dass $D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}$ ein $D_{\mathcal{Y}}$-$D_{\mathcal{X}}$-Bimodul ist. [95] Explizit ist die Linksoperation von $\partial_{Y_j} \in \mathcal{D}_{\mathcal{Y}}$ auf $D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}$ durch

$$\partial_{Y_j}.(Q \otimes T) = \partial_{Y_j}(Q) \otimes T + \sum_{i=1}^{m} Q\partial_{Y_j}(f_i) \otimes \partial_{X_i} T \tag{7.1.3}$$

gegeben (vgl. (7.1.4)). Ausgezeichnetes Element $1 := 1 \otimes 1 \in D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}$ vermutlich später nützlich.

Beispiel 7.1.10. In Beispiel 7.1.7 haben wir $D_{Y^2\colon \mathsf{k}\to\mathsf{k}}$ ausgerechnet (siehe auch Aufgabe 7.1.8).

Lemma 7.1.11. *Für jeden $D_{\mathcal{X}}$-Modul M definiert die Zuordnung $Q \otimes T \otimes v \mapsto Q \otimes T.v$ einen Isomorphismus*

$$D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} \otimes_{D_{\mathcal{X}}} M \xrightarrow{\sim} f^+(M)$$

[93] In [Kas03, Example 4.1] wird in unserer Notation die knappe Erklärung $f^+(M) = \sum_{\ell\geq 0} \mathsf{k}[Y](Y^{-1}\partial_Y)^\ell \subset D[Y^{-1}]$ gegeben. Gerne lerne ich einen einfacheren Beweis als den skizzierten.

[94] Üblicherweise wird E als $D[Y^{-1}]$ notiert.

[95] Außerdem stimmt die Operation von k als Unterring von $D_{\mathcal{Y}}$ mit der von k als Unterring von $D_{\mathcal{X}}$ überein. Zusammengefaßt ist also $D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}$ ein $D_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathsf{k}} (D_{\mathcal{X}})^{\mathrm{op}}$-(Links-)Modul.

von $D_{\mathcal{Y}}$-Moduln. Genauer definieren diese Isomorphismen einen Isomorphismus

$$D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} \otimes_{D_{\mathcal{X}}} (-) \xrightarrow{\sim} f^+(-)$$

von Funktoren $\mathrm{Mod}(D_{\mathcal{X}}) \to \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$.

Beweis. Die angegeben Abbildung ist nach Aufgabe 6.3.12 ein Isomorphismus von $\mathsf{k}[\mathcal{Y}]$-Moduln. Dass es sich sogar um einen $D_{\mathcal{Y}}$-Modulmorphismus handelt, folgt sofort aus (7.1.3). Die Funktorialität ist klar. □

Aufgabe 7.1.12. Seien $\mathcal{Z} = \mathsf{k}^\ell \xrightarrow{g} \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \xrightarrow{f} \mathcal{X} = \mathsf{k}^m$ polynomiale Abbildungen. Dann ist

$$\begin{aligned}(f \circ g)^+(M) &\xrightarrow{\sim} g^+(f^+(M)),\\ P \otimes v &\mapsto P \otimes 1 \otimes v,\end{aligned}$$

ein Isomorphismus in $\mathrm{Mod}(D_{\mathcal{Z}})$, wobei $M \in \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{X}})$ (Hinweis: Kettenregel, Aufgabe 7.1.3). Folgere

$$D_{\mathcal{Z}\to\mathcal{X}} \xrightarrow{\sim} D_{\mathcal{Z}\to\mathcal{Y}} \otimes_{D_{\mathcal{Y}}} D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} \tag{7.1.4}$$

als $D_{\mathcal{Z}}$-$D_{\mathcal{X}}$-Bimoduln.

7.2. **Direktes Bild oder Pushforward.**

7.2.1. Wie in 7.1.1 sei $f\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathcal{X} = \mathsf{k}^m$ eine polynomiale Abbildung.

Warnung 7.2.2. Restriktion entlang des Komorphismus $f^\sharp\colon \mathsf{k}[\mathcal{X}] \to \mathsf{k}[\mathcal{Y}]$ liefert den Funktor

$$f_* = \mathrm{res}\colon\ \mathrm{Mod}(\mathsf{k}[\mathcal{Y}]) \to \mathrm{Mod}(\mathsf{k}[\mathcal{X}]).$$

Gegeben $N \in \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$ mag man in Analogie zur Konstruktion des inversen Bildes (siehe Lemma 7.1.4) vermuten, dass es auf f_*N eine natürliche $D_{\mathcal{X}}$-Modulstruktur gibt, die die $\mathsf{k}[X]$-Modulstruktur erweitert. Dies ist jedoch im Allgemeinen falsch: Gegeben eine Inklusion $i\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathcal{X} = \mathsf{k}^{n+1}$ und einen $\mathsf{k}[\mathcal{Y}]$-Modul $N \neq 0$ (der kein $D_{\mathcal{Y}}$-Modul sein muss), läßt sich die $\mathsf{k}[\mathcal{X}]$-Modulstruktur auf f_*N in keiner Weise zu einer $D_{\mathcal{X}}$-Modulstruktur ausdehnen: Da die letzte Koordinate $X = X_{n+1}$ auf f_*N durch Null operiert, würde in $\mathrm{End}(f_*M)$ die Gleichung $\mathrm{id}_{f_*M} = [\partial_X, X] = \partial_X X - X\partial_X = 0$ gelten, was wegen $f_*M \neq 0$ nicht möglich ist.[96]

Definition 7.2.3. Wir erinnern an den in Definition 7.1.9 definierten $D_{\mathcal{Y}}$-$D_{\mathcal{X}}$-Bimodul $D_{\mathcal{Y}\xrightarrow{f}\mathcal{X}}$. Sei $\varphi\colon D(n) \xrightarrow{\sim} D(n)^{\mathrm{op}}$ der eindeutig durch $\varphi(X_i) = X_i$, $\varphi(\partial_i) = -\partial_i$ charakterisierte Hauptantiautomorphismus aus Satz 2.4.3. Wir definieren einen $D_{\mathcal{X}}$-$D_{\mathcal{Y}}$-Bimodul $D_{\mathcal{X}\xleftarrow{f}\mathcal{Y}}$ wie folgt: Als abelsche Gruppe nehmen wir $D_{\mathcal{Y}\xrightarrow{f}\mathcal{X}}$, und gegeben ein Element m dieser abelschen Gruppe definieren wir

$$T.m.S := \varphi(S).m.\varphi(T)$$

für $T \in D_{\mathcal{Y}}$ und $S \in D_{\mathcal{X}}$.

[96] Im Spezialfall der Inklusion $i\colon 0 \to \mathsf{k}$ und eines endlichdimensionalen Moduls $N \neq 0$ über $D(0) = \mathsf{k}$ gibt es ein (minimal komplizierteres) Alternativargument: Als endlichdimensionaler Vektorraum $\neq 0$ besitzt $f_*(N)$ keine $D(1)$-Modustruktur (siehe Aufgabe 2.1.15).

Definition 7.2.4. Gegeben eine polynomiale Abbildung $f\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathcal{X} = \mathsf{k}^m$ heißt der Funktor

$$\begin{aligned} f_+ := D_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y}} \otimes_{D_\mathcal{Y}} -\colon \operatorname{Mod}(D_\mathcal{Y}) &\to \operatorname{Mod}(D_\mathcal{X}), \\ N &\mapsto f_+N := D_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y}} \otimes_{D_\mathcal{Y}} N, \end{aligned}$$

direktes Bild (oder **Pushforward** (von D-Moduln) entlang f.

7.2.5. Der Funktor f_+ ist rechtsexakt. Im Allgemeinen erhält er Endliche-Erzeugtheit nicht (siehe Aufgabe 7.2.6). Offensichtlich gilt

$$f_+(D_\mathcal{Y}) \cong D_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y}} \tag{7.2.1}$$

als $D_\mathcal{X}$-Moduln.

Aufgabe 7.2.6. Betrachte $p\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k} \to 0 = \mathsf{k}^0$.

(a) Gib die Bimodulstrukturen auf $D_{\mathsf{k}\to 0} \cong \mathsf{k}[Y]$ und $D_{0\leftarrow\mathsf{k}} \cong \mathsf{k}[Y]$ an.
(b) Ist N ein Modul über $D_\mathcal{Y} = D(1)$, so gilt $p_+(N) \cong \operatorname{Cok}(\partial_Y\colon N \to N)$.
(c) Zeige, dass die Bilder $p_+(\mathsf{k}[Y])$, $p_+(\mathsf{k}[\partial_Y])$ der holonomen Moduln $\mathsf{k}[Y]$, $\mathsf{k}[\partial_Y]$ holonom sind.
(d) Zeige, dass das Bild $p_+(D_\mathcal{Y})$ des endlich erzeugten Moduls $D_\mathcal{Y}$ nicht endlich erzeugt ist (vgl. (7.2.1)).

Aufgabe 7.2.7. Seien $\mathcal{Z} = \mathsf{k}^\ell \xrightarrow{g} \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \xrightarrow{f} \mathcal{X} = \mathsf{k}^m$ polynomiale Abbildungen. Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)_+(L) &\xrightarrow{\sim} f_+(g_+(L)), \\ P \otimes v \otimes w &\mapsto 1 \otimes v \otimes P \otimes 1 \otimes w, \end{aligned}$$

ein Isomorphismus in $\operatorname{Mod}(D_\mathcal{X})$, wobei $L \in \operatorname{Mod}(D_\mathcal{Z})$.

Hinweis: Verwende den Isomorphismus (7.1.4) aus Aufgabe 7.1.12.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 7.1.3 (Kettenregel)
(2) Aufgabe 7.1.12 (Verknüpfung inverser Bilder)
(3) Aufgabe 7.2.6 (direktes Bild, Endliche-Erzeugtheit nicht erhalten)
(4) Aufgabe 7.2.7 (Verknüpfung von direkten Bildern)

Falls jemand Lust auf mehr haben sollte:

(5) Aufgabe 7.1.8 (Pullback entlang $y \mapsto y^2$ nicht endlich erzeugt)
(6) (Falls nicht bereits in Übung gemacht) Aufgaben 6.3.14, 6.3.15, 6.3.16 (Standardaufgaben zum Tensorprodukt; nicht alle Details müssen aufgeschrieben werden, aber bitte trotzdem sorgfältig überlegen, warum die Abbildungen wohldefiniert sind)

7.3. **Inverses Bild (Beispiel einer Inklusion).**

7.3.1. Seien $\mathcal{X} = \mathsf{k}^m$ und $\mathcal{Y} = \mathsf{k}^n$. Betrachte die Inklusion (und polynomiale Abbildung)

$$\begin{aligned} i\colon \mathcal{Y} &\to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \\ y &\mapsto (0, y). \end{aligned}$$

Der Komorphismus $i^\sharp$ faktorisiert als

$$i^\sharp\colon \mathsf{k}[\mathcal{X} \times \mathcal{Y}] = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n] \xrightarrow{\sim} \frac{\mathsf{k}[\mathcal{X} \times \mathcal{Y}]}{(X_1, \dots, X_m)} \xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[\mathcal{Y}] = \mathsf{k}[Y_1, \dots, Y_n].$$

Dann gilt (unter Verwendung von Aufgabe 6.3.15; wir schreiben Gleichheiten für kanonische Isomorphismen)

$$(7.3.1)\quad D_{i\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = i^+ D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \mathsf{k}[\mathcal{Y}] \otimes_{\mathsf{k}[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}]} D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \frac{\mathsf{k}[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}]}{(X_1,\dots,X_m)} \otimes_{\mathsf{k}[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}]} D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$
$$= \frac{D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}}{\sum_{i=1}^m X_i \cdot D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}} = \frac{D_{\mathcal{X}}\otimes D_{\mathcal{Y}}}{\sum_{i=1}^m (X_i\otimes 1)\cdot D_{\mathcal{X}}\otimes D_{\mathcal{Y}}} = \frac{D_{\mathcal{X}}}{\sum_{i=1}^m X_i D_{\mathcal{X}}} \otimes D_{\mathcal{Y}}$$

als Bimoduln (wobei $\otimes$ ohne Index für $\otimes_{\mathsf{k}}$ steht). Die $D_{\mathcal{Y}}$-$D_{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}}$-Bimodulstrukturen sind die offensichtlichen, etwa auf dem letzten Bimodul: Die Linksmodulstruktur ist Linksmultiplikation auf dem rechten Tensorfaktor, die Rechtsmodulstruktur ist Rechtsmultipliation auf beiden Tensorfaktoren unter Verwendung von $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = D_{\mathcal{X}}\otimes D_{\mathcal{Y}}$.

Ende der 24. Vorlesung am 14.1.2019.

7.3.2. Als $D_{\mathcal{Y}}$-Linksmodul ist $D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ frei mit Basis $\overline{\partial}_X^\beta \otimes 1$ für $\beta\in\mathbb{N}^m$. Im Fall $m\geq 1$ ist er nicht endlich erzeugt. Dies zeigt, dass das inverse Bild f^+ Endliche-Erzeugtheit im Allgemeinen nicht erhält. Im Gegensatz dazu erhält f^* (siehe (7.1.1)) endlich erzeugte Moduln.

Als explizites Beispiel mag man den Fall $n=0$ und $m=1$ betrachten, also $i\colon 0\to\mathsf{k}$ die Inklusion des Ursprungs. Dann ist das inverse Bild

$$D_{0\to\mathsf{k}} = i^+ D(1) = \frac{D(1)}{XD(1)} = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} \mathsf{k}\partial^b$$

des endlich erzeugten $D(1)$-Moduls $D(1)$ ein unendlichdimensionaler Vektorraum, also nicht endlich erzeugt über $D(0)=\mathsf{k}$.

In Vorlesung deriviertes inverses Bild (also folgendes Lemma) später. Hier $i^+M \cong \frac{M}{\sum_{i=1}^m X_i M}$ als $D_{\mathcal{Y}}$-Moduln gezeigt. Ich habe die kurze exakte Sequenz

$$D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}^{\oplus m} \xrightarrow{(X_1\cdot,\dots,X_m\cdot)} D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \to D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \to 0$$

von $D_{\mathcal{Y}}$-$D_{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}}$-Bimoduln mit $M\in\operatorname{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ tensoriert. Rechtsexaktheit des Tensorprodukt und die offensichtlichen Isomorphismen und Lemma 7.1.11 liefern die Behauptung. Wer mag, kann auch i^*M analog per

$$\mathsf{k}[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}]^{\oplus m} \xrightarrow{(X_1\cdot,\dots,X_m\cdot)} \mathsf{k}[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}] \to \mathsf{k}[\mathcal{Y}] \to 0$$

ausrechnen und sich dann um die $D_{\mathcal{Y}}$-Modulstruktur kümmern. Ausblick: $\mathsf{L}_m i^+ M \cong \{v\in M \mid X_i v = 0 \text{ für alle } i=1,\dots,m\}$; wenigstens für $m=1$ will ich das noch beweisen.

Lemma 7.3.3. [97] *Betrachte die Inklusion $i\colon \mathcal{Y}=\mathsf{k}^n \to = \mathsf{k}^{n+1} = \mathsf{k}\times\mathsf{k}^n = \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, $y\mapsto(0,y)$. (Also die gerade betrachtete Situation für $m=1$). Die erste Koordinatenfunktion auf $\mathsf{k}\times\mathcal{Y}$ nennen wir X. Sei M ein $D_{\mathsf{k}\times\mathcal{Y}}$-Modul und setze $X|_M := X.\colon M\to M$ die Operation von X auf M. Dann gilt*

$$\mathsf{L}_q i^+ M \cong \begin{cases} i^+M \cong \operatorname{Cok}(X|_M) = \frac{M}{XM} & \text{für } q=0,\\ \operatorname{Ker}(X|_M) = \{v\in M \mid Xv=0\} & \text{für } q=1,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

[97] Diese Lemma benötigt etwas Wissen über derivierte Funktoren, siehe etwa Appendix A.

Genauer sind all diese Isomorphismen funktoriell in M, beispielsweise gilt $\mathsf{L}_1 i^+ \cong \mathrm{Ker}_X$ als Funktoren in der Notation von Aufgabe A.0.29.

Beweis. Sei $\mathcal{X} = \mathsf{k}$. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \to D_{\mathcal{X}} \xrightarrow{X\cdot} D_{\mathcal{X}} \to \frac{D_{\mathcal{X}}}{XD_{\mathcal{X}}} \to 0$$

von $D_{\mathcal{X}}$-Rechtsmoduln (oder k-$D_{\mathcal{X}}$-Bimoduln). Sie bleibt exakt, wenn wir sie (über dem Grundkörper k) von rechts mit $D_{\mathcal{Y}}$ tensorieren. Mit den offensichtlichen Isomorphismen liefert dies die kurze exakte Sequenz

$$0 \to D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \xrightarrow{X\cdot} D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \to D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \to 0$$

von $D_{\mathcal{Y}}$-$D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Bimoduln.[98] Sei nun $P \twoheadrightarrow M$ eine Auflösung durch projektive $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Moduln. Da projektive Moduln (als direkte Summanden freier Moduln) flach sind, erhalten wir aus der obigen kurzen exakten Sequenz für jedes $q \in \mathbb{Z}$ durch Anwenden des exakten Funktors $- \otimes_{D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}} P^q$ mit den offensichtlichen Isomorphismen eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to P^q \xrightarrow{X\cdot} P^q \to \underbrace{D_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \otimes_{D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}} P^q}_{\cong i^+(P^q)} \to 0$$

von $D_{\mathcal{Y}}$-Moduln (siehe Lemma 7.1.11); die $D_{\mathcal{Y}}$-Linksmodulstruktur auf P^q ist durch Restriktion der Skalare entlang $D_{\mathcal{Y}} \xrightarrow{T\mapsto T\otimes 1} D_{\mathcal{X}} \otimes D_{\mathcal{Y}} = D_{\mathcal{Y}\times\mathcal{X}}$ gegeben. Insgesamt ergibt sich eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to P \xrightarrow{X\cdot} P \to i^+(P) \to 0$$

von Komplexen von $D_{\mathcal{Y}}$-Moduln. Die zugeordnete lange exakte Kohomologiesequenz (Satz A.0.10) liefert exakte Sequenzen

$$\mathrm{H}^{-1}(P) \to \mathrm{H}^{-1}\, i^+(P) \to \mathrm{H}^0(P) \xrightarrow{X\cdot} \mathrm{H}^0(P) \to \mathrm{H}^0\, i^+(P) \to \mathrm{H}^1(P)$$

und

$$\mathrm{H}^q(P) \to \mathrm{H}^q\, i^+(P) \to \mathrm{H}^{q+1}(P) \qquad \text{für } q \notin \{-1, 0\}.$$

Da einerseits die Kohomologie von P im Grad Null konzentriert und dort isomorph zu M ist und andererseits $\mathsf{L}_{-q} i^+(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(i^+(P))$ gilt, verschwindet $\mathsf{L}_{-q} i^+(M)$ für alle $q \notin \{-1, 0\}$ auf Grund der unteren exakten Sequenz. Die obere exakte Sequenz ist isomorph zu

$$0 \to \mathsf{L}_1 i^+(M) \to M \xrightarrow{X\cdot} M \to \mathsf{L}_0 i^+(M) \to 0,$$

was $\mathsf{L}_1 i^+(M) \cong \mathrm{Ker}(X)$ und $\mathsf{L}_0 i^+(M) \cong \mathrm{Cok}(X)$ zeigt. Der Isomorphismus $\mathsf{L}_0 i^+(M) \cong i^+(M)$ ist längst klar, da i^+ rechtsexakt ist (siehe A.0.36).

Wir überlassen dem Leser den (einfachen) Beweis, dass diese Isomorphismen funktoriell sind. □

[98] Der Beweis ab jetzt ist etwas umständlich, da nicht als bekannt vorausgesetzt ist, dass man das derivierte Tensorprodukt auch im anderen Argument ausrechnen darf.

7.4. **Direktes Bild (dasselbe Beispiel einer Inklusion).**

7.4.1. Wir betrachten wie in 7.3.1 die Inklusion $i\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathsf{k}^m \times \mathsf{k}^n$. Wegen $D_{i\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \frac{D_{\mathcal{X}}}{\sum X_i D_{\mathcal{X}}} \otimes D_{\mathcal{Y}}$ (siehe (7.3.1)) gilt

$$D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Y}} = \frac{D_{\mathcal{X}}}{\sum X_i D_{\mathcal{X}}} \otimes D_{\mathcal{Y}}$$

mit Bimodulstruktur

$$(S_1 \otimes S_2).(\overline{v} \otimes w).T = \overline{v\varphi(S_1)} \otimes \varphi(T) w \varphi(S_2)$$

für $S_1 \otimes S_2 \in D_{\mathcal{X}} \otimes D_{\mathcal{Y}} = D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$, $v \in D_{\mathcal{X}}$, $w \in D_{\mathcal{Y}}$, $T \in D_{\mathcal{Y}}$. Der Isomorphismus

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Y}} = \frac{D_{\mathcal{X}}}{\sum X_i D_{\mathcal{X}}} \otimes D_{\mathcal{Y}} &\xrightarrow{\sim} \frac{D_{\mathcal{X}}}{\sum D_{\mathcal{X}} X_i} \otimes D_{\mathcal{Y}} = \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes D_{\mathcal{Y}}, \\ \overline{v} \otimes w &\mapsto \overline{\varphi(v)} \otimes \varphi(w), \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

von abelschen Gruppen (siehe (4.4.7) in Beispiel 4.4.38 für den Modul $\mathsf{k}[\underline{\partial}_X]$ über $D_{\mathcal{X}} = D(m)$) ist ein Isomorphismus von Bimoduln, wenn wir die rechte Seite in der offensichtlichen Weis als Bimodul auffassen, also per

$$(S_1 \otimes S_2).(v \otimes w).T = S_1 v \otimes S_2 w T$$

für S_1, S_2, w, T wie oben und $v \in \mathsf{k}[\underline{\partial}_X]$.

7.4.2. Für $N \in \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$ erhalten wir die Isomorphismen (der erste folgt aus (7.4.1), der zweite ist offensichtlich)

$$i_+ N = D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Y}} \otimes_{D_{\mathcal{Y}}} N \xrightarrow{\sim} (\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes D_{\mathcal{Y}}) \otimes_{D_{\mathcal{Y}}} N \xrightarrow{\sim} \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$$

in $\operatorname{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$. Wir erhalten genauer einen Isomorphismus $i_+ \xrightarrow{\sim} (\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes -)$ von Funktoren $\operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}}) \to \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$.

Definition 7.4.3. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **treu/voll/volltreu**, falls für alle Objecte $C, C' \in \mathcal{C}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} F_{C,C'}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') &\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C')), \\ f &\mapsto F(F), \end{aligned}$$

injektiv/surjektiv/bijektiv ist.

7.4.4. Das folgende Lemma ist eine der beiden Hauptzutaten für Kashiwaras Äquivalenz (Satz 7.5.14).

Proposition 7.4.5. *Sei $i\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ wie oben. Dann ist das direkte Bild*

$$i_+\colon \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}}) \to \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$$

exakt und volltreu. Weiter gelten für $N \in \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$:

- *Genau dann ist N endlich erzeugt, wenn $i_+(N)$ endlich erzeugt ist.*[99]
- *Das direkte Bild $i_+(N)$ hat Träger in $\mathcal{Y} = 0 \times \mathcal{Y} = \mathcal{V}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}(X_1, \ldots, X_m)$, in Formeln*

$$\operatorname{Supp}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}(i_+ N) \subset \mathcal{Y}.$$

[99] Mit anderen Worten: i_+ erhält und detektiert Endliche-Erzeugtheit.

Beweis. Nach 7.4.2 ist i_+ genau dann exakt bzw. volltreu, wenn $\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes -$ diese Eigenschaft hat. Exaktheit des letzteren ist klar, da Tensorieren über einem Körper exakt ist.

Ist N ein $D_{\mathcal{Y}}$-Modul, so ist die $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Modulstruktur auf

$$\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N = \bigoplus_{\beta\in\mathbb{N}^m} \mathsf{k}\partial_X^\beta \otimes N = \bigoplus_{\beta\in\mathbb{N}^m} \partial_X^\beta N \tag{7.4.2}$$

leicht zu beschreiben: Alle Elemente von $D_{\mathcal{Y}}$ erhalten die Summanden und operieren auf N wie gegeben. Die Standarderzeuger von $D_{\mathcal{X}}$ operieren nach (4.4.7) per

$$\begin{aligned} \partial_{X_i}.\partial_X^\beta v &= \partial_X^{\beta+e_i} v, \\ X_i.\partial_X^\beta v &= -\beta_i \partial_X^{\beta-e_i} v, \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

wobei $v \in N$.

Insbesondere erhalten wir

$$N = \mathsf{k} \otimes N = \{z \in \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N \mid X_i z = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, m\} \tag{7.4.4}$$

und N erzeugt $\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$ bereits als $D_{\mathcal{X}}$-Modul, in Formeln

$$D_{\mathcal{X}} N = \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N. \tag{7.4.5}$$

[100]

Seien $N, N' \in \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$. Sei $f\colon N \to N'$ ein Morphismus in $\operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "n\mapsto 1\otimes n"] \arrow[d, "f"] & \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] \\ N' \arrow[r, hook, "n'\mapsto 1\otimes n'"] & \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N' \end{tikzcd}$$

ist offenbar kommutativ. Da die Horizontalen injektiv sind, folgt aus $\mathrm{id}\otimes f = 0$ bereits $f = 0$. Dies zeigt, dass unser Funktor treu ist.

Sei nun ein Morphismus $g\colon \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N \to \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N'$ von $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Moduln gegeben. Wegen (7.4.4) bildet er $N \subset \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$ nach $N' \subset \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N'$ ab. Sei $f := g|_N\colon N \to N'$ die entsprechende Restriktion. Sie ist offenbar ein Morphismus von $D_{\mathcal{Y}}$-Moduln. Wegen (7.4.5) und $g|_N = f = (\mathrm{id} \otimes f)|_N$ folgt $g = \mathrm{id} \otimes f$. Also ist unser Funktor voll.

Sei $N \in \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$. Sind $E_1, \dots, E_\ell$ Erzeuger von N, so sind $1\otimes E_1, \dots, 1\otimes E_\ell$ offensichtlich Erzeuger von $\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$. (Man kann natürlich auch Aufgabe 6.3.14 verwenden). Sei umgekehrt $\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$ endlich erzeugt. Zerlegen wir endlich viele Erzeuger entlang der direkten Summenzerlegung (7.4.2), so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$ von endlich vielen Elementen $\partial_X^\beta(1) \otimes F_1, \dots, \partial_X^\beta(\ell) \otimes F_\ell$ mit $\beta(i) \in \mathbb{N}^m$ und $F_i \in N$ erzeugt ist. Dann überlegt man sich leicht[101] dass $F_1, \dots, F_\ell$ Erzeuger von N sind.

Sei $p \in \mathbb{N}$. Wegen (7.4.3) ist $\bigoplus_{\beta\in\mathbb{N}^m, |\beta|\le q} \mathsf{k}\underline{\partial}_X^\beta \otimes N$ ein $\mathsf{k}[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}]$-Untermodul von $\mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$, der von $(X_1, \dots, X_n)^{p+1}$ annihiliert wird. Sein Träger ist also in $\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}((X_1, \dots, X_n)^{p+1}) =$

[100] Außerdem ist im Fall $m = 1$ die Operation $X = X_1\colon \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N \to \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$ surjektiv.

[101] Für $v \in N$ kann man $1 \otimes v$ als Linearkombination endlich vieler Elemente der Form $X^\alpha \partial_X^\gamma \partial_X^\beta(1) \otimes Y^\nu \partial_Y^\mu F_1$ schreiben (der linke Tensorfaktor ist ein Skalares Vielfaches eines ∂_X^δ). Dabei kann man die Summanden weglassen, die nicht in $N = \mathsf{k} \otimes N$ liegen. Also läßt sich $1 \otimes v$ als Linearkombination endlich vieler Elemente der Form $1 \otimes Y^\nu \partial_Y^\mu F_1$ schreiben. Dann ist v eine Linearkombination endlich vieler Elemente der Form $Y^\nu \partial_Y^\mu F_1$.

$\mathcal{V}_{\mathsf{k}^n}(X_1, \ldots, X_n) = \mathcal{Y}$ enthalten (Lemma 5.1.13). Da $i_+N \cong \mathsf{k}[\underline{\partial}_X] \otimes N$ die Vereinigung dieser Untermoduln ist, hat i_+N Träger in $\mathcal{Y}$ (Lemma 5.1.10). $\square$

7.5. **Kashiwaras Äquivalenz.** In Vorlesung folgende Bemerkungen nur für Polynomalgebra $\mathsf{k}[\underline{X}]$ über unserem algebraisch abgeschlossenem Körper k gemacht (also $\operatorname{Supp}_{\mathsf{k}^n}$ statt Supp, $x \in \mathsf{k}^n$ mit zugeordnetem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_x \in \operatorname{MaxSpec} \mathsf{k}[\underline{X}]$ statt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Untiges also per 5.1.15 übersetzen.

Definition 7.5.1. Sei M ein Modul über einem kommutativen Ring R. Für $m \in M$ heißt

$$\operatorname{Supp}(m) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \frac{m}{1} \neq 0 \text{ in } M_{\mathfrak{p}}\} = \operatorname{Supp}(Rm).$$

der **Träger von** m. Ist $Z \subset \operatorname{Spec} R$ eine Teilmenge, so notieren wir die Menge der Elemente von M mit Träger in Z als

$$\Gamma_Z(M) = \{m \in M \mid \operatorname{Supp}(m) \subset Z\}.$$

7.5.2. Offensichtlich ist $\Gamma_Z(M)$ ein R-Untermodul von M mit $\operatorname{Supp} \Gamma_Z(M) \subset Z$ (wegen $\operatorname{Supp}(\Gamma_Z(M)) = \bigcup_{m \in \Gamma_Z(M)} \operatorname{Supp}(m) \subset Z$ mit Lemma 5.1.10). Genauer ist $\Gamma_Z(M)$ der größte R-Untermodul von M mit Träger in Z (ist U ein Untermodul von M mit $\operatorname{Supp}(U) \subset Z$, so gilt $\operatorname{Supp}(u) \subset \operatorname{Supp}(U) \subset Z$ für alle $u \in U$ und somit $U \subset \Gamma_Z(U)$). Es folgt: Genau dann hat M Träger in Z, wenn $\Gamma_Z(M) = M$ gilt. Insbesondere folgt $\Gamma_Z(\Gamma_Z(M)) = \Gamma_Z(M)$.

Definition 7.5.3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine **Unterkategorie von** $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie $\mathcal{U}$, deren Objektmenge eine Teilmenge der Objektmenge von $\mathcal{C}$ ist, und so dass für alle Objekte U, V in $\mathcal{U}$ die Menge $\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(U, V)$ eine Teilmenge von $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$ ist, in Formeln $\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(U, V) \subset \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$.

Eine Unterkategorie $\mathcal{U}$ von $\mathcal{C}$ heißt **voll**, wenn für alle Objekte U, V in $\mathcal{U}$ Gleichheit $\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(U, V) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$ gilt.

7.5.4. Eine volle Unterkategorie ist eindeutig durch ihre Objekte bestimmt (genauer ist damit gemeint: durch die Menge ihrer Objekte als Teilmenge der Menge der Objekte der umgebenden Kategorie).

Definition 7.5.5. Gegeben eine Teilmenge Z von $\operatorname{Spec} R$ bezeichne $\operatorname{Mod}_Z(R)$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{Mod}(R)$ bestehend aus den R-Moduln M mit Träger in Z (äquivalent nach 7.5.2: mit $\Gamma_Z(M) = M$).

7.5.6. Offenbar ist Γ_Z ein Funktor $\operatorname{Mod}(R) \to \operatorname{Mod}_Z(R)$.

Lemma 7.5.7. *Sei $I \subset R$ eine Teilmenge und gelte $Z = \mathcal{V}(I)$. Dann gilt*

$$\Gamma_Z(M) = \{m \in M \mid \textit{für alle } r \in I \textit{ gibt es ein } \ell \in \mathbb{N} \textit{ mit } r^\ell m = 0\}.$$

Beweis. Für $m \in M$ sind äquivalent:

- $\operatorname{Supp}(m) \subset Z$,
- $\mathcal{V}(\operatorname{Ann}_R(m)) \subset \mathcal{V}(I)$,
- $\sqrt{\operatorname{Ann}_R(m)} \supset \sqrt{(I)}$,[102]

[102] Eventuell bisher nicht erwähnt: Für ein beliebiges Ideal $J \subset R$ ist $\sqrt{J}$ der Schnitt über alle Primideale über J, in Formeln $\sqrt{J} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(J)} \mathfrak{p}$. Für das Nullideal ist das aus der kommutativen Algebra bekannt, für beliebiges J betrachte man R/J.

- $I \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_R(m)}$,
- für alle $r \in I$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $r^\ell m = 0$.

$\square$

Annahme 7.5.8. Im Rest dieses Abschnitts 7.5 betrachten wir wie zuvor in 7.3.1 und 7.4.1 die Inklusion

$$i\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathsf{k}^m \times \mathsf{k}^n$$

und identifizieren $\mathcal{Y} = 0 \times \mathcal{Y} = \mathcal{V}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}(X_1, \dots, X_m)$.

Definition 7.5.9. [vgl. Definition 7.5.5] Es bezeichne $\mathrm{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ all derjeinigen Objekte N mit $\mathrm{Supp}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}(N) \subset \mathcal{Y} = 0 \times \mathcal{Y}$ (oder äquivalent $\Gamma_{\mathcal{Y}}(N) = N$).

Lemma 7.5.10. *Sei $M \in \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$. Dann ist der größte $\mathsf{k}[\mathcal{X} \times \mathcal{Y}]$-Untermodul*

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}(M) = \{v \in M \mid \forall i = 1, \dots, m : \exists \ell \in \mathbb{N} : X_i^\ell v = 0\}$$

von M mit Träger in $\mathcal{Y}$ (siehe 7.5.2 und Lemma 7.5.7) ein $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Untermodul von M. Insbesondere ist

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\colon \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$$

offenbar ein Funktor.

Beweis. Seien $v \in M$, $i \in \{1, \dots, m\}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ mit $X_i^\ell v = 0$. Dann gilt

$$X_i^{\ell+1}\partial_{X_i}.v = (\partial_{X_i} X_i^{\ell+1} - (\ell+1)X_i^\ell).v = 0.$$

Alle Elemente $X_1 v, \dots, X_m v, Y_1 v, \dots, Y_n v$ und $\partial_{X_1} v, \dots, \widehat{\partial_{X_i} v}, \dots, \partial_{X_m} v, \partial_{Y_1} v, \dots, \partial_{Y_n} v$ werden offensichtlich von X_i^ℓ annihiliert. Folglich wird jedes Element von $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} v$ von einer geeigneten Potenz von X_i annihiliert. Dies zeigt, dass $\Gamma_{\mathcal{Y}}(M)$ ein $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Untermodul von M ist. Funktorialität ist klar. $\square$

Ende der 25. Vorlesung am 16.1.2019.

Proposition 7.5.11. *Betrachte den Fall $m = 1$, also $\mathcal{X} = \mathsf{k}$, $\mathsf{k}[\mathcal{X}] = \mathsf{k}[X]$, $D_{\mathcal{X}} = D(1)$ und $i\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathsf{k} \times \mathsf{k}^n = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Für $M \in \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ ist der Nulleigenraum*[103]

$$M_0 := \{v \in M \mid Xv = 0\} = \mathrm{Ker}(X\colon M \to M)$$

von X offensichtlich ein $D_{\mathcal{Y}}$-Modul, und es gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{k}[\partial_X] \otimes M_0 = \frac{D(1)}{D(1)X} \otimes M_0 &\xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{Y}} M, \\ \overline{T} \otimes v &\mapsto Tv, \end{aligned}$$

als $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Moduln. (Die linke Seite ist nach 7.4.2 isomorph zu $i_+(M_0)$.

[103] Nach Lemma 7.3.3 gilt

$$\mathsf{L}_1 i^+(M) \cong \mathrm{Ker}(X_n\colon M \to M) \tag{7.5.1}$$

für jeden $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Modul M (funktoriell in M).

Beweis. Seien $T \in D(1)$ und $v \in M_0$. Weil M_0 im $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Modul $\Gamma_{\mathcal{Y}}(M)$ liegt, folgt $Tv \in \Gamma_{\mathcal{Y}}M$. Da v von X annihiliert wird, hängt Tv nur von der Klasse $\overline{T}$ und v ab. Somit ist die Abbildung wohldefiniert. Für $S \in D(1)$ und $U \in D_{\mathcal{Y}}$ und T, v wie oben gilt

$$(S \otimes U).(\overline{T} \otimes v) = (\overline{ST} \otimes Uv) \mapsto STUv = SUTv = (S \otimes U)Tv.$$

Also ist die Abbildung linear über $D(1) \otimes D_{\mathcal{Y}} = D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$.

Surjektivität: Für $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zeigen wir induktiv

$$K_\ell := \{v \in M \mid X^\ell v = 0\} \subset D(1)M_0.$$

Daraus folgt dann Surjektivität wegen $\Gamma_{\mathcal{Y}}(M) = \bigcup_{\ell\geq 1} K_\ell \subset D(1)M_0$. Der Induktionsanfang ist klar wegen $K_1 = M_0$.

Sei $\ell > 1$. Schreibe abkürzend $\partial := \partial_X \in D(1)$. Für $v \in K_\ell$ gilt

$$0 = \partial(0) = \partial(X^\ell v) = X^\ell \partial.v + \ell X^{\ell-1} v = X^{\ell-1}(X\partial.v + \ell v).$$

Die Induktionsannahme liefert $X\partial.v + \ell v, Xv \in K_{\ell-1} \subset D(1)M_0$. Es folgt

$$(\ell - 1)v = \ell v - [\partial, X]v = \underbrace{(\ell v + X\partial.v)}_{\in D(1)M_0} - \partial \underbrace{X.v}_{\in D(1)M_0} \in D(1)M_0,$$

und wegen $\ell \neq 1$ folgt $v \in D(1)M_0$.

Injektivität: Zu zeigen ist, dass die Abbildung

$$\mathsf{k}[\partial] \otimes M_0 = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} \left(\mathsf{k}\partial^b \otimes M_0\right) = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} \partial^b M_0 = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} M_0 \to \Gamma_{\mathcal{Y}}M,$$
$$(m_b)_{b\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{b\in\mathbb{N}} \partial^b m_b,$$

injektiv ist. Gelte

$$0 = m_0 + \partial m_1 + \partial^2 m_2 + \cdots + \partial^B m_B$$

für ein $B \in \mathbb{N}$ und $m_b \in M_0$. Durch Multiplikation mit X folgt wegen $X\partial^b = \partial^b X - b\partial^{b-1}$ (siehe Aufgabe 2.4.5) und $Xm_b = 0$

$$0 = m_1 + 2\partial m_2 + \cdots + B\partial^{B-1} m_B.$$

Iteriert man dies, so folgt $0 = m_B = \cdots = m_1 = m_0$. □

Korollar 7.5.12. *Es gilt* $X.\Gamma_{\mathcal{Y}}M = \Gamma_{\mathcal{Y}}M$. [104]

Beweis. Dies ist klar nach der letzten Rechnung im obigen Beweis; wir geben das explizite Argument: Wir haben $\Gamma_{\mathcal{Y}}M = \bigoplus_{b\in\mathbb{N}} \partial^b M_0$ (als Vektorräume oder $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$-Moduln) gezeigt. Für $b \in \mathbb{N}$ und $m \in M_0$ gilt $X\partial^b m = \partial^b Xm - b\partial^{b-1}m = -b\partial^{b-1}m$. Für alle $b > 0$ ist also $X\colon \partial^b M_0 \to \partial^{b-1}M_0$ surjektiv. □

Definition 7.5.13. Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen Kategorien.

- Das **essentielle Bild von** F ist die volle Unterkategorie aller Objekte von $\mathcal{D}$, die zu einem Objekt $F(C)$ für ein Objekt $C \in \mathcal{C}$ isomorph sind.

Der Funktor F heißt

[104] Nach Lemma 7.3.3 gilt $i^+M = 0$ für jeden $D_{\mathsf{k}\times\mathcal{Y}}$-Modul M mit Träger in $\mathcal{Y}$.

- **essentiell surjektiv** (oder **dicht**), wenn das essentielle Bild von F ganz $\mathcal{D}$ ist, wenn es also für jedes Objekt $D \in \mathcal{D}$ ein Objekt $C \in \mathcal{C}$ gibt, so dass D und $F(C)$ isomorph sind;
- **Äquivalenz (von Kategorien)**, wenn er volltreu und essentiell surjektiv ist; notiert wird eine Äquivalenz von Kategorien meist als $F\colon \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$.

Satz 7.5.14 (Kashiwaras Äquivalenz (einfache Version))**.** *Für die Inklusion $i\colon \mathcal{Y} = \mathsf{k}^n \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathsf{k}^m \times \mathsf{k}^n$, $y \mapsto (0, y)$ definiert das direkte Bild i_+ eine Äquivalenz*

$$i_+\colon \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}) \tag{7.5.2}$$

von Kategorien. Außerdem gilt: Ein $D_{\mathcal{Y}}$-Modul N ist genau dann endlich erzeugt, wenn sein direktes Bild $i_+(N)$ als $D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-Modul endlich erzeugt ist.[105]

Ohne Beweis: N ist genau dann holonom, wenn i_+N holonom ist.

Beweis. Nach Proposition 7.4.5 ist $i_+\colon \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}}) \to \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ (exakt und) volltreu und landet in $\operatorname{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$; außerdem gilt die Behauptung über Endliche-Erzeugtheit.

Zu beweisen bleibt die essentielle Surjektivität, die wir per Induktion über m zeigen. Für $m = 0$ ist sie trivial, für $m = 1$[106] ist dies die Aussage von Proposition 7.5.11 (vgl. Definition 7.5.9).

Sei nun $m \geq 1$. Schreibe i als Komposition

$$i\colon \mathcal{Y} \xrightarrow{i'} \mathsf{k}^{m-1} \times \mathcal{Y} = 0 \times \mathsf{k}^{m-1} \times \mathcal{Y} \xrightarrow{i''} \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.$$

Sei $M \in \operatorname{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$. Nach Proposition 7.5.11 gilt für $M_0 := \operatorname{Ker}(X_1\colon M \to M) \in \operatorname{Mod}(D_{\mathsf{k}^{m-1}\times\mathcal{Y}})$

$$i''_+(M_0) \cong \mathsf{k}[\partial_{X_1}] \otimes M_0 \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{Y}} M = M.$$

Jedes $X_2, \ldots, X_m$ operiert lokal nilpotent[107] auf M, also auch auf der Teilmenge $M_0 \subset M$, d. h. $M_0 = \Gamma_{\mathcal{Y}}(M_0)$ oder äquivalent $M_0 \in \operatorname{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathsf{k}^{m-1}\times\mathcal{Y}})$. Per Induktionsannahme gibt es ein $N \in \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$ mit $i'_+(N) \cong M_0$. Mit Aufgabe 7.2.7[108] ergibt sich wie gewünscht

$$i_+(N) \cong i''_+(i'_+(N)) \cong i''_+(M_0) \cong M.$$

Dies zeigt die essentielle Surjektivität. □

7.5.15. Nach dem Beweis ist klar: Für $M \in \operatorname{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ ist der simultane Nulleigenraum

$$K(M) := \{v \in M \mid X_i v = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, m\}$$

ein $D_{\mathcal{Y}}$-Modul mit $i_+K(M) \xrightarrow{\sim} M$ (vgl. Proposition 7.5.11). Genauer definiert K einen Funktor

$$K\colon \operatorname{Mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}) \to \operatorname{Mod}(D_{\mathcal{Y}}),$$

[105] Dies bedeutet, dass die Äquivalenz zu einer Äquivalenz $i_+\colon \operatorname{mod}(D_{\mathcal{Y}}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{mod}_{\mathcal{Y}}(D_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ zwischen den jeweiligen vollen Unterkategorien endlich-erzeugter Moduln restringiert.

[106] Strikt genommen reicht $m = 0$ als Induktionsanfang.

[107] Das bedeutet: Jedes Element von M wird von einer geeigneten Potenz von jedem der Elemente $X_2, \ldots, X_m$ annihiliert.

[108] Oder direkt mit 7.4.2

$$i_+(N) \cong \mathsf{k}[\partial_{X_1}, \ldots, \partial_{X_m}] \otimes N \cong \mathsf{k}[\partial_{X_1}] \otimes \mathsf{k}[\partial_{X_2} \ldots, \partial_{X_m}] \otimes N \cong i''_+(i'_+(N)).$$

der quasi-invers zu (7.5.2) ist: Aus Proposition 7.5.11 folgert man rasch einen Isomorphismus

$$i_+ \circ K \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}$$

von Funktoren, und aus dem Beweis von Proposition 7.4.5 erhält man sofort einen Isomorphismus

$$\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} K \circ i_+$$

von Funktoren.

Man kann K mit dem höheren Linksderivierten $\mathsf{L}_m i^+$ identifizieren. Im Fall $m = 1$ ist das eine Teilaussage von Lemma 7.3.3.

Beispiel 7.5.16. Für die Inklusion $i\colon 0 = \{0\} \hookrightarrow \mathsf{k}^m$ des Ursprungs liefert Kashiwaras Äquivalenz 7.5.14 die Äquivalenzen

$$i_+\colon \mathrm{Mod}(\mathsf{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{\{0\}}(D(m)),$$
$$i_+\colon \mathrm{mod}(\mathsf{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{mod}_{\{0\}}(D(m)).$$

Dem Vektorraum k entspricht $i_+\mathsf{k} \cong \mathsf{k}[\underline{\partial}]$. Es folgt, dass jeder endlich erzeugte $D(m)$-Modul mit Träger im Ursprung isomorph zu $\mathsf{k}[\underline{\partial}]^\ell$ ist, für ein geeignetes $\ell \in \mathbb{N}$. Außerdem ist die Menge der Morphismen $\mathsf{k}[\underline{\partial}]^\ell \to \mathsf{k}[\underline{\partial}]^n$ von $D(m)$-Moduln mit der Menge der Morphismen $\mathsf{k}^\ell \to \mathsf{k}^n$ von Vektorräumen identifiziert und somit durch Matrizen beschreibbar. Verknüpfung von Morphismen entspricht dabei der Matrizenmultiplikation.

Aufgabe 7.5.17. Diese Aufgabe zeigt, dass das Analogon zu der Äquivalenz von Kashiwara 7.5.14 in der kommutativen Algebra (oder algebraischen Geometrie) nicht gilt.

(a) Sei I ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Wer mag, kann $R = \mathsf{k}[\underline{X}]$ annehmen. Dann ist Restriktion $\mathrm{res}\colon \mathrm{Mod}(R/I) \to \mathrm{Mod}(R)$ ein volltreuer Funktor, dessen essentielles Bild genau aus den R-Moduln M mit $IM = 0$ besteht, also eine Äquivalenz auf die volle Unterkategorie aller solcher R-Moduln. Insbesondere hat jeder Modul im essentiellen Bild Träger in $\mathcal{V}(I)$. Im Allgemeinen ist aber nicht jeder R-Modul mit Träger in $\mathcal{V}(I)$ im essentiellen Bild.

(b) Insbesondere ist der Restriktionsfunktor $i_* = \mathrm{res}\colon \mathrm{Mod}(\mathsf{k}[\mathcal{Y}]) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{Y}}(\mathsf{k}[\mathcal{X} \times \mathcal{Y}])$ (die Notation i_* ist Standardnotation in der algebraischen Geometrie) für $m > 0$ keine Äquivalenz.

Anhang A. Etwas homologische Algebra

A.0.1. Dieser Abschnitt ist als rasche Einführung in derivierte Funktoren zu verstehen; unser Ziel ist, Funktoren wie f^* und f^+ zu derivieren.

A.0.2. Wir fixieren in diesem Abschnitt einen Ring R. Alles, was wir für die Kategorie $\mathrm{Mod}(R)$ erklären, kann man zu abelschen Kategorien (mit genügend projektiven Objekten) verallgemeinern.

Definition A.0.3. Ein **Komplex**[109] von R-Moduln oder **Komplex in** $\mathrm{Mod}(R)$ ist ein Diagramm

$$A = ((A^p)_{p\in\mathbb{Z}}, (d^p)_{p\in\mathbb{Z}}) = \Big(\ldots \to A^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \to \ldots \Big)$$

[109] genauer Kokettenkomplex

von R-Moduln und R-Modulmorphismen, so dass $d^{p+1} \circ d^p = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Oft schreibt man d statt d^p. Dann verkürzt sich die Bedingung $d^{p+1} \circ d^p = 0$ zu $d^2 = d \circ d = 0$. Man nennt die Abbildungen d^p **Differentiale**.

A.0.4. Wie wählen meist Großbuchstaben wie A, B, C, E vom Anfang des Alphabts für Komplexe und Großbuchstaben L, M, N für Moduln.

Definition A.0.5. Sei A ein Komplex in $\mathrm{Mod}(R)$. Definiere R-Moduln (wobei die erste Inklusion aus $d^2 = 0$ folgt)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^p(A) \arrow[r, phantom, ":="] & \mathrm{Im}(d^{p-1}) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathrm{Z}^p(A) \arrow[r, phantom, ":="] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(d^p) \arrow[r, phantom, "\subset"] & A^p \\
& & \mathrm{H}^p(A) \arrow[r, phantom, ":="] & \frac{Z^p(A)}{B^p(A)} &
\end{tikzcd}$$

Es heißt $\mathrm{H}^p(A)$ die **p-te Kohomologie** von A.[110] Die Elemente von $\mathrm{Z}^p(A)$ heißen **p-Kozykel** (englisch *p-cocycles*, die Elemente von $\mathrm{B}^p(A)$ heißen **p-Koränder** (englisch *p-coboundaries*, die Elemente von $\mathrm{H}^p(A)$ heißen **p-te Kohomologieklassen**. Wir sind oft nachlässig und sprechen von **Zykeln** und **Rändern** statt Kozykeln und Koränder.

A.0.6. Ein Komplex A in $\mathrm{Mod}(R)$ ist genau dann bei A^p exakt, wenn $\mathrm{H}^p(A) = 0$ gilt. Die Kohomologie ist also ein „Maß für die Exaktheit von A“.

Ende der 26. Vorlesung am 21.1.2019.
Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 7.5.17
(2) Aufgabe A.0.11
(3) Aufgabe A.0.29
(4) Aufgabe A.0.18, Aufgabe A.0.15

Definition A.0.7. Ein Morphismus $f\colon A \to B$ von Komplexen[111] A, B in $\mathrm{Mod}(R)$ ist eine Folge $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von R-Modulmorphismen $f^p\colon A^p \to B^p$, so dass

$$\begin{tikzcd}
A^p \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^p"] & A^{p+1} \arrow[d, "f^{p+1}"] \\
B^p \arrow[r, "d"] & B^{p+1}
\end{tikzcd}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ kommutativ ist. Die Definition der Kategorie $\mathrm{Kom}(R)$ der Komplexe in $\mathrm{Mod}(R)$ ist nun evident. Wir schreiben $\mathrm{Kom}_R(A, B)$ für die Menge aller Morphismen von Komplexen von A nach B; diese Menge ist offensichtlich eine abelsche Gruppe, und Verknüpfung von Morphismen ist $\mathbb{Z}$-bilinear.

Lemma A.0.8. *Sei $f\colon A \to C$ ein Morphismus in $\mathrm{Kom}(R)$. Dann induziert f Morphismen*

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}^p(f)\colon\ \mathrm{B}^p(A) &\to \mathrm{B}^p(C),\\
\mathrm{Z}^p(f)\colon\ \mathrm{Z}^p(A) &\to \mathrm{Z}^p(C),\\
\mathrm{H}^p(f)\colon\ \mathrm{H}^p(A) &\to \mathrm{H}^p(C)
\end{aligned}$$

[110] Oft hört man p-te Kohomologiegruppe, auch wenn p-ter Kohomologiemodul der genauere Begriff ist.
[111] Manchal Kettenabbildung oder Kettenmorphismus genannt.

auf den Rändern, Zykeln und auf der Kohomologie. Genauer sind diese Zuordnungen funktoriell, beispielsweise ist die p-te Kohomologie

$$\mathrm{H}^p\colon \mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$$

ein Funktor.

Beweis. Offensichtlich. □

Definition A.0.9. Ein Morphismus $f\colon A \to B$ in $\mathrm{Kom}(R)$ heißt **Quasiisomorphismus**, falls er auf allen Kohomologiemoduln einen Isomorphismus induziert, falls also die Abbildung $\mathrm{H}^p(f)\colon \mathrm{H}^p(A) \to \mathrm{H}^p(B)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.

Satz A.0.10 (Lange exakte Kohomologiesequenz)**.** *Sei* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz in* $\mathrm{Kom}(R)$*, d h. für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *ist* $0 \to A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz in* $\mathrm{Mod}(R)$.[112] *Dann gelten:*

(a) Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ *gibt es genau einen Morphismus*

$$\delta^p\colon \mathrm{H}^p(C) \to \mathrm{H}^{p+1}(A)$$

von R-Moduln, genannt ***(p-ter) Verbindungsmorphismus****, so dass für alle* $c \in \mathrm{Z}^p(C)$ *gilt: Ist* $b \in B^p$ *mit* $g(b) = c$ *und* $a \in A^{p+1}$ *das eindeutige*[113] *Element mit* $f(a) = d(b)$*, so gilt*[114] $\delta^p([c]) = [a]$.

(b) Die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{p+1} A \arrow[r] & \cdots \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^p A \arrow[r, "\mathrm{H}^p(f)"] & \mathrm{H}^p B \arrow[r, "\mathrm{H}^p(g)"] & \mathrm{H}^p B \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
 & & \cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{p-1} B
\end{tikzcd}$$

ist exakt.

Beweis. (a) Die Eindeutigkeit ist klar. Für die Existenz, muss man zeigen, dass die durch das angegebene Rezept beschriebene Abbildung wohldefiniert ist: Sei $h \in \mathrm{H}^p(C)$ eine Kohomologieklasse. Seien $c, c' \in \mathrm{Z}^p(C)$ mit $[c] = h = [c']$ zwei Repräsentanten. Wähle $b, b' \in B^p$ mit $g(b) = c$ und $g(b') = c'$ und definiere $a, a' \in \mathrm{H}^{p+1}(A)$ wie beschrieben. Nun zeige $[a] = [a']$ per Diagrammjagd.

Dies definiert δ^p als Abbildung von Mengen. Leicht sieht man, dass es sich um einen Morphismus von R-Moduln handelt.

(b) Diagrammjagd, dem Leser überlassen. □

Aufgabe A.0.11. Vervollständige den Beweis von Satz A.0.10.

Erinnerung: projektiver Modul

Definition A.0.12. Sei M ein R-Modul. Eine **(Links-)Auflösung** von M ist eine exakte Sequenz

$$\ldots \to A^{-2} \to A^{-1} \to A^0 \to M \to 0$$

[112] Äquivalent: Es ist eine kurze exakte Sequenz in der abelschen Kategorie $\mathrm{Kom}(R)$.

[113] wegen $g(d(b)) = d(g(b)) = d(c) = 0$

[114] Wegen $f(d(a)) = d(f(a)) = d(d(b)) = 0$ und der Injektivität von f ist a ein $(p+1)$-Kozykel.

in $\mathrm{Mod}(R)$. Wir notieren eine solche Auflösung kurz als $A \twoheadrightarrow M$.[115] Eine Auflösung $P \twoheadrightarrow M$ heißt **projektive Auflösung** oder **Auflösung durch Projektive**, falls alle R-Moduln P^q, für $q \leq 0$, projektiv sind.

Lemma A.0.13. *Jeder R-Modul M hat eine projektive Auflösung.*

Beweis. Sei $P^0 \twoheadrightarrow M$ ein Epimorphismus mit P^0 projektiv (beispielsweise sei P^0 der freie R-Modul mit R-Basis (ein Erzeugendensystem von) M und $P^0 \twoheadrightarrow M$ der offensichtliche Epimorphismus). Sei K^0 sein Kern. Sei $P^{-1} \twoheadrightarrow K^0$ ein Epimorphismus mit P^{-1} projektiv. Sei K^{-1} sein Kern. Iteriere diese Konstruktion. Dann ist

$$\ldots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$$

eine projektive Auflösung von M. Hier ist $P^0 \twoheadrightarrow M$ der erste gewählte Epimorphismus und $P^q \to P^{q+1}$ ist die Verknüpfung $P^q \twoheadrightarrow K^{q+1} \hookrightarrow P^{q+1}$, für $q \leq -1$. $\square$

Definition A.0.14. Zwei Morphismen $f, g\colon A \to B$ in $\mathrm{Kom}(R)$ heißen **homotop**, falls es R-Modulmorphismen $h^p\colon A^p \to B^{p-1}$, für $p \in \mathbb{Z}$, gibt, so dass

$$f^p - g^p = d_B^{p-1} \circ h^p + h^{p+1} \circ d_A^p$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ oder kurz

$$f - g = d \circ h + h \circ d$$

oder noch kürzer $f - g = dh + hd$ gilt. Man nennt $h = (h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine **Homotopie von f nach g**.[116] „Homotop-Sein“ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Kom}_R(A, B)$.

Ein Morphismus $f\colon A \to B$ heißt **nullhomotop**, wenn er zum Nullmorphismus homotop ist, wenn also $f = dh+hd$ für eine geeignete Homotopie h gilt. Zwei Morphismen $f, g\colon A \to B$ sind genau dann homotop, wenn $f - g$ nullhomotop ist. Definiere definieren

$$\mathrm{Hot}_R(A, B) := \frac{\mathrm{Kom}_R(A, B)}{\text{Homotop-Sein}} = \frac{\mathrm{Kom}_R(A, B)}{\{\text{nullhomotope Morphismen } A \to B\}}.$$

Da die nullhomotopen Morphismen eine Untergruppe der abelschen Gruppe $\mathrm{Kom}_R(A, B)$ bilden, ist dies in kanonischer Weise eine abelsche Gruppe.

Aufgabe A.0.15. Seien $E \xrightarrow{e} A \xrightarrow{f,g} B \xrightarrow{h} F$ Morphismen in $\mathrm{Kom}(R)$. Sind f und g homotop, so sind sowohl $f \circ e$ und $g \circ e$ als auch $h \circ f$ und $h \circ g$ homotop.

Definition A.0.16. Sei $\mathrm{Hot}(R)$ die folgende Kategorie: Ihre Objekte sind Komplexe in $\mathrm{Mod}(R)$; gegeben Objekte A, B in $\mathrm{Kom}(R)$ ist die Menge der Morphismen in $\mathrm{Hot}(R)$ von A nach B die Menge $\mathrm{Hot}_R(A, B)$. Die Verknüpfung ist durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Hot}_R(B, C) \times \mathrm{Hot}_R(A, B) &\to \mathrm{Hot}_R(A, C), \\ ([f], [g]) &\mapsto [f \circ g], \end{aligned}$$

definiert (das ist nach Aufgabe A.0.15 wohldefiniert) (und diese Abbildung ist $\mathbb{Z}$-bilinear).

A.0.17. Es gibt einen offensichtlichen Funktor $\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Hot}(R)$, der auf den Objekten die Identität ist und auf den Morphismen die Abbildung $f \mapsto [f]$.

[115] Es ist also A das Diagramm $\ldots \to A^{-2} \to A^{-1} \to A^0$ und der Pfeil steht für den Epimorphismus $A^0 \twoheadrightarrow M$.

[116] Etwas allgemeiner (ohne Referenz zu f und g) ist eine **Homotopie** eine Familie $h = (h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von R-Modulmorphismen $h^p\colon A^p \to B^{p-1}$.

Aufgabe A.0.18. Sind $f, g\colon A \to N$ homotope Morphismen, so gilt $\mathrm{H}^p(f) = \mathrm{H}^p(g)$. Insbesondere faktorisiert der Funktor $\mathrm{H}^p\colon \mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ als

$$\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Hot}(R) \xrightarrow{\mathrm{H}^p} \mathrm{Mod}(R).$$

Satz A.0.19 (Hauptlemma der homologischen Algebra)**.** *In Vorlesung ersten Reduktionsschritt weglassen, gleich in Annahme packen. Sei P ein Komplex projektiver R-Moduln mit $P^p = 0$ für alle $p > 0$ und E ein Komplex von R-Moduln mit $\mathrm{H}^p(E) = 0$ für alle $p < 0$. Dann liefert die nullte Kohomologie einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^0\colon \mathrm{Hot}_R(P, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^0(P), \mathrm{H}^0(E)).$$

Beweis. Betrachte einen Morphismus $f\colon P \to E$ in $\mathrm{Kom}(R)$ und eine Homotopie h

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & E^{-2} \arrow[r] & E^{-1} \arrow[r] & E^0 \arrow[r] & E^{-1} \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[u, "f^{-2}"] \arrow[ul, "h^{-2}"] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[ul, "h^{-1}"] & P^0 \arrow[r] \arrow[u, "f^0"] \arrow[ul, "h^0"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "f^1"] \arrow[ul, "h^1"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Da f^0 notwendig in $\mathrm{Z}^0(E)$ landet und $f^p = 0$ für alle $p > 0$ gilt, landet f im Unterkomplex

$$\dots \longrightarrow E^{-2} \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow \mathrm{Z}^0(E) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

von E. Analog landet h wegen $h^p = 0$ für alle $p > 0$ bereits in diesem Unterkomplex. Da außerdem die Inklusion des Unterkomplexes in E ein Quasiisomorphismus ist, können wir ohne Einschränkung E durch diesen Unterkomplex ersetzen. Wir nehmen also im Folgenden $E^p = 0$ für alle $p > 0$ an. Insbesondere gilt $E^0 = \mathrm{Z}^0(E)$ und die Sequenz

$$\dots \longrightarrow E^{-2} \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow E^0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(E) \longrightarrow 0$$

ist exakt. Wenden wir darauf die exakten Funktoren $\mathrm{Hom}(P^p, -) := \mathrm{Hom}_R(P^p, -)$ an, so erhalten wir die Spalten im folgenden kommutativen Diagramm abelscher Gruppen (die Inklusion rechts oben kommt von $P^0 = \mathrm{Z}^0(P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0 P$).

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & \\
\mathrm{Hom}(P^{-2}, \mathrm{H}^0 E) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(P^{-1}, \mathrm{H}^0 E) \arrow[u] \arrow[l] & \mathrm{Hom}(P^0, \mathrm{H}^0 E) \arrow[u] \arrow[l] & \supset \quad \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^0 P, \mathrm{H}^0 E) \\
\mathrm{Hom}(P^{-2}, E^0) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(P^{-1}, E^0) \arrow[u] \arrow[l] & \mathrm{Hom}(P^0, E^0) \arrow[u] \arrow[l] & \\
\mathrm{Hom}(P^{-2}, E^{-1}) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(P^{-1}, E^{-1}) \arrow[u] \arrow[l] & \mathrm{Hom}(P^0, E^{-1}) \arrow[u] \arrow[l] & \\
\mathrm{Hom}(P^{-2}, E^{-2}) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(P^{-1}, E^{-2}) \arrow[u] \arrow[l] & \mathrm{Hom}(P^0, E^{-2}) \arrow[u] \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Man stelle sich das Diagramm nach links und unten unendlich fortgesetzt vor. Alle Spalten sind also exakt; außerdem ist die Verknüpfung je zweier konsekutiver waagerechter Pfeile jeweils Null (hier wird die Inklusion rechts oben auch als waagrechter Pfeil gewertet).

Ein Morphismus $f\colon P \to E$ in $\mathrm{Kom}(R)$ wie oben hat Komponenten $f^0, f^{-1}, \dots$ in den roten Hom-Räumen[117]. Die zugeordnete Abbildung $\mathrm{H}^0(f)\colon \mathrm{H}^0 P \to \mathrm{H}^0 E$ im blauen Hom-Raum ist gerade das Bild von f^0 unter dem Pfeil nach oben, welches in dem blauen Teilraum liegt. Dies beschreibt die Abbildung aus dem Hauptlemma.

Man beachte, dass eine Familie $(f^p \in \mathrm{Hom}(P^p, E^p))_{p \le 0}$ (von Elementen auf der roten Diagonalen) genau dann einen Morphismus $f\colon P \to E$ in $\mathrm{Kom}(R)$ definiert, wenn das Bild von f^p unter dem Pfeil nach links mit dem Bild von f^{p-1} unter dem Pfeil nach oben übereinstimmt.

Man sieht nun per Diagrammjagd, dass die Abbildung im Hauptlemma surjekiv ist (das verwendet die Exaktheit der Spalten an den Positionen eins oberhalb der roten Hom-Räume und die Eigenschaft, dass die „waagrechte Verknüpfung durch diese Positionen“ Null ist).

Da $f \mapsto \mathrm{H}^0(f)$ ein Morphismus abelscher Gruppen ist, genügt es für die Injektivität zu zeigen, dass aus $\mathrm{H}^0(f) = 0$ folgt, dass f homotop zur Nullabbildung ist. Gesucht ist also eine Homotopie h zwischen f und 0. Eine Diagrammjagd liefert die Komponenten einer solchen Homotopie in den hellblauen Hom-Räumen (das verwendet die Exaktheit der Spalten an den roten Positionen und die Eigenschaft, dass die „waagrechte Verknüpfung durch die roten Positionen“ Null ist). $\square$

Ende der 27. Vorlesung am 23.1.2019.

A.0.20. Sei $A \twoheadrightarrow M$ eine Auflösung eines R-Moduls M. Indem wir A durch Nullen ergänzen, erhalten wir den Komplex

$$A = \Big(\dots \to A^{-1} \to A^0 \to 0 \to 0 \to \dots \Big) \in \mathrm{Kom}(R),$$

den wir per *abuse of notation* ebenfalls als A notieren. Seine Kohomologie ist im Grad Null konzentriert und dort kanonisch isomorph zu M: Die Abbildung $A^0 \to M$ liefert einen Isomorphismus $\mathrm{H}^0(A) \xrightarrow{\sim} M$, und es gilt $\mathrm{H}^p(A) = 0$ für alle $p \neq 0$.

Definition A.0.21. Seien $A \to M$ und $B \to N$ Auflösungen von R-Moduln M, N. Betrachte das kommutative Diagramm

(A.0.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kom}_R(A,B) \arrow[d, two heads] \arrow[dr, "\mathrm{H}^0"] & & \\ \mathrm{Hot}_R(A,B) \arrow[r, "\mathrm{H}^0"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^0(A), \mathrm{H}^0(B)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \end{tikzcd}$$

abelscher Gruppen, dessen letzter Isomorphismus von den Isomorphismen $\mathrm{H}^0(A) \xrightarrow{\sim} M$ und $\mathrm{H}^0(B) \xrightarrow{\sim} N$ herrührt. Gegeben $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ nennen wir jedes Urbild von f in $\mathrm{Kom}_R(A,B)$ einen **Lift von** f und jedes Urbild von f in $\mathrm{Hot}_R(A,B)$ einen **Homotopielift von** f.

A.0.22. Jeder Lift von f liefert natürlich einen Homotopielift; jeder Homotopielift läßt sich durch einen Lift repräsentieren.

Korollar A.0.23 (zum Hauptlemma A.0.19)**.** *Seien $M, N \in \mathrm{Mod}(R)$. Sei $P \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung von M und $E \twoheadrightarrow N$ eine Auflösung von N. Dann ist die soeben (siehe (A.0.1)) erklärte Abbildung ein Isomorphismus*

$$\mathrm{Hot}_R(P,E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

[117] genauer sind es abelsche Hom-Gruppen

In Worten hat also jeder Morphismus $f\colon M \to N$ in $\mathrm{Mod}(R)$ einen eindeutigen Homotopielift.

Beweis. Klar nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra A.0.19. □

A.0.24. Sei S ein weiterer fixierter Ring (etwa $\mathbb{Z}$).

Definition A.0.25. Ein Funktor $F\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ (oder $F\colon \mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(S)$) heißt **additiv**, wenn $F(f+f') = F(f)+F(f')$ für alle Morphismen $f, f'\colon M \to N$ in $\mathrm{Mod}(R)$ gilt, wenn die Abbildung $F_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_S(F(M),F(N))$ ein Morphismus von (abelschen) Gruppen ist.

A.0.26. Insbesondere bildet jeder additive Funktor F den Nullmorphismus $0\colon M \to N$ auf den Nullmorphismus $F(0) = 0\colon F(M) \to F(N)$ ab. Daraus folgt, dass F den Nullmodul auf den Nullmodul abbildet: Für $M = N = 0$ gilt $\mathrm{id}_M = 0$ und somit $\mathrm{id}_{F(M)} = F(\mathrm{id}_M) = F(0) = 0$, also $F(M) = 0$.

Definition A.0.27. Ein Funktor $F\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ heißt **rechtsexakt**, wenn er additiv ist und für jede exakte Sequenz $L \to M \to N \to 0$ in $\mathrm{Mod}(R)$ die Sequenz $F(L) \to F(M) \to F(N) \to 0$ in $\mathrm{Mod}(S)$ exakt ist. Er heißt **linksexakt**, wenn er additiv ist und für jede exakte Sequenz $0 \to L \to M \to N$ in $\mathrm{Mod}(R)$ die Sequenz $0 \to F(L) \to F(M) \to F(N)$ in $\mathrm{Mod}(S)$ exakt ist. Er heißt **exakt**, wenn er links- und rechtsexakt ist, wenn er also additiv ist und für jede kurze exakte Sequenz $0 \to L \to M \to N \to 0$ in $\mathrm{Mod}(R)$ die Sequenz $0 \to F(L) \to F(M) \to F(N) \to 0$ in $\mathrm{Mod}(S)$ exakt ist.

Beispiele A.0.28. Sehr viele der üblichen Funktoren sind additiv, etwa:

(a) $X \otimes_R -\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ für einen S-R-Bimodul X (ist rechtsexakter Funktor).
(b) $f^+\colon \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{X}}) \to \mathrm{Mod}(D_{\mathcal{Y}})$ (rechtsexakt, siehe 7.1.6).
(c) Erweiterung der Skalare längs einem Ringmorphismus (ist rechtsexakter Funktor).
(d) Restriktion der Skalare längs einem Ringmorphismus (ist exakter Funktor).
(e) $\mathrm{Hom}_R(X,-)\,\mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ für einen R-Modul X (ist linksexakter Funktor).
(f) $\mathrm{Hom}_R(-,X)\,\mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ für einen R-Modul X (ebenfalls linksexakt[118]

Aufgabe A.0.29. Sei $r \in R$ ein fixiertes Element. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}_r\colon\ &\mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}),\\ &M \mapsto \mathrm{Ker}_r(M) := \mathrm{Ker}(r.\colon M \to M) = \{m \in M \mid rm = 0\},\end{aligned}$$

ein linksexakter (additiver[119]) Funktor (der das offensichtliche auf Morphismen macht). Analog definiert $\mathrm{Cok}_r(M) = \mathrm{Cok}(r.\colon M \to M) = \frac{M}{rM}$ einen rechtsexakten (additiven) Funktor $\mathrm{Cok}_r\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

A.0.30. Im Folgenden betrachten wir nur kovariante Funktoren zwischen Modulkategorien, also Funktoren $F\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$. Kontravariante Funktoren, also Funktoren $F\colon \mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(S)$, werden nicht betrachtet. Im allgemeinen Kontext von Funktoren zwischen abelschen Kategorien wird diese Unterscheidung eh überflüssig.

[118] Dies ist im Wesentlichen eine Konvention (wie man kontravariante Funktoren als kovariante Funktoren auffasst): „Derselbe“ Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,X)\,\mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathrm{op}}$ ist rechtsexakt.

[119] In der Definition von Linksexaktheit ist Additivität eine Bedingung.

A.0.31. Sei $F\colon \operatorname{Mod}(R) \to \operatorname{Mod}(S)$ ein additiver Funktor. Durch komponentenweises Anwenden definieren wir einen Funktor

$$F = \operatorname{Kom}(F)\colon \operatorname{Kom}(R) \to \operatorname{Kom}(S),$$

den wir (per abuse of notation) wieder mit dem Symbol F bezeichnen. Explizit ist er wie folgt definiert: Er bildet ein Objekt

$$A = \Big(\ldots \to A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \to \ldots \Big)$$

von $\operatorname{Kom}(R)$ auf das Objekt

$$F(A) = \Big(\ldots \to F(A^p) \xrightarrow{F(d^p)} F(A^{p+1}) \to \ldots \Big)$$

von $\operatorname{Kom}(S)$ ab (dies ist ein Komplex, denn $F(d) \circ F(d) = F(d^2) = F(0) = 0$, wobei die letzte Gleichung aus der Additivität folgt). Ist $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}\colon A \to B$ ein Morphismus in $\operatorname{Kom}(R)$, so definiere $F(f) := (F(f^p))_{p\in\mathbb{Z}}\colon F(A) \to F(B)$; dies ist ein Morphismus in $\operatorname{Kom}(S)$.

Sind $f, g\colon A \to B$ homotope Morphismen, so sind auch $F(f), F(g)\colon F(A) \to F(B)$ homotop: Aus $f - g = d_B \circ h + h \circ d_A$ folgt

$$F(f) - F(g) = F(d_B) \circ F(h) + F(h) \circ F(d_A) = d_{F(B)} \circ F(h) + F(h) \circ d_{F(A)}$$

unter Verwendung der Additivität von F; das Bild $F(h) := (F(h^p))_{p\in\mathbb{Z}}$ einer Homotopie $h = (h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ zwischen f und g ist also eine Homotopie zwischen Ff und Fg.

Daraus folgt, dass $F = \operatorname{Kom}(F)$ einen Funktor

$$F = \operatorname{Hot}(F)\colon \operatorname{Hot}(R) \to \operatorname{Hot}(S)$$

induziert.

Annahme A.0.32. Bis zum Ende von Abschnitt A sei $F\colon \operatorname{Mod}(R) \to \operatorname{Mod}(S)$ ein additiver Funktor.

Definition A.0.33. Sei $q \in \mathbb{Z}$. Ein **q-ter linksderivierter Funktor von** F (manchmal auch **q-ter abgeleiteter Funktor**) ist ein Paar $(\mathsf{L}_q F, \tau)$ bestehend aus einem Funktor

$$\mathsf{L}_q F\colon \operatorname{Mod}(R) \to \operatorname{Mod}(S)$$

und Morphismen

$$\tau = \tau_{A \twoheadrightarrow M}\colon \mathsf{L}_q F(M) \to \mathrm{H}^{-q}(F(A))$$

von S-Moduln für jede Auflösung $A \twoheadrightarrow M$ eines R-Moduls M derart, dass gelten:

(a) Für jede projektive Auflösung $P \twoheadrightarrow M$ eines R-Moduls M ist

$$\tau_{P \twoheadrightarrow M}\colon \mathsf{L}_q F(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{-q}(F(P))$$

ein Isomorphismus.

(b) Für jeden Morphismus $f\colon M \to N$ von R-Moduln und je zwei Auflösungen $A \twoheadrightarrow M$ und $B \twoheadrightarrow N$ und jeden Lift[120] $\tilde{f}\colon A \twoheadrightarrow B$ von f kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathsf{L}_q F(M) \arrow[r, "\tau_{A\twoheadrightarrow M}"] \arrow[d, "\mathsf{L}_q F(f)"] & \mathrm{H}^{-q}(F(A)) \arrow[d, "\mathrm{H}^{-q}(F(\tilde{f}))"] \\ \mathsf{L}_q F(N) \arrow[r, "\tau_{B\twoheadrightarrow N}"] & \mathrm{H}^{-q}(F(B)) \end{tikzcd} \tag{A.0.2}$$

Bemerkung A.0.34. Es gibt auch q-te rechtsderivierte Funktoren, deren Definition „dual“ ist. Der natürliche Lebensraum für (eine allgemeinere Version von) derivierte(n) Funktoren ist die Theorie derivierter Kategorien.

A.0.35. Es gilt $\mathsf{L}_q F = 0$ für alle $q < 0$. (dies folgt sofort aus (a)); Null meint hier den Nullfunktor, der jeden Modul auf den Nullmodul (und folglich jeden Morphismus auf den Nullmorphismus) schickt.

A.0.36 (Nullter linksderivierter Funktor)**.** Ist F rechtsexakt[121], so ist F zusammen mit den Inversen der offensichtlichen Isomorphismen $\mathrm{H}^0(F(A)) \xrightarrow{\sim} FM$ ein nullter Linksderivierter von F, es gilt also $\mathsf{L}_0 F = F$.

A.0.37 (Nullter linksderivierter Funktor)**.** Die Allgemeinheit der vorigen Bemerkung reicht für die Vorlesung. Sei M ein R-Modul. Ist $A \twoheadrightarrow M$ eine Auflösung, so erhalten wir durch Anwenden von F die Folge

$$F(N^{-1}) \to F(N^0) \to F(M) \to 0$$

in $\mathrm{Mod}(S)$ (sie ist exakt, falls F rechtsexakt ist). Sie liefert einen Morphismus

$$\mathrm{H}^0(F(A)) \to F(M)$$

von S-Moduln (der ein Isomorphismus ist, falls F rechtsexakt ist). Voranschalten des Morphismus $\tau_{A\twoheadrightarrow M}\colon \mathsf{L}_0 F(M) \to \mathrm{H}^0(F(A))$ (welcher ein Isomorphismus ist, falls A aus projektiven Moduln besteht) liefert einen Morphismus

$$\nu_M\colon \mathsf{L}_0 F(M) \to F(M).$$

Aus dem Diagramm (A.0.2) mit $f = \mathrm{id}_M$ folgt, dass ν_M nicht von der Wahl der Auflösung A von M abhängt (wir also nicht $\nu_{A\twoheadrightarrow M}$ schreiben müssen). Dasselbe Diagramm zeigt auch, dass für jeden Morphismus $f\colon M \to N$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathsf{L}_0 F(M) \arrow[r, "\nu_M"] \arrow[d, "\mathsf{L}_0 F(f)"] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathsf{L}_0 F(N) \arrow[r, "\nu_N"] & F(N) \end{tikzcd}$$

kommutiert. In kategorieller Sprache bedeutet dies, dass $\nu = (\nu_M)_{M\in\mathrm{Mod}(R)}$ ein Morphismus

$$\nu\colon \mathsf{L}_0 F \to F$$

von Funktoren (= ein natürliche Transformation) ist. Ist F rechtsexakt, so sind alle ν_M Isomorphismen und somit ist ν eine Isomorphismus von Funktoren.

[120] Es macht keinen Unterschied, ob man hier Lifts oder Homotopielifts betrachtet. Nicht für jede Wahl von A und B hat f einen Lift.

[121] Mir ist keine Anwendung linksderivierter Funktoren bekannt, wo dies nicht der Fall ist

Aufgabe A.0.38. Ist F exakt, so ist $\mathsf{L}_q F = 0$ für alle $q > 0$ ein q-ter linksderivierter Funktor.

A.0.39. Ist P ein projektiver Modul, so gilt

$$\mathsf{L}_q F(P) = \begin{cases} \mathsf{L}_0 F(P) \cong F(P) & \text{für } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz A.0.40. *Jeder additive Funktor $F\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ besitzt einen q-ten linksderivierten Funktor $\mathsf{L}_q F$ (oder genauer $(\mathsf{L}_q F, \tau)$); hier ist $q \in \mathbb{Z}$ beliebig.*

Beweis. Fixiere für jeden R-Modul M eine projektive Auflösung $P_M \twoheadrightarrow M$ und definiere

$$\mathsf{L}_q F(M) := \mathrm{H}^{-q}(F(P_M)).$$

Ist $f\colon M \to N$ ein Morphismus in $\mathrm{Mod}(R)$, so hat er nach dem Korollar A.0.23 des Hauptlemmas der homologischen Algebra genau einen Homotopielift $f'\colon P_M \to P_N$ zwischen den fixierten projektiven Auflösungen. Definiere

$$\mathsf{L}_q F(f) := \mathrm{H}^{-q}(F(f')).$$

Es gilt $\mathsf{L}_q F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathsf{L}_q F(M)}$, denn der eindeutige Homotopielift der Identität ist die Identität. Für $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ gilt $\mathsf{L}_q F(f) \circ \mathsf{L}_q F(g) = \mathsf{L}_q F(f \circ g)$, denn sind f' und g' Homotopielifts von f und g, so ist $f' \circ g'$ ein Homotopielift von $f \circ g$ und muss somit mit dessen eindeutigem Homotopielift $(f \circ g)'$ übereinstimmen.

Dies definiert den Funktor $\mathsf{L}_q F\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$. Sei nun $A \twoheadrightarrow M$ eine Auflösung. Wieder nach Korollar A.0.23 des Hauptlemmas gibt es einen eindeutigen Homotopielift $\alpha\colon P_M \to A$ von id_M. Wir definieren

$$\tau_{A \twoheadrightarrow M} := \mathrm{H}^{-q}(F(\alpha))\colon \mathsf{L}_q F(M) = \mathrm{H}^{-q}(F(P_M)) \to \mathrm{H}^{-q}(F(A)).$$

Zu (a) in Definition A.0.33: Im Falle, dass $A \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung ist, gibt es auch einen eindeutigen Homotopielift $\mu\colon A \to P_M$ von id_M. Die Eindeutigkeit der Homotopielifts impliziert, dass μ und α zueinander inverse Isomorphismen in $\mathrm{Hot}(R)$ sind. Da jeder Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet, ist $\tau_{A \twoheadrightarrow M} = \mathrm{H}^{-q}(F(\alpha))$ invertierbar.

Zu (b) in Definition A.0.33: Seien $f\colon M \to N$, $A \twoheadrightarrow M$, $B \twoheadrightarrow N$ und $\tilde{f}$ wie dort angegeben. Wir betrachten $\tilde{f}$ als Morphismus in $\mathrm{Hot}(R)$. Sei $\alpha\colon P_M \to A$ wie oben und sei $\beta\colon P_N \to B$ analog definiert. Sei f' wie oben. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ P_M \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

kommutativ in $\mathrm{Hot}(R)$, denn sowohl $\tilde{f} \circ \alpha$ als auch $\beta \circ f'$ sind Homotopielifts von $f \circ \mathrm{id}_M = f = \mathrm{id}_N \circ f\colon M \to N$, die somit nach dem Korollar aus dem Hauptlemma übereinstimmen müssen; dies verwendet, dass $P_M \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung ist und $B \twoheadrightarrow N$ eine Auflösung. Wenden wir die Funktoren F und H^{-q} auf dieses Diagramm an, so erhalten wir

das gesuchte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{L}_q F(M) \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{H}^{-q}(F(P_M)) \arrow[r, "\tau_{A\twoheadrightarrow M}=\mathrm{H}^{-q}(F(\alpha))"] \arrow[d, "\mathsf{L}_q F(f)=\mathrm{H}^{-q}(F(f'))"'] & \mathrm{H}^{-q}(F(A)) \arrow[d, "\mathrm{H}^{-q}(F(\tilde{f}))"] \\
\mathsf{L}_q F(N) \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{H}^{-q}(F(P_N)) \arrow[r, "\tau_{B\twoheadrightarrow N}=\mathrm{H}^{-q}(F(\beta))"] & \mathrm{H}^{-q}(F(B)).
\end{tikzcd}$$

□

Definition A.0.41. Sei X ein R-Rechtsmodul. Dann ist $X \otimes_R -\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ ein rechtsexakter Funktor. Seine q-ten Linksderivierten werden klassisch

$$\mathrm{Tor}_q^R(X, -) := \mathsf{L}_q(X \otimes_R -)$$

notiert.[122]

A.0.42. Es gilt $\mathrm{Tor}_0^R(X, Y) \cong X \otimes_R Y$. Ist X flach als R-Rechtsmodul, so gilt $\mathrm{Tor}_q^R(X, Y) = 0$ für alle $q \neq 0$.

A.0.43. Ist X ein S-R-Bimodul, so landet $X \otimes_R -$ in $\mathrm{Mod}(S)$, und somit sind alle $\mathrm{Tor}_q^R(X, Y)$ Moduln über S. Ist beispielsweise R kommutativ, so kann man jeden R-Rechtsmodul R in offensichtlicher Weise als R-R-Bimodul auffassen.

Beispiel A.0.44. Sei $r \in R$ mit $\cdot r\colon R \to R$ injektiv und sei X ein R-Rechtsmodul. Dann gilt

$$\mathrm{Tor}_q^R(X, R/Rr) \cong \begin{cases} X/Xr & \text{für } q = 0, \\ X[r] := \{x \in X \mid xr = 0\} & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn $\to \ldots 0 \to R \xrightarrow{\cdot r} R \twoheadrightarrow R/Rr \to 0$ ist eine projektive Auflösung. Der Name Tor kommt daher, dass $\mathrm{Tor}_1^R(X, R/Rr) \cong X[r]$ aus den r-Torsionselementen von X besteht. Beispielsweise gelten

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{für } q = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2) \cong 0 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}.$$

Ende der 28. Vorlesung am 28.1.2019.

Beispiele A.0.45. (a) Wir berechnen $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, wobei X und Y auf $\mathbb{C}$ durch Null operieren, mit der (exakten!) Koszulauflösung

$$0 \to \mathbb{C}[X, Y] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \cdot Y \\ \cdot(-X) \end{pmatrix}} \mathbb{C}[X, Y]^{\oplus 2} \xrightarrow{(\cdot X, \cdot Y)} \mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C} \to 0.$$

Ergebnis: $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ lebt nur in den Graden $q = 0, 1, 2$ und ist dort $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$, wobei X und Y stets durch Null operieren.

[122] Man kann $\mathrm{Tor}_q^R(X, Y) := \mathsf{L}_q(X \otimes_R -)(Y) = \mathsf{L}_q(- \otimes_R Y)(X)$ für jeden R-Rechtsmodul X und jeden R-Linksmodul Y zeigen.

(b) Nach Beispiel A.0.44 für $R = \mathbb{C}[X,Y]$ und $r = Y$ lebt $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[X])$ nur in den Graden $q = 0, 1$ und ist dort jeweils $\mathbb{C}$ und X und Y operieren darauf durch Null.

Man berechne $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}[X], \mathbb{C})$ mit der Koszulauflösung und prüfe die in der Fußnote in Definition A.0.41 behauptete Symmetrie.

Analog kann man $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}[Y,X]/(X^2), \mathbb{C}[X])$ berechnen.

A.0.46. Eindeutigkeit in Vorlesung nur erwähnen. Ein q-ter Linksderivierter ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus (wie in Aufgabe A.0.47 genau erklärt). Wir verwenden deshalb den bestimmten Artikel und sprechen von *dem* q-ten linksderivierten Funktor.

Aufgabe A.0.47 (Eindeutigkeit eines q-ten Linksderivierten bis auf eindeutigen Isomorphismus)**.** Seien $(\mathsf{L}_q F, \tau)$ und $(\mathsf{L}'_q F, \tau')$ q-te linksdervierte Funktoren von F. Dann gibt es genau einen Isomorphismus[123]

$$\sigma \colon \mathsf{L}_q F \xrightarrow{\sim} \mathsf{L}'_q F$$

von Funktoren, so dass für alle Auflösungen $A \twoheadrightarrow M$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{L}_q F(M) \arrow[dr, "\tau_{A \twoheadrightarrow M}"] \arrow[d, "\sigma_M"', "\sim"] & \\
\mathsf{L}_q F(M) \arrow[r, "\tau'_{A \twoheadrightarrow M}"] & \mathrm{H}^{-q}(F(A))
\end{tikzcd}$$

kommutiert.[124]

Satz A.0.48 (Lange exakte Sequenz der Linksderivierten)**.** *Sei* $F \colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ *ein additiver Funktor. Dann liefert jede kurze exakte Sequenz* $0 \to L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$ *in* $\mathrm{Mod}(R)$ *eine exakte Sequenz*

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\delta_1"] & \mathsf{L}_0 F(L) \arrow[r, "\mathsf{L}_0 F(\iota)"] & \mathsf{L}_0 F(M) \arrow[r, "\mathsf{L}_0 F(\pi)"] & \mathsf{L}_0 F(N) \arrow[r] & 0 \\
& & \dots \arrow[r] & \mathsf{L}_1 F(N) \arrow[ull, rounded corners] & \\
\arrow[r, "\delta_q"] & \mathsf{L}_{q-1} F(L) \arrow[r] & \dots & & \\
\arrow[r, "\delta_{q+1}"] & \mathsf{L}_q F(L) \arrow[r, "\mathsf{L}_1 F(\iota)"] & \mathsf{L}_q F(M) \arrow[r, "\mathsf{L}_1 F(\pi)"] & \mathsf{L}_q F(N) \arrow[ull, rounded corners] & \\
& & \dots \arrow[r] & \mathsf{L}_{q+1} F(N) \arrow[ull, rounded corners] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathrm{Mod}(S)$ *für geeignete* ***Verbindungsmorphismen*** $(\delta_q)_{q \in \mathbb{N}}$.[125]

[123] Der Begriff *Isomorphismus von Funktoren* (oder *(natürliche) Isotransformation)* wird hier vorausgesetzt.

[124] Man könnte auch zeigen, dass $(\mathsf{L}_q F, \tau)$ terminal ist bezüglich aller Paare (G, γ), wobei $G \colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ und die $\gamma_{A \twoheadrightarrow M} \colon G(M) \to \mathrm{H}^{-q}(F(A))$ eine zu (b) in Definition A.0.33 analoge Bedingung erfüllen. Dies liefert eine Beschreibung durch eine universelle Eigenschaft und somit die Eindeutigkeit.

[125] Unser Beweis gibt eine Konstruktion der Verbindungsmorphismen. Man kann zeigen, dass die so konstruierten Verbindungsmorphismen nicht von Wahlen abhängen (sie hängen also nur von der betrachteten kurzen exakten Sequenz ab).

A.0.49. Ist F rechtsexakt, so gilt $Ł_0F = F$ (siehe A.0.36 und A.0.46), und die angegebene lange exakte Sequenz ist eine unendlich lange exakte Fortsetzung der exakten Sequenz $F(L) \xrightarrow{F(\iota)} F(M) \xrightarrow{F(\pi)} F(N) \to 0$ nach links; daher vermutlich der Name *linksderivierter Funktor*.

Beispielsweise ist $\mathsf{L}_0F(\iota)$ genau dann injektiv, wenn der Kokern von $\mathsf{L}_1F(M) \to \mathsf{L}_1F(N)$ verschwindet. Letzteres ist beispielsweise der Fall, wenn $\mathsf{L}_1F(N) = 0$ gilt oder wenn $\mathsf{L}_1F(M) \to \mathsf{L}_1F(N)$ surjektiv ist.

Beweis. Seien $P = P_L \overset{p}{\twoheadrightarrow} L$ und $Q = Q_N \overset{q}{\twoheadrightarrow} N$ projektive Auflösungen. Wir konstruieren aus ihnen auf geschickte Art eine projektive Auflösung von M. (Diese Konstruktion wird Hufeisen-Lemma oder *horseshoe lemma* genannt, etwa in [Wei94, Lemma 2.2.8]. Der Grund für den Namen ist, dass die kurze exakte Sequenz $L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$ zusammen mit den beiden Auflösungen P und Q eine hufeisenförmige Gestalt hat; sie wird sichtbar, wenn man im Diagramm unten das Objekt $P^0 \oplus Q^0$ samt ausgehender Pfeile wegläßt.) Betrachte das folgende Diagramm zunächst ohne den gestrichelten Morphismus

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[u, "p"] & P^0 \oplus Q^0 \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[u, two heads, dotted, "(\iota\circ p, \hat{q})"] & Q^0 \arrow[r] \arrow[u, two heads, "q"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Weil Q^0 projektiv ist und π ein Epimorphismus ist, gibt es einen Morphismus $\hat{q}\colon Q^0 \to M$ mit $\pi \circ \hat{q} = q$. Dies erklärt den gestrichelten Morphismus, und Kommutativität des Diagramms ist offensichtlich. Fasst man dieses Diagramm als kurze exakte Sequenz von Komplexen auf, indem man die Spalten durch Nullen zu Komplexen ergänzt, so liefert die lange exakte Kohomologiesequenz (Satz A.0.10) einerseits die Surjektivität des gestrichelten Morphismus und andererseits eine kurze exakte Sequenz zwischen den Kernen der vertikalen Abbildungen. Da die Abbildungen $P^{-1} \to P^0$ und $Q^{-1} \to Q^0$ als $P^{-1} \twoheadrightarrow \operatorname{Ker}(p) \hookrightarrow P^0$ und $Q^{-1} \twoheadrightarrow \operatorname{Ker}(q) \hookrightarrow Q^0$ faktorisieren, können wir den Konstruktionsschritt iterieren. Wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz[126]

$$0 \to P \xrightarrow{\binom{1}{0}} P \oplus Q \xrightarrow{(0,1)} Q \to 0$$

in $\operatorname{Kom}(R)$, deren Mitglieder die Moduln in $0 \to L \to M \to N \to 0$ kompatibel projektiv auflösen; insbesondere liefert unsere Konstruktion eine projektive Auflösung $P \oplus Q \twoheadrightarrow M$.[127]

Man beachte, dass diese kurze exakte Sequenz komponentenweise spaltet (damit meinen wir die Trivialität, dass jede kurze exakte Sequenz $0 \to P^t \xrightarrow{\binom{1}{0}} P^t \oplus Q^t \xrightarrow{(0,1)} Q^t \to 0$ spaltet). Dies hat zur Folge, dass alle Komponenten von

$$0 \to F(P) \xrightarrow{\binom{1}{0}} F(P \oplus Q) \xrightarrow{(0,1)} F(Q) \to 0$$

(in offensichtlicher Weise spaltende) kurze exakte Sequenzen sind, wir es also mit einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen in $\operatorname{Kom}(S)$ zu tun haben. Die zugeordnete lange exakte

[126] Die direkte Summe von Komplexen ist komponentenweise erklärt.

[127] Alle Differentiale von $P \oplus Q$ haben die Gestalt $\begin{pmatrix} d_P & \delta' \\ 0 & d_Q \end{pmatrix}$ für geeignete $\delta'^t\colon Q^t \to P^{t-1}$. Die Notation suggeriert und es stimmt, dass diese mit den gleich auftauchenden Verbindungsmorphismen zu tun haben. Der Leser mag sich dies überlegen.

Kohomologiesequenz (Satz A.0.10) ist in der oberen Zeile des folgenden Diagramms teilweise dargestellt.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathrm{H}^{-1}(F(Q)) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & \mathrm{H}^0(F(P)) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(F(P\oplus Q)) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(F(Q)) \arrow[r] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \mathsf{L}_1F(N) \arrow[u, "\tau_{Q\twoheadrightarrow N}", "\sim"'] & \mathsf{L}_0F(L) \arrow[r] \arrow[u, "\tau_{P\twoheadrightarrow L}", "\sim"'] & \mathsf{L}_0F(M) \arrow[r] \arrow[u, "\tau_{P\oplus Q\twoheadrightarrow M}", "\sim"'] & \mathsf{L}_0F(N) \arrow[u, "\tau_{Q\twoheadrightarrow N}", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach Definition der derivierten Funktoren sind die vertikalen Pfeile Isomorphismen und die Quadrate kommutieren. Nun definiert man die gesuchten Verbindungsmorphismen in offensichtlicher Weise. □

A.0.50. Die lange exakte Sequenz aus Satz A.0.48 ist funktoriell in kurzen exakten Sequenzen in $\mathrm{Mod}(R)$: Jeder Morphismus von kurzen exakten Sequenzen liefert einen Morphismus der zugehörigen langen exakten Sequenzen (Kompatibilität mit den Verbindungsmorphismen ist hier zu zeigen). Es folgt dass die Funktoren $(\mathsf{L}_qF)_{q\geq 0}$ zusammen mit den Verbindungsmorphismen einen universellen homologischen δ-Funktor bilden, siehe [Wei94, Thm. 2.4.6].[128] Homologische δ-Funktoren sind eng mit dem klassischen Zugang (siehe [CE56], [Gro57]) zum Begriff der q-ten derivierten Funktoren verbunden.

Beispiel A.0.51. Sei $r \in R$ mit $\cdot r\colon R \to R$ injektiv und sei X ein R-Rechtsmodul. Betrachte den Funktor $X \otimes_R -\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$. Da R projektiv ist, verschwinden alle $\mathrm{Tor}_q^R(X,R)$ für $q \neq 0$. Wegen $\mathrm{Tor}_0^R(X,R) = X \otimes_R R = X$ erhalten wir aus der langen exakten Sequenz der Linksderivierten zur kurzen exakten Sequenz $R \overset{\cdot r}{\hookrightarrow} R \twoheadrightarrow R/Rr$ für $\mathrm{Tor}_q^R(X, R/Rr)$ dasselbe Ergebnis wie in Beispiel A.0.44.

Beispiel A.0.52. In Beispiel A.0.45 haben wir $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ berechnet. Dasselbe Ergebnis kann man fast[129] auch mit langen exakten Sequenzen der Linksderivierten erhalten. Zuerst berechnet man $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C}[X])$ wie im obigen Beispiel und verwendet dann die kurze exakte Sequenz $\mathbb{C}[X] \overset{\cdot X}{\hookrightarrow} \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$. Wir überlassen die Details dem Leser.

Ende der 29. Vorlesung am 23.1.2019 (als Abschluss Lemma 7.3.3 erklärt).

Literatur

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[Ber72] I. N. Bernšteĭn. Analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 6(4):26–40, 1972.

[BGK+87] A. Borel, P.-P. Grivel, B. Kaup, A. Haefliger, B. Malgrange, and F. Ehlers. *Algebraic D-modules*, volume 2 of *Perspectives in Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.

[CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[Cou95] S. C. Coutinho. *A primer of algebraic D-modules*, volume 33 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[128] (siehe [Sta18, 010P] für den dualen Begriff eines kohomologischen δ-Funktors; dort fehlen jedoch (Stand 11. Januar 2019) viele Details, insbesondere am Ende des Beweises von [Sta18, 010T], wo außer der dort erwähnten Auslassung noch die Kommutativität des Quadrates in Definition [Sta18, 010R] zu zeigen ist).

[129] Wir haben dort gesehen, dass X und Y auf $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2$ durch Null operieren. Hier erhält man a priori nur einen Isomorphismus $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2$ von Vektorräumen.

[Gab81] Ofer Gabber. The integrability of the characteristic variety. *Amer. J. Math.*, 103(3):445–468, 1981.

[Gel57] I. Gelfand. Some aspects of functional analysis and algebra. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, Vol. 1*, pages 253–276. Erven P. Noordhoff N.V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957.

[GM99] S. I. Gelfand and Yu. I. Manin. *Homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1989 Russian original by the authors, Reprint of the original English edition from the series Encyclopaedia of Mathematical Sciences [Algebra, V, Encyclopaedia Math. Sci., 38, Springer, Berlin, 1994].

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. (2)*, 9:119–221, 1957.

[GW10] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HTT08] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi, and Toshiyuki Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.

[Kas03] Masaki Kashiwara. *D-modules and microlocal calculus*, volume 217 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Translated from the 2000 Japanese original by Mutsumi Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[KL00] Günter R. Krause and Thomas H. Lenagan. *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, volume 22 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2000.

[Lit33] D. E. Littlewood. On the Classification of Algebras. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 35:200–240, 1933.

[Pól15] George Pólya. Über ganzwertige ganze Funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 40:1–16, 1915.

[Sta18] The Stacks Project Authors. Stacks project. http://stacks.math.columbia.edu, 2018.

[Tra10] Le Dung Trang, editor. *Algebraic approach to differential equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2010. Including papers from the ICTP School held in Alexandria, November 12–24, 2007.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Strasse 100, 33098 Paderborn, Germany

Email address: olaf.schnuerer@math.uni-paderborn.de