ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE: SINGULÄRE HOMOLOGIE

OLAF M. SCHNÜRER

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation 2
2. Simplizialkomplexe und simpliziale Homologie 3
2.1. Simplizialkomplexe 3
2.2. Geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes 5
2.3. Simpliziale Abbildungen 9
2.4. Simpliziale Homologie 10
3. Singuläre Homologie 18
3.1. Definition der singulären Homologie und erste Resultate 18
3.2. Funktorialität der singulären Homologie 25
3.3. Homotopie-Invarianz der singulären Homologie 27
3.4. Erste Homologie und Fundamentalgruppe 30
4. Relative singuläre Homologie 33
4.1. Definition der relativen singulären Homologie 33
4.2. Lange exakte Homologie-Sequenz eines Raumpaares 35
4.3. Satz über feine Ketten 37
4.4. Mayer-Vietoris-Sequenz 42
4.5. Homologie der Sphären 43
4.6. Homologie von Flächen 45
4.7. Ausschneidung 49
4.8. Vergleichsisomorphismus zwischen simplizialer Homologie eines Simplizialkomplexes und singulärer Homologie seiner geometrischen Realisierung 54
4.9. Euler-Charakteristik 63
4.10. Super-Spur 68
4.11. Simplizialer Fixpunktsatz 71
4.12. Baryzentrische Unterteilung für Simplizialkomplexe 72
4.13. Simpliziale Approximation 77
4.14. Lefschetzscher Fixpunktsatz 79
4.15. Abbildungsgrad für Selbstabbildungen von Sphären samt Anwendungen 89
5. Reduzierte singuläre Homologie 96
5.1. Erste Eigenschaften 96
5.2. Einbettungen von Sphären und der Jordansche Kurvensatz 98
5.3. Homologie endlicher Zellkomplexe 105
6. Tensorprodukt und universelle Koeffiziententheoreme 110
6.1. Vorbemerkungen 110
6.2. Tensorprodukt von Moduln 111
6.3. Rechtsexaktheit des Tensorprodukts 116

Datum: 18. Februar 2021.

Skript zur Vorlesung *Algebraische Topologie* im Wintersemester 2020/21 an der Universität Paderborn.

Ich halte mich eng an das Skript [Soe20]. Alexis-Vincent Chasiotis, Carsten Hecht, Martin Pulter und Jonas Pinke haben mich dankenswerterweise auf Fehler oder Unklarheiten im Skript aufmerksam gemacht. (Falls jemand hier nicht namentlich erscheinen möchte, bitte melden.)

6.4. Flache Moduln 119
6.5. Tensorprodukt und Homologie 121
6.6. Bikomplexe und Totalkomplex 123
6.7. Torsionsprodukt abelscher Gruppen 126
6.8. Untergruppen freier abelscher Gruppen 129
6.9. Universelles Koeffizientheorem für Komplexe freier abelscher Gruppen 130
6.10. Das universelle Koeffiziententheorem der singulären Homologie 131
7. Künnethformeln 135
7.1. Hauptsatz der homologischen Algebra 136
7.2. Satz über azyklische Modelle 138
7.3. Satz von Eilenberg-Zilber 142
7.4. Kreuzprodukt der singulären Homologie 145
7.5. Künneth-Formeln für Koeffizienten in einem Körper 146
7.6. Künneth-Formeln für ganzzahlige Koeffizienten 147
Anhang A. Kategorientheorie 150
Anhang B. Homologische Algebra 155
B.1. Die Kategorie der Komplexe und Homologie 155
B.2. Die Homotopiekategorie von Komplexen 159
B.3. Die lange exakte Homologiesequenz 162
B.4. Fünfer- und Neunerlemma 163
Anhang C. Nachträge zur mengentheoretischen Topologie 164
Literatur 165

1. Motivation

1.0.1. Motivation (mit Bildern an Tafel):

- Wir wollen jedem topologischen Raum ein algebraisches Datum zuordnen, das „genügend verschiedene“ topologische Räume unterscheidet und gleichzeitig „berechenbar“ ist.
- Beispiel: Fundamentalgruppe; jedem topologischen Raum X (mit ausgezeichnetem Punkt x) wird eine Gruppe $\pi_1(X) = \pi_1(X, x)$ zugeordnet (sie ist im Allgemeinen nicht abelsch).
  - $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \ncong \pi_1(\mathbb{R}^2) = \{0\}$.
  - $\pi_1(\{*\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^m) \cong \pi_1(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{m-1})$ für alle $m \geq 3$.
- Wir sind gerne bereit, mit der „Homotopie-Invarianz der Fundamentalgruppe“ zu leben (siehe [Sch20, Satz 3.5.1][1]).

  Jedoch ist es unbefriedigend, dass die Fundamentalgruppen der Sphären $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^3$, ... der Dimension ≥ 2 und aller $\mathbb{R}^m$ trivial sind, die Fundamentlagruppe diese topologischen Räume also nicht unterscheiden kann.

  Immerhin kann π_1 die Eins-Sphäre $\mathbb{S}^1$ von den gerade genannten Räumen unterscheiden.

  Auch kann π_1 zwischen $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$ für verschiedene Punkte p, q, r in $\mathbb{R}^2$ unterscheiden (freie Gruppen in einem, zwei oder drei Erzeugern).
- Wie unterscheiden sich $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^2$?

  Kombinatorischer gefragt: Wie unterscheiden sich der Rand eines Dreiecks (homotop zu $\mathbb{S}^1$) und der Rand (= Oberfläche) eines Tetraeders (homotop zu $\mathbb{S}^2$)?

  Idee: Der eindimensionale Dreiecksrand umschließt ein „Loch kleinerer Dimension“ als der zweidimensionale Tetraederrand. Diese Löcher sind gerade das „Innere“ des Dreiecks bzw. Tetraeders.
- Unser erstes Ziel ist es, singuläre Homologie zu definieren. Diese ordnet jedem topologischen Raum X eine Familie *abelscher* Gruppen $\mathrm{H}_p(X)$, für $p \in \mathbb{Z}$, zu. Wie die Fundamentalgruppe wird sie homotopie-invariant sein. Jedoch kann sie beispielsweise alle Sphären $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \ldots$ voneinander unterscheiden.

[1] Verweise in hellem Purpur (= Magenta) sollten funktionieren, wenn sich das in [Sch20] genannte Skript im selben Verzeichnis wie dieses Skript befindet.

- Damit die Definition nicht vom Himmel fällt, definieren wir zunächst simpliziale Homologie von Simplizialkomplexen. Ein Simplizialkomplex ist ein rein kombinatorisches Datum, das topologische Räume modelliert, die sich (in schöner Weise) aus Punkten, Streckensegmenten, Tetraedern, und analogen höherdimensionalen „vollen Simplizes“ zusammenbauen lassen. Für solche Gebilde ist anschaulich recht klar, was „Löcher verschiedener Dimensionen“ sind - die simpliziale Homologie zählt im Wesentlichen diese Löcher und motiviert die viel weniger anschauliche, aber allgemeinere Definition der singulären Homologie.
- Man kann die Singuläre-Homologie-Theorie auch axiomatisch aus den sogenannten Eilenberg-Steenrod Axiomen entwickeln, siehe [Wik20, Eilenberg-Steenrod axioms] und [Bre97].

2. Simplizialkomplexe und simpliziale Homologie

2.1. Simplizialkomplexe.

Definition 2.1.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein $(n+1)$-Tupel $(p_0, \dots, p_n)$ von Vektoren in V heißt **affin unabhängig**, wenn das Tupel $(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)$ linear unabhängig ist. Eine äquivalente, symmetrischere Forderung ist: Für alle $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 p_0 + \dots \lambda_n p_n = 0$ und $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$ gilt $0 = \lambda_0 = \dots = \lambda_n$.

Sei $(p_0, \dots, p_n)$ ein affin unabhängiges $(n+1)$-Tupel. Dann nennt man die konvexe Hülle

$$\operatorname{konv}(p_0, \dots, p_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i p_i \mid t_i \in [0,1] \text{ mit } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

dieser Vektoren den **vollen n-Simplex mit Ecken** $p_0, \dots, p_n$. Für jeden Punkt $q \in \operatorname{konv}(p_0, \dots, p_n)$ gibt es auf Grund der affinen Unabhängigkeitsannahme genau ein $(n+1)$-Tupel $(t_0, \dots, t_n) \in [0,1]^{n+1}$ mit $q = \sum_{i=0}^{n} t_i p_i$. Man nennt die Elemente dieses Tupels die **baryzentrischen Koordinaten von** q.[2] Der Punkt $\frac{1}{n+1}(p_0 + \dots + p_n)$ heißt **Schwerpunkt** oder **Baryzentrum** unseres vollen Simplex (vgl. Abbildung 1).

Sind $p_0, \dots, p_n \in V$ (nicht notwendig affin unabhängige) Vektoren, so nennt man jede Summe der Form $\sum_{i=0}^{n} t_i p_i$ mit $t_i \in [0,1]$ eine **Konvexkombination der** $p_0, \dots, p_n$.

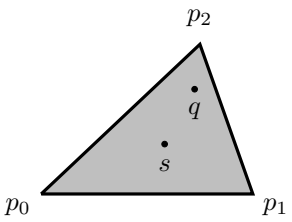


Abbildung 1. Voller 2-Simplex mit Ecken p_0, p_1, p_2. Eingezeichnet sind sein Schwerpunkt $s = \frac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$ und der Punkt q mit baryzentrischen Koordinaten $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}\right)$

Beispiele 2.1.2. Ein einzelner Punkt p ist stets affin unabhängig und sein voller Simplex ist $\operatorname{konv}(p) = \{p\}$.

Zwei Punkte p, q sind genau dann affin unabhängig, wenn sie verschieden sind. Dann ist $\operatorname{konv}(p,q)$ das „abgeschlossenen Streckenstück zwischen p und q“ und wird manchmal als $[p,q]$ notiert.

Drei Punkte p, q, r sind genau dann affin unabhängig, wenn sie nicht alle auf einer „affinen Geraden“ liegen. In diesem Fall ist $\operatorname{konv}(p,q,r)$ das abgeschlossene Dreieck mit Ecken p, q, r.

Siehe auch [Wik20, Simplex (Mathematik)].

2.1.3. Jede Permutation eines affin unabhängigen Tupels ist affin unabhängig.

Jedes Teiltupel eines affin unabhängigen Tupels ist affin unabhängig. Der volle Simplex des Teiltupels ist eine **Seitenfläche** des vollen Simplex des gesamten Tupels.

2.1.4. Ist V endlichdimensional, so hat V eine natürliche Topologie[3]; der volle n-Simplex $\operatorname{konv}(p_0, \dots, p_n)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von V.

[2] Anschaulich ist q der Schwerpunkt der $n+1$ Punkte $p_0, \dots, p_n$, wobei p_i die Masse t_i hat.

[3] Jeder endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum hat eine natürliche Topologie: Wähle eine beliebige Norm, betrachte die induzierte Metrik und die daraus erhaltene Topologie - diese hängt nicht von der Wahl der Norm ab, da alle Normen äquivalent sind.

Definition 2.1.5 (e. g. [Spa81, 3.1])**.** Ein **Simplizialkomplex** ist ein Paar $(E, \mathcal{K})$ bestehend aus einer Menge E und einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen, das unter dem Bilden von nichtleeren Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen enthält:

- Für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ gilt $0 < |\sigma| < \infty$;
- für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $\varnothing \neq \tau \subset \sigma$ gilt $\tau \in \mathcal{K}$;
- für alle $e \in E$ gilt $\{e\} \in \mathcal{K}$.

Die Elemente von E heißen **Ecken**, die Elemente von $\mathcal{K}$ heißen **Simplizes** des Simplizialkomplexes. Die Simplizes $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $|\sigma| = q+1$ heißen genauer q**-Simplizes** oder auch Simplizes der **Dimension** $\dim(\sigma) = q$; die Menge der q-Simplizes wird als $\mathcal{K}_q = \{\sigma \in \mathcal{K} \mid |\sigma| = q+1\}$ notiert. Für $q < 0$ gilt also $\mathcal{K}_q = \varnothing$.

Sind $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ Simplizes mit $\tau \subset \sigma$, so nennt man τ eine **Seite von** σ oder genauer im Fall $\tau \in \mathcal{K}_q$ eine q**-Seite von** σ.

2.1.6. Der Fall $|E| = \infty$ ist zwar erlaubt und wichtig, beim ersten Lesen sollte man aber eher an den Fall $|E| < \infty$ denken.

2.1.7. Ein Simplizialkomplex ist ein rein kombinatorisches Datum und hat a priori nichts mit geometrischen vollen Simplizes zu tun. Unsere Simplizialkomplexe werden deshalb oft auch **abstrakte** oder **kombinatorische Simplizialkomplexe** genannt.

2.1.8. Ist $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex, so ist die Abbildung $E \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_0$, $e \mapsto \{e\}$ eine Bijektion und $E = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}_0} \sigma$ ist die disjunkte Vereinigung der 0-Simplizes.

Somit ist E durch $\mathcal{K}$ bestimmt und man nennt deshalb oft kurz das Mengensystem $\mathcal{K}$ einen Simplizialkomplex und erwähnt E nicht explizit.

Beispiel 2.1.9. Ist E eine Menge, so ist $(E, \mathcal{P}_{\text{endlich}}(E) \setminus \{\varnothing\})$ ein Simplizialkomplex, der sogenannte **maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge** E, wobei $\mathcal{P}_{\text{endlich}}(E)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von E bezeichnet.

Definition 2.1.10. Ist $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex, so ist E genau dann endlich, wenn $\mathcal{K}$ endlich ist. In diesem Fall nennt man $(E, \mathcal{K})$ einen **endlichen** Simplizialkomplex.

Beispiele 2.1.11.

(a) Setze $E = \mathbb{Z}$ und
$$\mathcal{K} = \Big\{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \Big\{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\Big\}.$$
Dies definiert einen Simplizialkomplex $(E, \mathcal{K})$. Seine in Kürze definierte geometrische Realisierung (Definition 2.2.2) ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ (motiviere durch Bild), wie wir in 2.2.9 begründen werden.

(b) Setze $E = \mathbb{Z}^2$ und
$$\mathcal{K}_2 := \Big\{\{(x,y),(x+1,y),(x+1,y+1)\},\{(x,y),(x,y+1),(x+1,y+1)\} \mid (x,y) \in \mathbb{Z}^2\Big\}$$
und
$$\mathcal{K} := \{\sigma \mid \sigma \subset \tau \text{ für ein } \tau \in \mathcal{K}_2\}.$$
Dann ist $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex mit geometrischer Realisierung homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, wie wir in 2.2.9 begründen werden (male Bild, $\mathbb{R}^2$ in Quadrate zerschnitten, diese entlang „erster“ Diagonale zerschnitten; „Triangulierung“ von $\mathbb{R}^n$).

(c) Ähnlich definiert man einen Simplizialkomplex mit Eckenmenge $\mathbb{Z}^n$, dessen geometrische Realisierung homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, siehe [Spa81, 3.1.9]. Anschaulich: Zerschneide $\mathbb{R}^n$ in offensichtlicher Weise in n-dimensionale Würfel; zerschneide jeden dieser Würfel in $n!$ volle n-Simplizes.

(d) Siehe www.ics.uci.edu/~eppstein/projects/tetra/ für zwei Beispiele, wie man den Würfel in Tetraeder zerschneiden kann.

(e) Betrachte den Simplizialkomplex mit $E = \mathbb{N} \sqcup \{*\}$ und
$$\mathcal{K} = \Big\{\{e\} \mid e \in E\Big\} \cup \Big\{\{*, n\} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}.$$
Verbindet man in $\mathbb{R}^2$ den Ursprung durch ein Geradensegment mit allen Punkten der Form $(1, n)$, für $n \in \mathbb{N}$, so könnte man vermuten, dass die entstandene Teilmenge homöomorph zur geometrischen

Realisierung von $\mathcal{K}$ ist. Dies ist aber nicht der Fall, wie sofort aus der späteren Proposition 2.2.15 folgt.

Definition 2.1.12. Ein **Unterkomplex** (oder genauer **Untersimplizialkomplex**) eines Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$ ist ein Simplizialkomplex $(F, \mathcal{L})$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ (und somit $F \subset E$). Wir schreiben dies als $(F, \mathcal{L}) \subset (E, \mathcal{K})$.

2.1.13. Sind $\mathcal{L}, \mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ Unterkomplexe, so auch $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ und $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ (die in der Notation weggelassenen Eckenmengen sind ebenfalls Schnitt bzw. Vereinigung der Eckenmengen). Allgemeiner sind beliebige Schnitte $\bigcap \mathcal{L}(i)$ und Vereinigungen $\bigcup \mathcal{L}(i)$ von Unterkomplexen $\mathcal{L}(i) \subset \mathcal{K}$ wieder Unterkomplexe.

Beispiel 2.1.14. Seien $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex und $m \in \mathbb{Z}$. Der Unterkomplex $\mathcal{K}_{\leq m} := (E, \bigsqcup_{q \leq m} \mathcal{K}_q)$ heißt das **m-Skelett von $\mathcal{K}$** oder das **m-dimensionale Skelett von $\mathcal{K}$**.

Beispiel 2.1.15. Ist $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$ eine Teilmenge, so bildet die Menge aller nichtleeren Teilmengen von Elementen von $\mathcal{T}$ einen Unterkomplex von $\mathcal{K}$.

2.2. Geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes.

Erinnerung 2.2.1 (freier Vektorraum). Ist E eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit $\mathbb{R}E$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $t\colon E \to \mathbb{R}$ mit endlichem Träger (dieser Untervektorraum von $\mathbb{R}^E$ wird oft als $\mathbb{R}^{(E)}$ notiert; Addition und Skalarmultiplikation sind punktweise definiert).

Wir fassen E als Teilmenge von $\mathbb{R}E$ auf, indem wir einem Element $e \in E$ die Funktion $E \to \mathbb{R}$ zuweisen, die auf e den Wert Eins annimmt und überall sonst den Wert Null (*charakteristische Funktion von e*). Mit dieser Konvention lässt sich jedes Element $f \in \mathbb{R}E$ eindeutig als $\mathbb{R}$-Linearkombination $f = \sum_{e \in E} a_e e$ schreiben, wobei nur endlich viele der $a_e = f(e) \in \mathbb{R}$ von Null verschieden sind;[4] mit anderen Worten ist E eine Basis von $\mathbb{R}E$.[5]

Lineare Abbildungen $\mathbb{R}E \to V$ in einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind eindeutig durch ihre Einschränkung auf $E \subset \mathbb{R}E$ bestimmt und definierbar. In anderen Worten ist $E \subset \mathbb{R}E$ eine *universelle Menge-($\mathbb{R}$-Vektorraum)-Abbildung* und $\mathbb{R}E$ heißt **freier $\mathbb{R}$-Vektorraum über E** (in Analogie zur Terminologie in [Sch20, Satz 3.8.3 und Satz 3.8.10]).

Ende der 1. Vorlesung am 29.10.2020.

Definition 2.2.2. Sei $(E, \mathcal{K})$ oder kurz $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Seine **geometrische Realisierung** $\Delta(\mathcal{K})$ ist der folgende topologische Raum (er wird auch der **Polyeder von** $\mathcal{K}$ genannt)[6]. Als Menge ist $\Delta(\mathcal{K})$ definiert durch

$$\Delta(\mathcal{K}) := \left\{ f\colon E \to [0,1] \mid \operatorname{Supp}(f) \in \mathcal{K} \text{ und } \sum_{e \in E} f(e) = 1 \right\} \subset \mathbb{R}E.$$

(Wer nur an endlichen Simplizialkomplexen interessiert ist, kann anstelle der folgenden Technikalitäten alternativ 2.2.5 zur Definition der Topologie auf $\Delta(\mathcal{K})$ verwenden.)

Für jeden Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ setze

$$\Delta(\mathcal{K})_\sigma := \{ f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \operatorname{Supp}(f) \subset \sigma \} \subset \Delta(\mathcal{K}).$$

Schreibe $\sigma = \{e_0, \dots, e_q\}$, wobei $q = \dim \sigma$. Dann ist das (sogar linear unabhängige) Tupel $(e_0, \dots, e_q)$ von Vektoren in $\mathbb{R}E$ affin unabhängig und es gilt

$$\Delta(\mathcal{K})_\sigma = \operatorname{konv}(\sigma) = \operatorname{konv}(e_0, \dots, e_q),$$

in Worten ist also $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$ der volle q-Simplex mit Ecken $e_0, \dots, e_q$.

Der endlichdimensionale Untervektorraum $\mathbb{R}\sigma = \mathbb{R}\{e_0, \dots, e_q\} = \mathbb{R}e_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_q \subset \mathbb{R}E$ trägt eine natürliche Topologie. Wir versehen die Teilmenge $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \mathbb{R}e_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_q$ mit der induzierten Topologie (= Teilmengentopologie, siehe [Sch20, Definition 2.3.6]).

---

[4] Wenn ich von einer Linearkombination spreche, nehme ich stets an, dass nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind, vgl. [Wik20, Linearkombination].

[5] Eine solche Linearkombination $f = \sum_{e \in E} a_e e$ nennt man oft eine *formale* Linearkombination, was vermutlich daher kommt, dass man formelartig links neben die Elemente von E ganze Zahlen schreibt.

[6] Eigentlich wäre der Begriff *topologische Realisierung* besser.

Offensichtlich gilt

$$\Delta(\mathcal{K}) = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} \Delta(\mathcal{K})_\sigma.$$

Wir versehen $\Delta(\mathcal{K})$ mit der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \Delta(\mathcal{K})$, für $\sigma \in \mathcal{K}$ (siehe [Sch20, Definition 2.8.33]). Damit ist $\Delta(\mathcal{K})$ als topologischer Raum definiert.

Anschauung 2.2.3. Anschaulich wird $\Delta(\mathcal{K})$ wie folgt konstruiert: Jedem q-Simplex $\sigma \in \mathcal{K}_q$ ordnet man einen vollen q-Simplex mit der „offensichtlichen Topologie“ zu (nämlich $\Delta(\mathcal{K})_\sigma = \operatorname{konv}(e_0, \dots, e_q)$ in der obigen Definition) und dann verklebt man all diese q-Simplizes, für variables q, in der offensichtlichen Weise.[7]

2.2.4. In der Notation von Definition 2.2.2 gilt

$$\Delta(\mathcal{K})_\sigma \cap \Delta(\mathcal{K})_\tau = \Delta(\mathcal{K})_{\sigma\cap\tau} \tag{2.2.1}$$

für beliebige Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$. Per Konvention setze $\Delta(\mathcal{K})_\varnothing := \varnothing$, damit dies auch im Fall $\sigma\cap\tau = \varnothing$ stimmt. Insbesondere folgt, dass alle $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$ abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{K})$ sind. Man beachte auch $\Delta(\mathcal{K})_\tau \subset \Delta(\mathcal{K})_\sigma \iff \tau \subset \sigma$.

2.2.5. Ist $(E, \mathcal{K})$ ein endlicher Simplizialkomplex, so trägt der endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}E$ eine natürliche Topologie, so dass wir seine (abgeschlossene) Teilmenge $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$ mit der Teilmengentopologie versehen können. Diese stimmt mit der in Definition 2.2.2 erklärten Topologie überein, was man wie folgt sieht:

Nach 2.1.4 sind alle vollen Simplizes $\Delta(\mathcal{K})_\sigma = \operatorname{konv}(e_0, \dots, e_q)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}E$. Diese bilden eine endliche abgeschlossene Überdeckung von $\Delta(\mathcal{K})$, letzteres versehen mit der Teilmengentopologie. Nach [Sch20, Proposition 2.4.13.(b), vgl. Beispiel 2.8.36] trägt also $\Delta(\mathcal{K})$ die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \Delta(\mathcal{K})$. Da die Topologie von $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$ als Teilmenge von $\mathbb{R}\sigma$ mit der als Teilmenge von $\mathbb{R}E$ übereinstimmt, zeigt dies unsere Behauptung.

2.2.6. Sei $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Für jeden Unterkomplex $(F, \mathcal{L}) \subset (E, \mathcal{K})$ können wir $\Delta(\mathcal{L})$ als Teilmenge von $\Delta(\mathcal{K})$ auffassen, indem wir Funktionen $f\colon F \to [0,1]$ durch Null zu Funktionen $E \to [0,1]$ ausdehnen. Wir behaupten, dass die Inklusion $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Stetigkeit ist klar, denn ihre Einschränkung auf $\Delta(\mathcal{L})_\tau = \Delta(\mathcal{K})_\tau$ ist stetig für alle $\tau \in \mathcal{K}$. Sei $A \subset \Delta(\mathcal{L})$ abgeschlossen. Dann gilt für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$

$$\Delta(\mathcal{K})_\sigma \cap A = \bigcup_{\tau\in\mathcal{L},\tau\subset\sigma} \Delta(\mathcal{K})_\tau \cap A$$

und die rechte Seite ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen von $\Delta(\mathcal{K})$, denn $\Delta(\mathcal{K})_\tau \cap A = \Delta(\mathcal{L})_\tau \cap A$ ist laut Annahme abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{L})_\tau = \Delta(\mathcal{K})_\tau$ und letzteres ist abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{K})$ nach 2.2.4.

Die Topologie von $\Delta(\mathcal{K})$ ist die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$, wobei $\mathcal{L}$ alle *endlichen* Unterkomplexe von $\mathcal{K}$ durchläuft.[8]

Ist $\sigma \in \mathcal{K}$ ein Simplex, so können wir σ als maximalen Simplizialkomplex mit Eckenmenge σ auffassen (siehe 2.1.9). Notieren wir diesen (by abuse of notation) als σ, so ist $\sigma \subset \mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Unterkomplex. Die entsprechende (abgeschlossene) Teilmenge $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ ist der volle Simplex $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$ aus Definition 2.2.2, in Formeln

$$\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_\sigma.$$

Die Formel (2.2.1) hat in dieser Schreibweise die einprägsamere Gestalt $\Delta(\sigma)\cap\Delta(\tau) = \Delta(\sigma\cap\tau)$. Das stimmt auch im Fall $\sigma \cap \tau$, denn der leere Unterkomplex $\varnothing \subset \mathcal{K}$ erfüllt $\Delta(\varnothing) = \varnothing$.

2.2.7. Sei $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex und $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$ seine geometrische Realisierung. In vielen Beispielen findet man eine homöomorphes Bild von $\Delta(\mathcal{K})$ in einem Vektorraum V der Dimension $\dim V < |E| = \dim \mathbb{R}E$. Besonders interessant ist dies, falls E unendlich ist und V endliche Dimension hat. Proposition 2.2.8 erklärt eine Methode, wie man dies erreichen kann.

[7] Das Verkleben zweier topologischer Räume wurde in [Sch20, 2.8.52] mit Hilfe eines kokartesischen Diagramms erklärt; kokartesische Diagramm sind Spezialfälle von Kolimiten – dieser Begriff wird hier nicht vorausgesetzt; wer ihn jedoch kennt, wird sofort erkennen, dass und in welcher Weise $\Delta(\mathcal{K})$ ein Kolimes ist.

[8] Um Missverständnissen vorzubeugeh: Sie ist auch die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$, wobei $\mathcal{L}$ alle Unterkomplexe von $\mathcal{K}$ durchläuft.

Proposition 2.2.8. *Sei $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Sei $\varphi\colon E \to V$ eine Abbildung von der Menge der Ecken in einen Vektorraum V und sei $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{R}E \to V$ ihre eindeutige lineare Erweiterung. Sind die drei Bedingungen*

- *$\widehat{\varphi}|_{\Delta(\mathcal{K})}$ ist injektiv;*
- *V ist endlichdimensional;*
- *die (automatisch abgeschlossene) Überdeckung $\widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K})) = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} \operatorname{konv}(\varphi(\sigma))$ ist lokal-endlich (siehe* [Sch20, Aufgabe 2.4.18]*)*

erfüllt, so restringiert $\widehat{\varphi}$ zu einem Homöomorphismus

$$\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K})) \tag{2.2.2}$$

auf sein Bild.

2.2.9. Die Behauptungen in den Beispielen (a) und (b) in 2.1.11 folgen sofort aus Proposition 2.2.8.

Beweis. Die Stetigkeit der Abbildung (2.2.2) ist offensichtlich, denn ihre Einschränkung auf jedes $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$ ist offensichtlich stetig (denn die lineare Abbildung $\mathbb{R}\sigma \to V$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen ist stetig). Auf Grund der ersten Bedingung ist unsere Abbildung bijektiv; die Stetigkeit der Umkehrabbildung folgt dann sofort aus [Sch20, Aufgabe 2.4.18] und der Definition der Topologie auf $\Delta(\mathcal{K})$, denn $\widehat{\varphi}$ bildet das Kompaktum $\Delta(\mathcal{K}_\sigma)$ homöomorph auf den Hausdorff-Raum $\operatorname{konv}(\varphi(\sigma))$ ab nach [Sch20, Satz 2.7.15].[9] □

Aufgabe 2.2.10. Wir verwenden die Notation aus Proposition 2.2.8.

(a) Für jedes $q \in \mathbb{N}$ und jeden q-Simplex $\sigma = \{e_0, \dots, e_q\} \in \mathcal{K}_q$ gilt: $\widehat{\varphi}|_{\operatorname{konv}(\sigma)}$ ist genau dann injektiv, wenn das $(q+1)$-Tupel $(\varphi(e_0), \dots, \varphi(e_q))$ affin unabhängig ist.
Hinweis: Eventuell einfacher mit der symmetrischen Definition der affinen Unabhängigkeit in Definition 2.1.1.

(b) Die Injektivität von $\widehat{\varphi}|_{\Delta(\mathcal{K})}$ ist äquivalent dazu, dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:
   (i) Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ und jeden q-Simplex $\sigma = \{e_0, \dots, e_q\} \in \mathcal{K}_q$ ist das $(q+1)$-Tupel $(\varphi(e_0), \dots, \varphi(e_q))$ affin unabhängig.
   (ii) Es gilt $\operatorname{konv}(\varphi(\sigma)) \cap \operatorname{konv}(\varphi(\tau)) = \operatorname{konv}(\varphi(\sigma \cap \tau))$ für alle Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$.

Ende der 2. Vorlesung am 30.10.2020.
Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 2.2.10
(2) [Sch20, Aufgabe 2.4.18]
(3) Lies [Sch20, Appendix A] und stelle Fragen, wenn irgendetwas unklar ist (etwa Details in A.2.3, Beispiel A.2.9, Beispiel A.2.14 oder A.2.15). Melde alle Fehler.
(4) Lies Definition A.0.2 und löse Aufgabe A.0.3.

Proposition 2.2.11. *Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Dann ist $\Delta(\mathcal{K})$ ein Hausdorffraum.*

2.2.12. Mit etwas mengentheoretischer Topologie (Satz von Tietze [vQ79, 7.7 Satz]) kann man zeigen, dass $\Delta(\mathcal{K})$ ein normaler Hausdorffraum ist; der Leser sei dafür auf [Spa81, Theorem 3.1.17] verwiesen, wo die geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ als $|\mathcal{K}|$ notiert wird.

Beweis. Der Vektorraum $\mathbb{R}E$ wird durch

$$\langle f, g\rangle = \sum_{e\in E} f(e)g(e)$$

zu einem Skalarproduktraum (im Allgemeinen ist dies kein Hilbertraum, etwa für E abzählbar unendlich, was für uns aber unerheblich ist). Wir erhalten eine induzierte Norm, Metrik und Topologie auf $\mathbb{R}E$. Da $\mathbb{R}E$ mit dieser Topologie ein Hausdorffraum ist, genügt es zu zeigen, dass die Inklusion $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$ eine stetige Abbildung ist. Dafür ist äquivalent zu zeigen, dass für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$ die Inklusion $\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \mathbb{R}E$ stetig

[9] Vielleicht ist die folgende Formulierung verständlicher: Die dritte Bedingung besagt nach Aufgabe 2.4.18, dass $\widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K}))$ die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\operatorname{konv}(\varphi(\sigma)) \subset \widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K}))$ trägt. Analog trägt per Definition $\Delta(\mathcal{K})$ die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \Delta(\mathcal{K})$. Nun folgt die Behauptung daraus, dass die Bijektion $\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K}))$ die Teilmenge $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$ homöomorph auf $\operatorname{konv}(\varphi(\sigma))$ abbildet.

ist. Dies ist aber klar, da diese Abbildung als $\Delta(\sigma) \subset \mathbb{R}\sigma \subset \mathbb{R}E$ faktorisiert und die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}\sigma$ durch die Einschränkung unseres obigen Skalarprodukts definiert werden kann. □

2.2.13. Wir bereiten nun den Beweis von Proposition 2.2.15 vor. Seien $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $\sigma \in \mathcal{K}$ ein Simplex. Wir erinnern an den abgeschlossenen vollen Simplex

$$\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_\sigma = \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \mathrm{Supp}(f) \subset \sigma\} \subset \Delta(\mathcal{K}).$$

und definieren nun sein „Inneres“

$$\Delta(\sigma)' := \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \mathrm{Supp}(f) = \sigma\} = \{f \in \Delta(\sigma) \mid f(e) \neq 0 \text{ für alle } e \in \sigma\} \subset \Delta(\sigma). \tag{2.2.3}$$

Offensichtlich entsteht $\Delta(\sigma)'$ aus $\Delta(\sigma)$ durch Entfernen aller echten (abgeschlossenen) Seitenflächen $\Delta(\tau)$ für alle $\tau \subsetneq \sigma$ und ist offen in $\Delta(\sigma)$ (aber im Allgemeinen nicht offen in $\Delta(\mathcal{K})$). Deswegen wird $\Delta(\sigma)'$ als **offener Simplex zu** σ bezeichnet. Offensichtlich ist $\Delta(\mathcal{K})$ die disjunkte Vereinigung der offenen Simplizes, in Formeln

$$\Delta(\mathcal{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta(\sigma)'.$$

Lemma 2.2.14. *Seien $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $A \subset \Delta(\mathcal{K})$ eine Teilmenge, so dass für alle Simplizes $\sigma \in \mathcal{K}$ der Schnitt $A \cap \Delta(\sigma)'$ endlich ist. Dann ist A abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{K})$ und trägt die diskrete Topologie.*

Beweis. Für beliebiges $\sigma \in \mathcal{K}$ ist $\Delta(\sigma)$ die endliche disjunkte Vereinigung aller $\Delta(\tau)'$ mit $\tau \subset \sigma$. Laut Annahme besteht $\Delta(\sigma) \cap A$ also nur aus endlich vielen Elementen und ist somit abgeschlossen in $\Delta(\sigma)$. Also ist A abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{K})$. Ersetzen wir in diesem Argument A durch eine beliebige Teilmenge $A' \subset A$, so zeigt dies, dass jede Teilmenge A' von A abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{K})$ und damit in A ist. Also trägt A die diskrete Topologie. □

Proposition 2.2.15 ([Spa81, Corollary 3.1.19])**.** *Sind $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $K \subset \Delta(\mathcal{K})$ eine kompakte[10] Teilmenge, so gibt es einen endlichen Unterkomplex $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ mit $K \subset \Delta(\mathcal{L})$.*

Beweis. Für jeden Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $K \cap \Delta(\sigma)' \neq \varnothing$ wähle man einen Punkt $p_\sigma \in K \cap \Delta(\sigma)'$. Sei $A \subset K$ die Menge aller so gewählten Punkte. Dann ist A nach Lemma 2.2.14 eine abgeschlossene Teilmenge von $\Delta(\mathcal{K})$ – dann auch von K und ist somit kompakt – und trägt die diskrete Topologie. Also ist A endlich. Die Behauptung folgt sofort. □

Korollar 2.2.16 ([Spa81, Corollary 3.1.20])**.** *Ein Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ ist genau dann endlich, wenn $\Delta(\mathcal{K})$ kompakt ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{K}$ endlich, so ist $\Delta(\mathcal{K})$ als endliche Vereinigung endlich vieler kompakter, abgeschlossener voller Simplizes quasi-kompakt, wegen Proposition 2.2.11 Hausdorff und somit kompakt.

Die umgekehrte Implikation folgt aus Proposition 2.2.15. □

Definition 2.2.17. Eine **Triangulierung** eines topologischen Raums X ist ein Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ zusammen mit einem Homöomorphismus $f\colon \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} X$. Ein topologischer Raum X heißt **triangulierbar**, falls es eine solche Triangulierung gibt.

2.2.18. Ein kompakter topologischer Raum X ist genau dann triangulierbar, wenn es einen *endlichen* Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ mit $X \cong \Delta(\mathcal{K})$ gibt. Dies folgt sofort aus Korollar 2.2.16.

Beispiele 2.2.19.

(a) Triangulierungen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ haben wir in den Beispielen (a) und (b) in 2.1.11 informell kennengelernt. Dass es sich dabei wirklich um Triangulierungen im Sinne von Definition 2.2.17 handelt, haben wir in 2.2.9 gesehen.

(b) Um die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ zu triangulieren, benötigt man mindestens drei 1-Simplizes. (Warum geht es nicht mit zwei 1-Simplizes?)

(c) Die abgeschlossene Kreisscheibe $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ hat eine offensichtliche „Triangulierung durch einen n-Simplex“, denn sie ist homöomorph zu einem vollen n-Simplex (per stereographischer Projektion).

[10] Wegen Proposition 2.2.11 sind hier die Begriffe *kompakt* und *quasi-kompakt* gleichbedeutend.

(d) Sphäre $\mathbb{S}^n$: Trianguliere durch die Seiten des $(n+1)$-Simplex.

Es gibt natürlich viele andere Trianguliergunen, etwa Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2$ in 8 Dreiecke zerteilen etc.

(e) Zweitorus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Stellt man sich $\mathbb{T}^2$ als Quadrat mit identifizierten gegenüberliegenden Seiten vor, warum ist die Zerlegung in vier gleich große Quadrate, die wiederum in zwei Dreiecke zerschnitten werden, keine Triangulierung?

Schneidet man dieses Quadrat in neun gleich große Quadrate und zerschneidet diese in je zwei Dreiecke, so ist es eine Triangulierung mit 18 Dreiecken.

Aufgabe: Finde eine Triangulierung mit 14 Dreiecken (und 21 Kanten und 7 Ecken) – laut Internet/Literatur geht es nicht besser.

(f) Für Bilder und weitere Informationen (welche Mannigfaltigkeiten sind triangulierbar?) siehe [Wik20, Triangulation (topology)].

2.3. **Simpliziale Abbildungen.**

Definition 2.3.1. Gegeben zwei Simplizialkomplexe $(E,\mathcal{K})$ und $(F,\mathcal{L})$ ist eine **simpliziale Abbildung** $\varphi\colon (E,\mathcal{K}) \to (F,\mathcal{L})$ eine Abbildung $\varphi\colon E \to F$ von Mengen mit $\varphi(\sigma) \in \mathcal{L}$ für alle $\sigma \in \mathcal{K}$. Äquivalent ist die Forderung: Die induzierte Abbildung $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ auf den Potenzmengen bildet $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{L}$ ab.

Warnung 2.3.2. Wir fordern nicht, dass eine simpliziale Abbildung q-Simplizes auf q-Simplizes abbildet. Ein 3-Simplex etwa kann auf einen 1-Simplex abgebildet werden – umgekehrt geht dies aber offensichtlich nicht.

2.3.3. Simplizialkomplexe und simpliziale Abbildungen bilden in offensichtlicher Weise eine Kategorie. Wie notieren diese als SimpKomp. Morphismen in SimpKomp, also simpliziale Abbildungen, werden auch Morphismen von Simplizialkomplexen genannt.

2.3.4. Sind $(E,\mathcal{K})$ und $(F,\mathcal{L})$ Simplizialkomplexe, so ist eine Abbildung $E \to F$ modulo der Isomorphismen $E \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_0$ und $F \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_0$ aus 2.1.8 dasselbe wie eine Abbildung $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{L}_0$. Deswegen kann man eine simpliziale Abbildung $\mathcal{K} = (E,\mathcal{K}) \to \mathcal{L} = (F,\mathcal{L})$ äquivalent durch eine Abbildung $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{L}_0$ festlegen. Dies wird vor allem dann nützlich sein, wenn wir unsere Simplizialkomplexe als $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ (ohne Angabe der Eckenmengen) notieren.

Beispiel 2.3.5. Unterkomplexe sind „dasselbe“ wie simpliziale Abbildungen, die injektiv auf den Eckenmengen sind: Ein Unterkomplex $(F,\mathcal{L}) \subset (E,\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes liefert in offensichtlicher Weise eine simpliziale Abbildung $(F,\mathcal{L}) \to (E,\mathcal{K})$ mit $F \to E$ injektiv. Ist umgekehrt $\varphi\colon (F,\mathcal{L}) \to (E,\mathcal{K})$ eine simpliziale Abbildung mit $\varphi\colon F \to E$ injektiv, so ist $(\varphi(F),\varphi(\mathcal{L})) \subset (E,\mathcal{K})$ ein zu $(F,\mathcal{L}))$ isomorpher Unterkomplex, wobei $\varphi(\mathcal{L}) = \{\varphi(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{L}\}$.

Lemma 2.3.6. *Sei $\varphi\colon (E,\mathcal{K}) \to (F,\mathcal{L})$ eine simpliziale Abbildung. Dann restringiert die induzierte lineare Abbildung $\mathbb{R}E \to \mathbb{R}F$ zwischen den freien Vektorräumen zu einer stetigen Abbildung*

$$\Delta(\varphi)\colon \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{L}),$$
$$f = \sum t_e e \mapsto (\Delta(\varphi))(f) = \sum t_e \varphi(e),$$

zwischen den geometrischen Realisierungen.

Somit kann Δ als Funktor $\Delta\colon$ SimpKomp $\to$ Top von der Kategorie der Simplizialkomplexe in die Kategorie der topologischen Räume aufgefasst werden.

Beweis. Die Verknüpfung $E \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}F$ erweitert eindeutig zu einer linearen Abbildung $\mathbb{R}E \to \mathbb{R}F$. Diese ist explizit durch $\sum_{e\in E} t_e e \mapsto \sum_{e\in E} t_e \varphi(e) = \sum_{f\in F}(\sum_{e\in\varphi^{-1}(f)} t_e) f$ gegeben (endliche Summen). Sie bildet die Menge $\Delta(\mathcal{K})$ nach $\Delta(\mathcal{L})$ ab und liefert so die gesuchte Abbildung $\Delta(\varphi)$ von Mengen. Um zu zeigen, dass letztere stetig ist, betrachte man für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$ das offensichtliche kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\Delta(\varphi)} & \Delta(\mathcal{L}) \\ \cup & & \cup \\ \Delta(\sigma) & \longrightarrow & \Delta(\varphi(\sigma)) \end{array}$$

(seine untere Horizontale ist wohldefiniert und surjektiv). Die rechte Inklusion ist stetig, da sie eine der Abbildungen ist, die die Topologie auf $\Delta(\mathcal{L})$ definieren. Die untere Horizontale ist offensichtlich stetig, da sie von der offensichtlichen linearen Abbildung $\mathbb{R}\sigma \to \mathbb{R}\varphi(\sigma)$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen herkommt. Damit ist die Abbildung $\Delta(\sigma) \to \Delta(\mathcal{L})$ stetig. Da $\sigma \in \mathcal{K}$ beliebig war, bedeutet dies nach der universellen Eigenschaft der Finaltopologie ([Sch20, Satz 2.8.35], dass $\Delta(\varphi)$ stetig ist. □

2.4. **Simpliziale Homologie.**

2.4.1. In diesem Kapitel definieren wir auf rein kombinatorische Weise die *simpliziale Homologie* eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$; dazu wird die geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ nicht benötigt. Später werden wir jedoch zeigen, dass die simpliziale Homologie von $\mathcal{K}$ mit der singulären Homologie von $\Delta(\mathcal{K})$ übereinstimmt (Satz 4.8.11).

Erinnerung 2.4.2 (freier R-Modul; Analogon zu Erinnerung 2.2.1 mit $\mathbb{R}$-*Vektorraum* alias $\mathbb{R}$-*Modul* ersetzt durch R-*Modul*). Sei R ein beliebiger Ring (etwa $\mathbb{Z}$). Ist E eine Menge, so bezeichnen wir mit RE den R-Modul aller Abbildungen $f\colon E \to R$ mit endlichem Träger. Ähnlich wie in Erinnerung 2.2.1 fassen wir E als Teilmenge von RE auf und können dann jedes Element von RE als R-Linearkombinationen $\sum_{e\in E} a_e e$ mit $a_e \in R$ schreiben (vgl. Fußnote 4). Hier bei sind die Koeffizienten $a_e \in R$ eindeutig bestimmt – mit anderen Worten bildet E eine R-Basis von RE.

Morphismen von R-Moduln (alias R-lineare Abbildungen) $RE \to M$ in einen beliebigen R-Modul M sind eindeutig durch ihre Einschränkung auf $E \subset RE$ bestimmt und definierbar, in Formeln definiert Restriktion eine Bijektion

$$\mathrm{Mod}_R(RE, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Set}(E, M). \tag{2.4.1}$$

Man nennt RE (zusammen mit $E \subset RE$) den **freien R-Modul über** E. Die obige Bijektion kodiert seine universelle Eigenschaft.

Speziell für $R = \mathbb{Z}$ erhält man den freien $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}E$ über E. Dieser wird meist **freie abelsche Gruppe über** E genannt, denn $\mathbb{Z}$-Moduln sind dasselbe wie abelsche Gruppen und $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen sind dasselbe wie Morphismen abelscher Gruppen (= Homomorphismen abelscher Gruppen); mit anderen Worten stimmen die Kategorien Ab der abelschen Gruppen und $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ der $\mathbb{Z}$-Moduln überein, in Formeln $\mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

Beispiel 2.4.3. Jedes Element der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}\{a, b, c\}$ kann eindeutig als $xa + yb + zc$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden. Wer mag, kann dies auch als $x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c}$ schreiben, also allgemein die Inklusion $E \subset \mathbb{Z}E$ als $e \mapsto \underline{e}$ schreiben. Insbesondere ist solch eine Notation nötig, wenn man etwa die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}V$ über einem Vektorraum V betrachtet, denn sonst ist nicht klar, ob $3v$ als $3.v = v+v+v$ (Skalarmultiplikation bzw. Addition in der abelschen Gruppe V) oder als $3\underline{v}$ zu verstehen ist.

Definition 2.4.4. Sei $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Sei $\leq$ eine Ordnung (= totale Ordnung) auf der Eckenmenge E (ist E endlich, so kann man sich die Ecken von 1 bis $n := |E|$ durchnummeriert vorstellen).[11]

Sei $q \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} &:= \big\{ s\colon \{0, \dots, q\} \to E \text{ streng monoton} \mid (\operatorname{im} s) \in \mathcal{K} \big\} \\ &= \big\{ (s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid s_0 < s_1 < \cdots < s_q \text{ und } \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}_q \big\}. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

[12] Für $q < 0$ setzen wir $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} := \varnothing$.

Sei $q \geq 1$. Der eindeutige Morphismus

$$\partial = \partial_q = \partial_q^{\text{st-mono}}\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\text{st-mono}}$$

abelscher Gruppen zwischen den freien abelschen Gruppen über den Mengen der „streng monotonen“ q-Simplizes bzw. $(q-1)$-Simplizes mit

$$\partial((s_0, \dots, s_q)) = \sum_{0\leq i\leq q} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \tag{2.4.3}$$

[11] Statt mit einer Ordnung könnten wir auch mit einer partiellen Ordnung, die auf jedem Simplex von $\mathcal{K}$ zu einer (totalen) Ordnung restringiert, arbeiten.

[12] Die Zuordnung $(s_0, \dots, s_q) \mapsto \{s_0, \dots, s_q\}$ liefert eine Bijektion $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_q$, denn für jedes $\sigma \in \mathcal{K}_q$ gibt es Elemente $s_0, \dots, s_q \in E$ mit $\sigma = \{s_0, \dots, s_q\}$, welche eindeutig bestimmt sind, wenn wir zusätzlich $s_0 < s_1 < \cdots < s_q$ verlangen.

für alle $(s_0,\dots,s_q)\in\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$ heißt **q-ter Randoperator zur Eckenordnung** $\leq$, wobei das Hütchen als Tarnkappe über s_i andeutet, dass dieses Element weggelassen wird.

Für $q\leq 0$ sei $\partial=\partial_q^{\text{st-mono}}:=0\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}\to\mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\text{st-mono}}=\mathbb{Z}\varnothing=\{0\}$ die Nullabbildung.

2.4.5. In Appendix B sind einige Grundbegriffe der homologischen Algebra erklärt, die wir im Folgenden verwenden. Vom Leser wird erwartet, dass er diesen Appendix soweit nötig parallel zum aktuellen Abschnitt liest. Beim ersten Lesen empfohlen wir, sich auf den Fall $R=\mathbb{Z}$ und somit $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})=\mathrm{Ab}$ zu beschränken. Zur Erleichterung des parallelen Lesens versuchen wir, beim ersten Auftreten jedes homologischen Begriffs im aktuellen Abschnitt einen Verweis auf die entsprechende Stelle im Appendix anzugeben.

Wir hoffen, dass diese Trennung algebraischer und topologischer Begriffe strukturelle Klarheit schafft. Historisch gesehen sind viele Begriffe aus der homologischen Algebra (*Zykel*, *Rand*, *Homotopie*, ...) topologisch motiviert.

Proposition 2.4.6. *Sei $(E,\mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex und sei $\leq$ eine Ordnung auf E. Dann ist das Diagramm*

$$\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}:=(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}},\partial):=\Big(\dots\to\mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{st-mono}}\xrightarrow{\partial_2}\mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}}\xrightarrow{\partial_1}\mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}\xrightarrow{\partial_0=0}\underbrace{\mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}}_{=\{0\}}\to\dots\Big)\tag{2.4.4}$$

ein Komplex abelscher Gruppen (= Komplex von $\mathbb{Z}$-Moduln) im Sinne der Definition B.1.1.

2.4.7. Proposition 2.4.6 besagt, dass jeder Simplizialkomplex zusammen mit einer Ordnung auf der Eckenmenge einen Komplex abelscher Gruppen liefert. Auch wenn hier zweimal das Wort *Komplex* auftaucht, sind die mathematischen Bedeutungen grundverschieden.

Beweis. Zu zeigen ist $\partial\circ\partial=0$ oder genauer $\partial_{q-1}^{\text{st-mono}}\circ\partial_q^{\text{st-mono}}=0$ für alle $q\in\mathbb{Z}$. Für $q\leq 1$ ist dies trivial. Gelte $q\geq 2$. Sei $\sigma=(s_0,\dots,s_q)\in\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$ beliebig. Wegen der universellen Eigenschaft freier abelscher Gruppen genügt es,

$$\partial(\partial(\sigma))=0$$

zu zeigen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\partial(\partial(\sigma))&=\partial\left(\sum_{0\leq i\leq q}(-1)^i(s_0,\dots,\widehat{s_i},\dots,s_q)\right)\\&=\sum_{0\leq i\leq q}(-1)^i\partial((s_0,\dots,\widehat{s_i},\dots,s_q))\\&=\sum_{0\leq i\leq q}(-1)^i\Big(\sum_{0\leq j<i}(-1)^j(s_0,\dots,\widehat{s_j},\dots,\widehat{s_i},\dots,s_q)\\&\qquad\qquad+\sum_{i<j\leq q}(-1)^{j-1}(s_0,\dots,\widehat{s_i},\dots,\widehat{s_j},\dots,s_q)\Big)\\&=\sum_{0\leq j<i\leq q}(-1)^{i+j}(s_0,\dots,\widehat{s_j},\dots,\widehat{s_i},\dots,s_q)\\&\quad+\sum_{0\leq i<j\leq q}(-1)^{i+j-1}(s_0,\dots,\widehat{s_i},\dots,\widehat{s_j},\dots,s_q)\Big)\\&=0.\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

□

Beispiel 2.4.8. Betrachte den Simplizialkomplex $(E,\mathcal{K})$ mit Ecken $1,2,3$ und 1-Simplizes $\{2,3\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2\}$ und 0-Simplizes $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ (und keinen weiteren Simplizes). (Seine geometrische Realisierung ist homöomorph zum Rand eines Dreiecks, also zu $\mathbb{S}^1$.) Nimm die offensichtliche Ordnung auf $E=\{1,2,3\}$. Der Komplex $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ lebt dann nur in den Graden 1, 0 und ist somit durch die beiden Komponenten in

diesen Graden und das sie verbindende Differential

$$\begin{aligned}(2.4.6)\qquad \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}} = \mathbb{Z}(2,3)\oplus\mathbb{Z}(1,3)\oplus\mathbb{Z}(1,2) &\xrightarrow{\partial_1^{\text{st-mono}}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}} = \mathbb{Z}(1)\oplus\mathbb{Z}(2)\oplus\mathbb{Z}(3),\\ (2,3)&\mapsto (3)-(2),\\ (1,3)&\mapsto (3)-(1),\\ (1,2)&\mapsto (2)-(1),\end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.

2.4.9. Die Wahl der Ordnung $\leq$ in Definition 2.4.4 ist etwas unbefriedigend und lässt sich in der Tat vermeiden, wie wir in Proposition 2.4.21 sehen werden.

Ende der 3. Vorlesung am 05.11.2020.

Definition 2.4.10. Sei $(E,\mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Für $q\geq 0$ setzen wir[13]

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} &:= \big\{s\colon \{0,\dots,q\}\to E \text{ injektiv} \mid (\operatorname{im} s)\in\mathcal{K}\big\}\\ &= \big\{s\colon \{0,\dots,q\}\to E \mid (\operatorname{im} s)\in\mathcal{K}_q\big\}\\ &= \big\{(s_0,\dots,s_q)\in E^{q+1} \mid \{s_0,\dots,s_q\}\in\mathcal{K}_q\big\}.\end{aligned}$$

Elemente dieser Menge heißen **angeordnete q-Simplizes**.[14] Definiere

$$\begin{aligned}(2.4.7)\qquad \mathrm{S}_q\mathcal{K} &:= \frac{\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}}}{\Big\langle s\circ\pi-\operatorname{sgn}(\pi)s \mid s\in\mathcal{K}_q^{\text{ang}},\ \pi\in\operatorname{Sym}(\{0,\dots,q\})\Big\rangle}\\ &= \frac{\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}}}{\Big\langle (s_{\pi(0)},\dots s_{\pi(q)})=\operatorname{sgn}(\pi)(s_0,\dots,s_q) \mid (s_0,\dots,s_q)\in\mathcal{K}_q^{\text{ang}},\ \pi\in\operatorname{Sym}(\{0,\dots,q\})\Big\rangle}\end{aligned}$$

als Quotient der freien abelschen Gruppe über allen angeordneten q-Simplizes modulo der angegebenen Relation: Zwei angeordnete Simplizes, die sich nur in der Reihenfolge der Ecken um eine Permutation π unterscheiden, werden bis auf den Faktor $\operatorname{sgn}(\pi)\in\{\pm 1\}$ miteinander identifiziert.

Die (abelsche) Gruppe $\mathrm{S}_q\mathcal{K}$ heißt die (abelsche) **Gruppe der q-Simplizialketten von $\mathcal{K}$**.

Für $q<0$ setze $\mathrm{S}_q\mathcal{K} := \{0\}$.

2.4.11. Erkläre angeordnete Simplizes durch Bilder (0-Simplizes als Punkte, 1-Simplizes als Segmente mit Richtung, 2-Simplizes als Dreieck mit Pfeil, der die Anordnung wiedergibt, 3-Simplizes ähnlich).

Dann erkläre Relation: 2-Simplex $\{a,b,c\}\in\mathcal{K}_2$ liefert 6 angeordnete 2-Simplizes (a,b,c), (b,c,a), (c,a,b), (a,c,b), (b,a,c), (c,b,a).

Die ersten drei werden gleich in $\mathrm{S}_3\mathcal{K}$, ebenso die letzten drei: Dort gilt $(a,b,c)=(b,c,a)=(c,a,b)=-(a,c,b)=-(b,a,c)=-(c,b,a)$. Wer mag, kann dies genauer als $\overline{(a,b,c)}=\overline{(b,c,a)}=\ldots=-\overline{(c,b,a)}$ schreiben.

Veranschauliche durch Dreieck mit kreisförmigen Pfeil; zwei Drehsinne, unterscheiden sich um Vorzeichen.

Beispiel 2.4.12. Für den Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ aus Beispiel 2.4.8 gilt

$$\mathrm{S}_1\mathcal{K} = \frac{\mathbb{Z}(2,3)\oplus\mathbb{Z}(3,2)\oplus\mathbb{Z}(1,3)\oplus\mathbb{Z}(3,1)\oplus\mathbb{Z}(1,2)\oplus\mathbb{Z}(2,1)}{\langle (2,3)=-(3,2),(1,3)=-(3,1),(1,2)=-(2,1)\rangle} = \mathbb{Z}\overline{(2,3)}\oplus\mathbb{Z}\overline{(1,3)}\oplus\mathbb{Z}\overline{(1,2)},$$

was so wie $\mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}}$ aussieht (jedoch brauchen wir nun keine Ordnung auf E).

2.4.13. Eine q-Simplizialkette ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination angeordneter Simplizes modulo der Relationen, die wir herausgeteilt haben.

Der Begriff *Kette* kommt vermutlich daher, dass eine Kombination mehrerer (orientierter) Segmente alias (angeordneter) 1-Simplizes (oder genauer deren geometrischer Realisierungen) ein kettenähnliches Gebilde im üblichen Sprachgebrauch ergibt.

---

[13] Im Hinblick auf meine spätere Notation $\mathcal{K}_q^{\text{bel}}$ und die bereits verwendete Notation $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$ wäre hier eigentlich $\mathcal{K}_q^{\text{inj}}$ angebracht!

[14] Die Abbildung $\mathcal{K}_q^{\text{ang}}\to\mathcal{K}_q$, $s=(s_0,\dots,s_q)\mapsto(\operatorname{im} s)=\{s_0,\dots,s_q\}$, vergisst die Anordnung.

2.4.14. Allgemeiner gilt für je zwei angeordnete q-Simplizes $s, t \in \mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}}$ mit $(\operatorname{im} s) = (\operatorname{im} t)$ im Quotienten $\mathrm{S}_q\mathcal{K}$ (entweder) $s = t$ oder $s = -t$. Im Fall $q = 0$ gilt für solche Simplizes stets $s = t$.

Proposition 2.4.15. *Sei $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex.*

(a) Sei $q \geq 1$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}} &\to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\mathrm{ang}}, \\ (s_0, \dots, s_q) &\mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

erweitert eindeutig zu einem Morphismus $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\mathrm{ang}}$ abelscher Gruppen und induziert weiter einen Morphismus

$$\partial = \partial_q \colon \mathrm{S}_q\mathcal{K} \to \mathrm{S}_{q-1}\mathcal{K} \tag{2.4.9}$$

*abelscher Gruppen, den sogenannten **Randoperator**.*

(b) Das Diagramm

$$\mathrm{S}\mathcal{K} = (\mathrm{S}\mathcal{K}, \partial) := \Big(\dots \to \mathrm{S}_2\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{S}_1\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{S}_0\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_0} \underbrace{\mathrm{S}_{-1}\mathcal{K}}_{=\{0\}} \xrightarrow{\partial_{-1}} \underbrace{\mathrm{S}_{-2}\mathcal{K}}_{=\{0\}} \to \dots \Big) \tag{2.4.10}$$

*ist ein Komplex abelscher Gruppen, wobei $\partial_q := 0$ für alle $q \leq 0$ gilt. Dieser Komplex heißt **Komplex der Simplizialketten**.*

2.4.16. Erkläre Randoperator bildlich: Dreieck mit Uhrzeiger-Drehsinn bzw. Dreieck mit Gegenuhrzeigerdrehsinn werden auf die Kette ... bzw. deren Negatives abgebildet.

Gibt auch gleich Beispiel für Zykel: orientierter Dreiecksrand und illustriert damit $\partial^2 = 0$.

Beweis. (a) Da die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(\{0, \dots, q\})$ von den Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass sich die Bilder von $(s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q)$ und $(s_0, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, s_q)$ unter der Verknüpfung $\mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}} \xrightarrow{(2.4.8)} \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}} \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q\mathcal{K}$ um den Faktor (-1) unterscheiden; dabei ist $j \in \{0, \dots, q-1\}$ beliebig. Das Bild von $(s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q)$ ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q) + (-1)^j (s_0, \dots, \widehat{s}_j, s_{j+1}, \dots, s_q) + (-1)^{j+1} (s_0, \dots, s_j, \widehat{s}_{j+1}, \dots, s_q) \\ + \sum_{j+1 < i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \end{aligned}$$

und das von $(s_0, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, s_q)$ ist (in der folgenden Gleichung wird im zweiten Summanden „nichts vertauscht“, denn s_{j+1} ist ja schon weg – analog im dritten Summanden)

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq i < j} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, s_q) + (-1)^j (s_0, \dots, \widehat{s}_{j+1}, s_j, \dots, s_q) + (-1)^{j+1} (s_0, \dots, s_{j+1}, \widehat{s}_j, \dots, s_q) \\ &\qquad + \sum_{j+1 < i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \\ &= - \sum_{0 \leq i < j} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q) - (-1)^{j+1} (s_0, \dots, s_j, \widehat{s}_{j+1}, \dots, s_q) - (-1)^j (s_0, \dots, \widehat{s}_j, s_{j+1}, \dots, s_q) \\ &\qquad - \sum_{j+1 < i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q). \end{aligned}$$

(b) Zu zeigen ist $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Die Rechnung (2.4.5) zeigt aber sogar, dass jede Verknüpfung $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\mathrm{ang}} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-2}^{\mathrm{ang}}$ Null ist. □

Definition 2.4.17. Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Indem wir Definition B.1.5 auf den Komplex $\mathrm{S}\mathcal{K} = (\mathrm{S}\mathcal{K}, \partial)$ der Simplizialketten anwenden, erhalten wir diverse abelsche Gruppen. Wir nennen

- $\mathrm{Z}_q\mathcal{K} := \mathrm{Z}_q(\mathrm{S}\mathcal{K}) = \mathrm{Z}_q(\mathrm{S}\mathcal{K}, \partial) = \ker(\partial_q \colon \mathrm{S}_q\mathcal{K} \to \mathrm{S}_{q-1}\mathcal{K})$ die (abelsche) Gruppe der **q-Simplizialzykel**;

- $\mathrm{B}_q\mathcal{K} := \mathrm{B}_q(\mathrm{S}\mathcal{K}) = \mathrm{B}_q(\mathrm{S}\mathcal{K}, \partial) = \mathrm{im}(\partial_{q+1}\colon \mathrm{S}_{q+1}\mathcal{K} \to \mathrm{S}_q\mathcal{K})$ die (abelsche) Gruppe der **q-Simplizialränder** (englisch *boundaries*);
- $\mathrm{H}_q\mathcal{K} := \mathrm{H}_q(\mathrm{S}\mathcal{K}, \partial) = \mathrm{H}_q(\mathrm{S}\mathcal{K}) = \frac{\mathrm{Z}_q\mathcal{K}}{\mathrm{B}_q\mathcal{K}} = \mathrm{Z}_q\mathcal{K}/\mathrm{B}_q\mathcal{K}$ die **q-te simpliziale Homologie(gruppe)** (ebenfalls eine abelsche Gruppe).

2.4.18. Wir verwenden dasselbe Symbol H_q (manchmal mit, manchmal ohne Klammern) sowohl für die q-te Homologie $\mathrm{H}_q A = \mathrm{H}_q(A)$ eines Komplexes abelscher Gruppen A als auch für die q-te simpliziale Homologie $\mathrm{H}_q\mathcal{K} = \mathrm{H}_q(\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes und hoffen, dass dies nie zu Missverständnissen führt.

Beispiel 2.4.19. Male Beispiele: Rand einer 1-Kette. Schließe Kette: wird Zykel.
Male zwei homologe Zykel.

2.4.20. Der Leser mag sich fragen, ob zwei Simplizialkomplexe mit homöomorpher geometrischer Realisierung isomorphe simpliziale Homologie haben. Dies ist in der Tat der Fall, siehe 4.8.15.

Proposition 2.4.21. *Sei $(E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Ist $\leq$ eine Ordnung auf E, so ist der offensichtliche (und im Beweis erklärte) Morphismus ein Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}\mathcal{K} \tag{2.4.11}$$

in der Kategorie $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ *(siehe Definition B.1.10).*
Insbesondere induziert dieser Isomorphismus Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\mathcal{K}) \tag{2.4.12}$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$, wir können also die simpliziale Homologie mit Hilfe des Komplexes $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ ausrechnen.

Beweis. Sei $q \geq 0$. Die Inklusion $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathcal{K}_q^{\text{ang}}$ erweitert zu einem (injektiven) Gruppenmorphismus $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}}$. Sei b_q die Verknüpfung

$$b_q\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q\mathcal{K}. \tag{2.4.13}$$

Für $q < 0$ definieren wir $b_q := 0$ und erhalten das offensichtlich kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\partial_2^{\text{st-mono}}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\partial_1^{\text{st-mono}}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\partial_0^{\text{st-mono}}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}^{\text{st-mono}} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle b_2} & & \downarrow{\scriptstyle b_1} & & \downarrow{\scriptstyle b_0} & & \downarrow{\scriptstyle b_{-1}} & & \\
\dots & \longrightarrow & \mathrm{S}_2\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial_2} & \mathrm{S}_1\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial_1} & \mathrm{S}_0\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial_0} & \mathrm{S}_{-1}\mathcal{K} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

in Ab. Dieses Diagramm definiert den Morphismus (2.4.11). Um zu zeigen, dass er ein Isomorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass alle b_q Isomorphismen sind (vgl. B.1.12), was für $q < 0$ trivial ist.

Der Leser prüft aber leicht, dass der Gruppenmorphismus[15]

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} &\to \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}, \\
(t_0, \dots, t_q) &\mapsto \mathrm{sgn}(\rho)(t_{\rho(0)}, \dots, t_{\rho(q)}) \\
&\qquad \text{für die eindeutige Permutation } \rho \in \mathrm{Sym}(\{0, \dots, q\}) \text{ mit } t_{\rho(0)} < \dots < t_{\rho(q)},
\end{aligned}$$

für $q \geq 0$ einen Morphismus $\mathrm{S}_q\mathcal{K} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_q$ abelscher Gruppen induziert, welcher invers zu b_q ist.

Die letzte Aussage ist klar nach Lemma B.1.13, da H_q wie jeder Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet. □

2.4.22. Sei $\leq$ eine Ordnung auf E. Die gerade bewiesene Aussage, dass (2.4.13) ein Isomorphismus ist, besagt in anderen Worten, dass $\mathrm{S}_q\mathcal{K}$ eine freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\big((s_0, \dots, s_q)\big)_{(s_0,\dots,s_q)\in\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}}$ ist. Diese $\mathbb{Z}$-Basis besteht aus $|\mathcal{K}_q| = |\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}|$ Elementen (siehe Fußnote 12) Der Ausdruck für das Differential eines solchen Basiselements bezüglich der entsprechenden Basis von $\mathrm{S}_{q-1}\mathcal{K}$ ist durch (2.4.8) gegeben.

[15] Auch wenn wir hier und in ähnlichen Situationen den Wert eines bei einer freien abelschen Gruppe startenden Gruppenmorphismus nur auf den Erzeugern angeben, verwenden wir implizit die universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppe und meinen die offensichtliche $\mathbb{Z}$-lineare Erweiterung.

Statt eine Ordnung auf E zu verwenden, können wir auch so vorgehen. Für jeden q-Simplex σ fixieren wir ein beliebiges $(q+1)$-Tupel $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_0, \dots, \sigma_q)$ mit $\sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_q\}$ und fassen $\overrightarrow{\sigma}$ als Element von $\mathrm{S}_q\mathcal{K}$ auf. Dann ist $(\overrightarrow{\sigma})_{\sigma \in \mathcal{K}_q}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{S}_q\mathcal{K}$, denn diese Basiselemente stimmen mit den zuvor erklärten Basiselementen jeweils bis auf einen Faktor ± 1 überein (vgl. 2.4.14).

Beispiel 2.4.23 (Fortsetzung von Beispiel 2.4.8)**.** Wir berechnen die simpliziale Homologie des Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$ aus Beispiel 2.4.8. Nach 2.4.22 ist sie die Homologie des folgenden, in den Graden Null und Eins konzentrierten Komplexes (vgl. (2.4.6))

$$\dots \to 0 \to \mathbb{Z}(2,3) \oplus \mathbb{Z}(1,3) \oplus \mathbb{Z}(1,2) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}(1) \oplus \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(3) \to 0 \to \dots \tag{2.4.14}$$
$$(2,3) \mapsto (3) - (2),$$
$$(1,3) \mapsto (3) - (1),$$
$$(1,2) \mapsto (2) - (1).$$

Wir erhalten daraus

$$\mathrm{H}_p(\mathcal{K}) = \begin{cases} \ker(\partial_1) & \text{falls } p = 1, \\ \operatorname{cok}(\partial_1) & \text{falls } p = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Per Rechnung erhält man $\mathrm{H}_1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\big((2,3) - (1,3) + (1,2)\big) \cong \mathbb{Z}$ und $\mathrm{H}_0(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ induziert vom Aufsummieren $a(1) + b(2) + c(3) \mapsto a + b + c$.

Aufgabe 2.4.24 (Simpliziale Homologie des Randes eines Quadrats)**.** Berechne die simpliziale Homologie des folgenden Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$, dessen geometrische Realisierung der Rand eines Quadrats ist. Die Eckenmenge ist $E := \{a, b, c, d\}$, die Simplexmenge besteht aus den vier 1-Simplizes $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$, $\{d, a\}$ (alias Seiten des Quadrats) und allen nichtleeren Teilmengen dieser Simplizes.

Aufgabe 2.4.25 (Simpliziale Homologie des Kantengebildes eines Tetraeders)**.** Berechne die simpliziale Homologie des folgenden Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$, dessen geometrische Realisierung das Kantengerüst eines Tetraeders ist. Die Eckenmenge ist $E := \{a, b, c, d\}$, die Simplexmenge besteht aus den sechs 1-Simplizes $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ (alias Kanten des Tetraeders) und allen einelementigen Teilmengen von E.

Aufgabe 2.4.26. Berechne die simpliziale Homologie des folgenden Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$, dessen geometrische Realisierung die Oberfläche eines Tetraeders ist, an den in einem Eckpunkt der Rand eines Dreiecks angeklebt ist - sie ist also homömorph zur Verklebung der Kugelschale $\mathbb{S}^2$ und der Kreislinie $\mathbb{S}^1$ in einem Punkt. Die Eckenmenge ist $E := \{a, b, c, d, e, f\}$, die Simplexmenge besteht aus den vier 2-Simplizes $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c\}$ (alias Seiten des Tetraeders), den 1-Simplizes $\{e, f\}$, $\{a, f\}$, $\{a, e\}$ (alias Seiten des Dreiecks) und allen nichtleeren Teilmengen dieser Simplizes.

Aufgabe 2.4.27 (Funktorialität der simplizialen Homologie)**.** Sei $f\colon (E, \mathcal{K}) \to (F, \mathcal{L})$ eine simpliziale Abbildung. Die Abbildungen

$$\mathrm{S}_q f\colon \mathrm{S}_q\mathcal{K} \to \mathrm{S}_q\mathcal{L}, \tag{2.4.15}$$
$$s = (s_0, \dots, s_q) \mapsto \begin{cases} f \circ s = (f(s_0), \dots, f(s_q)) & \text{falls } f(\{s_0, \dots, s_q\}) = \{f(s_0), \dots, f(s_q)\} \in \mathcal{L}_q \\ & \text{(äquivalent: } f \circ s \text{ injektiv)}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $q \in \mathbb{Z}$, sind wohldefiniert und liefern einen Morphismus

$$\mathrm{S}f := (\mathrm{S}_q f)_{q \in \mathbb{Z}}\colon \mathrm{S}\mathcal{K} \to \mathrm{S}\mathcal{L} \tag{2.4.16}$$

von Komplexen.[16]

[16] Man kann $\mathrm{S}f$ natürlich nach Wahl von Ordnungen auf E und F mit Hilfe der Isomorphismen aus Proposition 2.4.21 in einen Morphismus $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \to \mathbb{Z}\mathcal{L}^{\text{st-mono}}$ übersetzen, jedoch ist die komponentenweise Definition dieses Morphismus ziemlich hässlich. Konzeptuell ist es also vorteilhaft, mit $\mathrm{S}\mathcal{K}$ statt $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ zu arbeiten. (Der potentielle Ausweg, nur „ordnungserhaltende“ simpliziale Abbildungen zu betrachten, ist zu restriktiv; nur für Inklusionen von Unterkomplexen scheint er sinnvoll.)

Damit wird S zu einem Funktor $\mathrm{S}\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$. Weiter wird $\mathrm{H}_q\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Ab}$ zu einem Funktor, für jedes $q \in \mathbb{Z}$ (nach Lemma B.1.13).

Ende der 4. Vorlesung am 06.11.2020.
Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 2.4.24
(2) Aufgabe 2.4.25
(3) Aufgabe B.1.14 (bei handschriftlicher Lösung bitte $f\colon A \to C$ schreiben...)
(4) Aufgabe 2.4.27

2.4.28. Die simpliziale Homologie eines endlichen Simplizialkomplexes kann algorithmisch berechnet werden (siehe [Mun84, Theorem 11.5]).

Lemma 2.4.29. *Seien $(E, \leq)$ eine nichtleere geordnete Menge und $\mathcal{K}$ der maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge E (siehe 2.1.9). Dann ist*

$$\ldots \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots \tag{2.4.17}$$

ein azyklischer (siehe Definition B.1.8) Komplex,[17] *wobei ∂_0 durch Aufsummieren $\sum a_e(e) = \sum a_e e \mapsto \sum a_e$ der Koeffizienten definiert ist und $\partial_q = \partial_q^{\text{st-mono}}$ für alle $q > 0$ gilt.*

Beweis. Das Diagramm (2.4.17) ist ein Komplex, denn es ist eine Variation des Komplexes $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ aus Proposition 2.4.6 (nur die Komponente im Grad -1 samt der dort ein- und ausgehenden Pfeile wurde verändert) und die Gleichheit $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$ ist klar.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass E endlich ist, denn ist die Aussage in diesem Fall gezeigt, so folgt sofort allgemein, dass jeder Zykel ein Rand ist (denn jeder Zykel ist eine Linearkombination endlich vieler Simplizes, deren Ecken eine endliche Teilmenge von E bilden (falls diese leer ist, ist unser Zykel Null und sicherlich ein Rand)). Sei v das unter dieser Annahme existierende kleinste Element von E. Für $q \geq 0$ definiere

$$\delta = \delta_q\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\text{st-mono}}, \tag{2.4.18}$$
$$(v_0, \ldots, v_q) \mapsto \begin{cases} (v, v_0, \ldots, v_q) & \text{falls } v \neq v_0 \text{ (oder äquivalent } v < v_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere $\delta_{-1}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}$ durch $\delta_{-1}(n) := n(v)$ und $\delta_q := 0$ für $q < -1$.

Wir behaupten für jedes $q \in \mathbb{Z}$ die Gleichheit

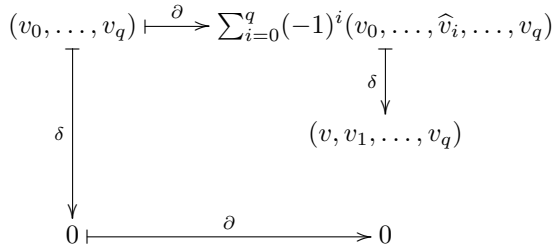
$$\partial\delta + \delta\partial = \mathrm{id} \qquad \text{oder genauer} \qquad \partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}}. \tag{2.4.19}$$

Für $q < -1$ ist das trivial und für $q = -1$ eine einfache Rechnung. Für $q \geq 0$ verifiziert man dies, indem man für beliebiges $(v_0, \ldots, v_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$ im Fall $v \neq v_0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (v_0, \ldots, v_q) & \xmapsto{\partial} & \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ (v, v_0, \ldots, v_q) & \xmapsto{\partial} & (v_0, \ldots, v_q) - \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (v, v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q) \end{array}$$

[17] Er ist sogar nullhomotop (siehe Definition B.2.4): Unser Beweis zeigt dies im Fall $|E| < \infty$ (vgl. Fußnote 18); sonst modifiziere man den Beweis etwas (siehe Aufgabe 2.4.32) oder verwende das später bewiesene Hauptlemma der homologischen Algebra 7.1.5.

und im Fall $v = v_0$ das Diagramm



betrachtet

Ist nun z ein beliebiger q-Zykel unseres Komplexes, so gilt

$$z = \partial(\delta(z)) + \delta(\partial(z)) = \partial(\delta(z))$$

was bedeutet, dass z der Rand von $\delta(z)$ ist.[18] □

2.4.30. Die beiden folgenden Varianten von Lemma 2.4.29, in denen *streng monoton* durch *beliebig* bzw. *monoton* ersetzt wird (die Menge $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$ wird durch $\mathcal{K}_q^{\text{bel}}$ bzw. $\mathcal{K}_q^{\text{mono}}$ ersetzt), werden ähnlich bewiesen (siehe Beweis unten).

Seien E eine nichtleere Menge und $\mathcal{K}$ der maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge E.

(a) Sei $q \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren (vgl. (2.4.2))

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} &:= \big\{s\colon \{0, \dots, q\} \to E \text{ beliebige Abbildung} \mid (\operatorname{im} s) \in \mathcal{K}\big\} \\ &= \big\{(s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}\big\}.\end{aligned}$$

[19]Dann ist

$$\dots \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0 \to \dots$$

ein azyklischer Komplex, wobei ∂_q für $q \geq 1$ durch $\partial_q(v_0, \dots, v_q) = \sum_{0 \leq i \leq q}(-1)^i(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_q)$ definiert ist, ∂_0 das Aufsummieren der Koeffizienten ist und alle anderen Abbildungen Null sind.

(b) Sei $\leq$ eine Ordnung auf E. Sei $q \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_q^{\text{mono}} &:= \big\{s\colon \{0, \dots, q\} \to E \text{ monotone Abbildung} \mid (\operatorname{im} s) \in \mathcal{K}\big\} \\ &= \big\{(s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid s_0 \leq \dots \leq s_q \text{ und } \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}\big\}.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\dots \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{mono}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{mono}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{mono}} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0 \to \dots$$

ein azyklischer Komplex, wobei ∂_q für $q \geq 1$ durch $\partial_q(v_0, \dots, v_q) = \sum_{0 \leq i \leq q}(-1)^i(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_q)$ definiert ist, ∂_0 das Aufsummieren der Koeffizienten ist und alle anderen Abbildungen Null sind.[20]

Beweis. Der Beweis beider Varianten geht analog zum Beweis von Lemma 2.4.29 und ist sogar etwas einfacher: Der einzige Unterschied ist, dass wir δ_q nun statt durch (2.4.18) einfacher durch

$$\delta_q(v_0, \dots, v_q) := (v, v_0, \dots, v_q)$$

definieren (wobei E endlich ist und v das kleinste Element von E ist). □

Korollar 2.4.31. *Sei E eine nichtleere Menge und $\mathcal{K}$ der maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge E.*

(a) ***Simpliziale Homologie eines maximalen Simplizialkomplexes*** *(dessen geometrische Realisierung ein voller Simplex ist, falls E endlich ist): Es gilt*

$$\mathrm{H}_q\mathcal{K} \cong \begin{cases}\mathbb{Z} & \textit{falls } q = 0, \\ 0 & \textit{sonst.}\end{cases}$$

[18] Die Gleichung (2.4.19) besagt, dass der Identitätsmorphismus des Komplexes (2.4.17) nullhomotop ist, was wiederum bedeutet, dass dieser Komplex nullhomotop ist (Definition B.2.10). Jeder nullhomotope Komplex ist azyklisch nach B.2.11.

[19]Beispielsweise darf $s_0 = \dots = s_q \in E$ gelten, dann ist $\{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}_0$.

[20]Die Komplexe in beiden Teilaufgaben sind sogar nullhomotop: Die Bemerkungen aus der Fußnote 17 in Lemma 2.4.29 gelten analog.

(b) ***Simpliziale Homologie eines maximalen Simplizialkomplexes ohne den topdimensionalen Simplex*** *(dessen geometrische Realisierung die Oberfläche eines vollen Simplex mit $|E|$ Ecken ist, welche homöomorph zur Sphäre $\mathbb{S}^{|E|-2}$ der Dimension $|E|-2$ ist): Sei E endlich mit $|E| \geq 3$ und sei $\mathcal{S} = \mathcal{K} \setminus \{E\}$. Dann gilt*

$$\mathrm{H}_q\mathcal{S} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = |E|-2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus dem Beweis folgt sofort: Gilt $E = \{v_0, \dots, v_n\}$ mit paarweise verschiedenen $v_0, \dots, v_n$, so gilt $\mathrm{H}_{|E|-2}\mathcal{S} = \mathrm{H}_{n-1}\mathcal{S} = \mathbb{Z}[\partial(v_0, \dots, v_n)]$.

(Der Leser mag sich selbst überlegen, was in den Fällen $|E| = 1, 2$ passiert; vgl. (4.5.1) in Korollar 4.7.7.)

Beweis. Wegen der Isomorphismen (2.4.12) aus Proposition 2.4.21 genügt es, nach Wahl einer Ordnung $\leq$ auf E die Homologien von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ und $\mathbb{Z}\mathcal{S}^{\text{st-mono}}$ auszurechnen.

Wir vergleichen den Komplex $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ mit dem azyklischen Komplex (2.4.17) aus Lemma 2.4.29. In nichtnegativen Graden stimmen beide Komplexe überein, so dass die positive Homologie von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ verschwindet. Die negative verschwindet eh. Exaktheit des Komplexes (2.4.17) in den Graden 0 und -1 zeigt, dass das ∂_0 dieses Komplexes einen Isomorphismus

$$\frac{\mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}}{\operatorname{im}\partial_1} = \frac{\mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}}{\ker\partial_0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

induziert. Die linke Seite ist aber die nullte Homologie von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$.

Analog vergleichen wir den Komplex $\mathbb{Z}\mathcal{S}^{\text{st-mono}}$ mit dem azyklischen Komplex (2.4.17). Sei $n := |E|$. Beachte, dass der „topdimensionale“ Simplex $E \in \mathcal{K}$ Dimension $n-1$ hat und in $\mathcal{S}$ fehlt. In den Graden $n, n-1, n-2, n-3 \geq 0$ sind der Komplex (2.4.17) durch

$$0 \to \mathbb{Z}E \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-2}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-3}^{\text{st-mono}}$$

und der Komplex $\mathbb{Z}\mathcal{S}^{\text{st-mono}}$ durch

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-2}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-3}^{\text{st-mono}}$$

gegeben. Der Rest des Beweises ist nun offensichtlich und dem Leser überlassen. □

Aufgabe 2.4.32 (Wie man im Beweis von Lemma 2.4.29 die Annahme, dass E endlich ist, vermeiden kann)**.** Im Setting von Lemma 2.4.29 sei $v \in E$ beliebig. Für $q \geq 0$ definiere

$$\delta = \delta_q \colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\text{st-mono}},$$

$$(v_0, \dots, v_q) \mapsto \begin{cases} (-1)^{t+1}(v_0, \dots, v_t, v, v_{t+1}, \dots, v_q) & \text{falls } v \notin \{v_0, \dots, v_q\}, \text{ wobei dann} \\ & t \in \{-1, \dots, q\} \text{ das eindeutige Element} \\ & \text{mit } v_t < v < v_{t+1} \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei im ersten Fall die Randfälle $v_{-1} < v$ und $v < v_{q+1}$ als wahr interpretiert werden, definiere $\delta = \delta_{-1} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}$, $1 \mapsto (v)$, und setze $\delta_q = 0$ für $q < -1$. Dann gilt $\partial\delta + \delta\partial = \mathrm{id}$.

(Lösung auskommentiert)

3. Singuläre Homologie

3.1. Definition der singulären Homologie und erste Resultate.

Definition 3.1.1. Sei $q \geq 0$. Sei $e_0, \dots, e_q$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^{q+1}$.[21] Der topologische Raum

$$\Delta_q := \operatorname{konv}(e_0, \dots, e_q) = \left\{(x_0, \dots, x_q) \mid \sum_{i=0}^{q} x_i = 1 \text{ und } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i\right\}$$

[21] Im aktuellen Kontext ist es üblich, die Koordinaten von 0 bis q zu nummerieren.

heißt der q**-te Standardsimplex**.

3.1.2. Als Menge ist der q-te Standardsimplex ein voller Simplex im Sinne der Definition 2.1.1.

Beispiel 3.1.3. Es ist $\Delta_0 = \{1\} \subset \mathbb{R}$ ein „nulldimensionaler“ Punkt (genauer eine einpunktige Menge), $\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$ ein „eindimensionales“ Geradensegment, $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^3$ ein „zweidimensionales“ Dreieck (samt seinem Inneren), $\Delta_3 \subset \mathbb{R}^4$ ein “dreidimensionaler“ gefüllter Tetraeder etc.

Definition 3.1.4. Seien X ein topologischer Raum und $q \geq 0$.

(a) Eine stetige Abbildung $\sigma\colon \Delta_q \to X$ heißt ein **singulärer q-Simplex von X**.

Wir erinnern daran, dass Top die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen ist. Insbesondere ist $\mathrm{Top}(\Delta_q, X)$ die Menge aller singulären Simplizes von X.

(b) Die freie abelsche Gruppe über der Menge aller singulären Simplizes von X wird als

$$\mathrm{S}_q X := \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X)$$

notiert. Ihre Elemente können in eindeutiger Weise als $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen $\sum_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} n_\sigma \sigma$ geschreiben werden und heißen **singuläre q-Ketten von X** (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$).

Definiere $\mathrm{S}_q X := \{0\}$ für alle $q < 0$.

Warnung 3.1.5. Das Wort *Simplex* ist begrifflich leider sehr überladen: volle Simplizes, Standardsimplizes, Simplizes in Simplizialkomplexen, singuläre Simplizes. Manchmal spricht man einfach von Simplizes und hofft, dass der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Art gemeint ist.

3.1.6. Außer der Stetigkeit wird keine Forderung an einen singulären Simplex σ gestellt. Beispielsweise mag σ nicht injektiv sein, oder sogar konstant (auch werden keinerlei Differenzierbarkeitsforderungen gestellt, was ja in diesem Kontext nicht möglich ist); daher rührt das Adjektiv *singulär*.

Beispiel 3.1.7. Singuläre Simplizes können sehr wild sein: Beispielsweise kann ein singulärer 1-Simplex von $\mathbb{R}^2$ als Bild durchaus das ganze Einheitsquadrat haben (vgl. [Wik20, Raumfüllende Kurve]).

Beispiel 3.1.8. Eine singuläre q-Kette von X ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination stetiger Abbildungen. Trotzdem male Bild einer singulären 1-Kette.

Beispiel 3.1.9. Die (abelsche) Gruppe $\mathrm{S}_q X$ ist im Allgemeinen riesig. Schon die offensichtliche Bijektion $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(\Delta_0, X)$, die einem Punkt x die konstante Abbildung $\Delta_0 = \{1\} \to X$, $1 \mapsto x$, zuordnet, induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}X \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_0 X.$$

Definition 3.1.10. Für $q \geq 1$ und $0 \leq i \leq q$ nenne das Einfügen einer Null an i-ter Position

$$\begin{aligned} k_i = k_i^q\colon \Delta_{q-1} &\to \Delta_q, \\ (x_0, \ldots, x_{q-1}) &\mapsto (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{q-1}) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

die **Inklusion der i-ten Seite** (oder **i-te Kanteninklusion**[22]). In den Extremfällen $i = 0$ und $i = q$ gelten also $k_0(x_0, \ldots, x_{q-1}) = (0, x_0, \ldots, x_{q-1})$ und $k_q(x_0, \ldots, x_{q-1}) = (x_0, \ldots, x_{q-1}, 0)$.

Definition 3.1.11. Definiere **Randoperatoren** $\partial = \partial_q = \partial_q^X\colon \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q-1} X$ wie folgt. Für $q \leq 0$ setze $\partial_q := 0$; für $q \geq 1$ sei ∂_q der eindeutige Gruppenmorphismus mit

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\, \sigma \circ k_i^q \tag{3.1.2}$$

für alle singulären q-Simplizes $\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X)$.

[22] Daher der Buchstabe k. Der Begriff *Kante* gefällt mir hier nicht so gut, denn ich würde die Seitenflächen eines Tetraeders nicht als Kanten bezeichnen.

Beispiel 3.1.12. Ist $\gamma\colon \Delta_1 = \{(x_0,x_1) \in [0,1]^2 \mid x+y=1\} \to X$ ein 1-Simplex (also wegen $[0,1] \xrightarrow{\sim} \Delta_1$, $t \mapsto (t-1,t)$, im Wesentlichen ein Weg in X), so gilt

$$\partial(\gamma) = \gamma \circ k_0 - \gamma \circ k_1 = \gamma(0,1) - \gamma(1,0)$$

wobei wir Nullsimplizes mit Punkten von X identifizieren, wie in Beispiel 3.1.9 erklärt. Der Rand eines 1-Simplex ist also „Endpunkt minus Anfangspunkt“.

3.1.13. Schreibt man $\partial\colon \mathrm{S}_qX \to \mathrm{S}_{q-1}X$ wirklich ausnahmsweise einmal explizit auf singulären q-Ketten aus, so erhält man (bitte nicht abschrecken lassen, insbesondere von der letzten Umformung): Für jede singuläre q-Kette $f = \sum_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} f_\sigma \sigma \in \mathrm{S}_qX$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial(f) &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} f_\sigma \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\ \sigma\circ k_i \\
&= \sum_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f_\sigma\ \sigma\circ k_i \qquad (3.1.3)\\
&= \sum_{\tau\in\mathrm{Top}(\Delta_{q-1},x)} \Big(\sum_{\substack{i\in\{0,\dots,q\},\\ \sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X),\\ \sigma\circ k_i=\tau}} (-1)^i f_\sigma \Big)\tau.
\end{aligned}$$

In Worten: Um den Koeffizienten von $\partial(f)$ bei τ zu bestimmen, geht man die endlich vielen q-Simplizes σ mit $f_\sigma \neq 0$ durch. Für jeden solchen Simplex σ betrachte man seine $q+1$ „Seitenflächen“ $\sigma\circ k_i$. Bei Übereinstimmung einer solchen Seitenfläche mit τ erhält man den Summanden $(-1)^i f_\sigma$.

Proposition 3.1.14. *Sei X ein topologischer Raum Dann ist das Diagramm*

$$\mathrm{S}X = (\mathrm{S}X,\partial) := \Big(\dots \to \mathrm{S}_2X \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{S}_1X \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{S}_0X \xrightarrow{\partial_0} \underbrace{\mathrm{S}_{-1}X}_{=\{0\}} \xrightarrow{\partial_{-1}} \underbrace{\mathrm{S}_{-2}X}_{=\{0\}} \to \dots \Big) \qquad (3.1.4)$$

ein Komplex abelscher Gruppen, den sogenannten ***Komplex der singulären Ketten von*** X.

Beweis. Der Fall $q \leq 1$ ist trivial. Gelte $q \geq 2$ und sei $\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X)$ ein beliebiger singulärer q-Simplex. Es genügt, $\partial_{q-1}(\partial_q(\sigma)) = 0$ zu zeigen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\partial(\partial(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial(\sigma\circ k_i) \qquad (3.1.5)\\
&= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j\ \sigma\circ k_i\circ k_j \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\colon 0\leq i\leq q,\\ 0\leq j\leq q-1}} (-1)^{i+j}\ \sigma\circ k_i\circ k_j
\end{aligned}$$

Wegen der leicht zu prüfenden Identität $k_i\circ k_j = k_j \circ k_{i-1}$ für alle $i>j$ heben sich die Summanden für $i>j$ und die für $i\leq j$ gegenseitig auf. □

3.1.15 (Vergleich mit dem simplizialen Differential)**.** Definiert man für $q\geq 1$ und $0\leq i\leq q$ die i-te Inklusion

$$\widetilde{k}_i = \widetilde{k}_i^q\colon \{0,\dots,q-1\} \to \{0,\dots,q\},$$
$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x<i,\\ x+1 & \text{falls } x\geq i,\end{cases}$$

so bildet, für jeden Simplizialkomplex $\mathcal{K}$, das Simplizialketten-Differential (2.4.9) die Klasse $s\in \mathrm{S}_q\mathcal{K}$ eines Elements $s=(s_0,\dots,s_q)\in \mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}}$ auf die Summe

$$\partial(s) = \sum_{0\leq i\leq q} (-1)^i\ s\circ \widetilde{k}_i$$

ab, was formal wie die Definition (3.1.2) des Singuläre-Ketten-Differentials aussieht.[23]

Definition 3.1.16. Sei X ein topologischer Raum. Wir nennen

- $\mathrm{Z}_q X := \mathrm{Z}_q(\mathrm{S}X) = \mathrm{Z}_q(\mathrm{S}X, \partial) = \ker(\partial_q \colon \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q-1} X)$ die (abelsche) Gruppe der **singulären q-Zykel**;
- $\mathrm{B}_q X := \mathrm{B}_q(\mathrm{S}X) = \mathrm{B}_q(\mathrm{S}X, \partial) = \mathrm{im}(\partial_{q+1} \colon \mathrm{S}_{q+1} X \to \mathrm{S}_q X)$ die (abelsche) Gruppe der **singulären q-Ränder** (englisch *boundaries*);
- $\mathrm{H}_q X := \mathrm{H}_q(\mathrm{S}X) = \mathrm{H}_q(\mathrm{S}X, \partial) = \mathrm{Z}_q X / \mathrm{B}_q X = \frac{\mathrm{Z}_q X}{\mathrm{B}_q X}$ die **q-te singuläre Homologie(gruppe)** (ebenfalls abelsch).

Die Nebenklasse in $\mathrm{H}_q X$ eines Zykels $z \in \mathrm{Z}_q X$ heißt seine **Homologieklasse** und wird als $[c] \in \mathrm{H}_q X$ notiert.

3.1.17 (vgl. 2.4.18)**.** Wir verwenden dasselbe Symbol H_q (manchmal mit, manchmal ohne Klammern) sowohl für die q-te Homologie $\mathrm{H}_q A = \mathrm{H}_q(A)$ eines Komplexes abelscher Gruppen A als auch für die q-te singuläre Homologie $\mathrm{H}_q X = \mathrm{H}_q(X) = \mathrm{H}_q(\mathrm{S}X)$ eines topologischen Raums X und hoffen, dass dies nie zu Missverständnissen führt.

Ende der 5. Vorlesung am 12.11.2020.

3.1.18. Die Definition von $\mathrm{H}_q X$ als Quotient einer Untergruppe $\mathrm{Z}_q X$ einer im Allgemeinen riesigen abelschen Gruppe $\mathrm{S}_q X$ sieht a priori extrem unhandlich aus.

Trotzdem werden wir die Homologiegruppen $\mathrm{H}_q X$ vieler interessanter Räume explizit berechnen können; oft werden schöne, insbesondere endliche erzeugte Gruppen wie $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ herauskommen.

Man mag sich auch fragen, wann $\mathrm{H}_q X$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist (solche Gruppen versteht man gut, siehe [Wik20, Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen]). Beispielsweise besagt der Satz von Wilder eventuell Referenz einfügen, dass die Homologiegruppen $\mathrm{H}_q M$ kompakter Mannigfaltigkeiten M endlich erzeugt sind.

3.1.19. Die q-te singuläre Homologie $\mathrm{H}_q X$ eines topologischen Raum heißt genauer **q-te singuläre Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten** und wird auch als $\mathrm{H}_q^{\mathrm{sing}}(X; \mathbb{Z})$ oder $\mathrm{H}_q^{\mathrm{sing}} X$ oder $\mathrm{H}_q(X; \mathbb{Z})$ notiert.

Statt mit ganzzahligen Koeffizienten kann man auch eine beliebige abelsche Gruppe A als Koeffizienten nehmen: Wir erinnern an die Definition

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_q X = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X) &= \Big\{ f \colon \mathrm{Top}(\Delta_q, X) \to \mathbb{Z} \mid f \text{ hat endlichen Träger} \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X)} f_\sigma \sigma \mid f_\sigma \in \mathbb{Z}, \text{ davon nur endlich viele} \neq 0 \Big\}.\end{aligned}$$

Ersetzen wir darin $\mathbb{Z}$ durch A, so erhalten wir die abelsche Gruppe

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_q(X; A) := A\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X) &= \Big\{ f \colon \mathrm{Top}(\Delta_q, X) \to A \mid f \text{ hat endlichen Träger} \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X)} f_\sigma \sigma \mid f_\sigma \in A, \text{ davon nur endlich viele} \neq 0 \Big\}.\end{aligned}$$

der **singulären q-Ketten von X mit Koeffizienten in A.**[24] Die Definiton 3.1.11 des Randoperators verallgemeinert sich in offensichtlicher „A-linearer“[25] Weise und ist explizit durch (3.1.3) gegeben. Wir erhalten den Komplex $\mathrm{S}(X; A) = (\mathrm{S}_q(X; A), \partial_q)$ abelscher Gruppen, den sogenannten **Komplex der singulären**

[23] Ersetzt man in der Rechnung (3.1.5) alle Symbole k durch $\widetilde{k}$ und verwendet die Identität $\widetilde{k}_i \circ \widetilde{k}_j = \widetilde{k}_j \circ \widetilde{k}_{i-1}$ für alle $i > j$, so erhält man $\partial^2 = 0$ für das Simplizialketten-Differential; dies liefert eine Variante zum Beweis von Proposition 2.4.15.(b).

[24] Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass $A\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X)$ eigentlich nicht definiert ist. Ist E eine beliebige Menge, so definieren wir AE als abelsche Gruppe aller Abbildungen $E \to A$ mit endlichem Träger. Im allgemeinen ist AE **keine** freie abelsche Gruppe. Sie hat jedoch E als „A-Basis“ in dem Sinne, dass jedes Element in eindeutiger Weise als „A-Linearkombination“ von Elementen von E geschrieben werden kann, also als (endliche) Summe $\sum_{e \in E} f_e e$ mit eindeutigen $f_e \in A$, von denen nur endlich viele von Null verschieden sind. (Äquivalent und formal wohl besser definiert man AE als Koprodukt $\bigoplus_{e \in E} A$ in der Kategorie Ab.) (Wer Tensorprodukte kennt, kann AE auch als $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}E$ definieren.)

[25] Hier stehen Anführungszeichen, denn A ist nur eine abelsche Gruppe und kein Ring.

Ketten von X mit Koeffizienten in A.[26] Seine q-te Homologie ist per Definition die **q-te singuläre Homologie von X mit Koeffizienten in A** und wird als $\mathrm{H}_q(X;A)$ oder $\mathrm{H}_q^{\mathrm{sing}}(X;A)$ notiert.[27]

Nimmt man statt der abelschen Gruppe A einen Ring R, so definiert man analog einen Komplex $\mathrm{S}(X;R)$ von R-Moduln; seine Homologien $\mathrm{H}_q(X;R)$ sind dann ebenfalls R-Moduln. Im Spezialfall eines Körpers k erhält man k-Vektorräume $\mathrm{H}_q(X;k)$.[28]

Allgemeiner (und vielleicht besser nur dies erklären?): Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann ist $\mathrm{S}(X;M)$ ein Komplex von R-Moduln. Seine Homologien $\mathrm{H}_q(X;M)$ sind ebenfalls R-Moduln. Der Spezialfall $R=\mathbb{Z}$ und $M=\mathbb{Z}$ ist der bisher in diesem Skript behandelte, die Spezialfälle $R=\mathbb{Z}$ und $M=A$ eine abelsche Gruppe bzw. R beliebig und $M=R$ bzw. $R=k$ und $M=k$ liefern das soeben erklärte.

Beispiel 3.1.20. Sei x ein Punkt eines topologischen Raums X und sei $q\in\mathbb{N}$. Sei $c_x=c_x^q\colon \Delta_q\to X$, $v\mapsto x$, der „konstante q-Simplex mit Wert x“. Dann gilt

$$\partial(c_x^q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i c_x^{q-1}=\begin{cases}c_x^{q-1} & \text{falls } q \text{ gerade},\\ 0 & \text{falls } q \text{ ungerade},\end{cases}$$

für alle $q\geq 1$. Alle konstanten „ungeraden“ Simplizes $c_x^1,c_x^3,c_x^5,\dots$ sind also Zykel, aber auch Ränder der konstanten „positiven geraden“ Simplizes $c_x^2,c_x^4,c_x^6,\dots$ (welche also keine Zykel sind). Alle Homologieklasen $[c_x^1],[c_x^3],[c_x^5],\dots$ sind also Null.

Beispiel 3.1.21. Sei $X=\mathrm{pt}=\{*\}$ ein einpunktiger Raum. Dann gilt nach Beispiel 3.1.20

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}X,\partial)&=\Big(\dots\to \mathrm{S}_4X\xrightarrow{\partial_4}\mathrm{S}_3X\xrightarrow{\partial_3}\mathrm{S}_2X\xrightarrow{\partial_2}\mathrm{S}_1X\xrightarrow{\partial_1}\mathrm{S}_0X\xrightarrow{\partial_0}\underbrace{\mathrm{S}_{-1}X}_{=\{0\}}\to\dots\Big)\\ &\cong\Big(\dots\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\partial_4=\mathrm{id}}\mathbb{Z}\xrightarrow{\partial_3=0}\mathbb{Z}\xrightarrow{\partial_2=\mathrm{id}}\mathbb{Z}\xrightarrow{\partial_1=0}\mathbb{Z}\xrightarrow{\partial_0=0}\{0\}\to\dots\Big).\end{aligned}$$

Notieren wir den eindeutigen 0-Simplex $\Delta_0\to\mathrm{pt}$ als c_*, so gilt also

$$\mathrm{H}_q(\mathrm{pt})=\begin{cases}\mathbb{Z}c_*\cong\mathbb{Z} & \text{für } q=0,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beispiel 3.1.22. $\mathrm{H}_q(\varnothing)=0$ für alle $q\in\mathbb{Z}$.

Beispiel 3.1.23. Ist $X=\bigsqcup X_w$ die Zerlegung (als Menge) eines topologischen Raums in seine Wegzusammenhangskomponenten ([Sch20, Definition 2.6.12]), so ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\bigsqcup\mathrm{Top}(\Delta_q,X_w)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Top}(\Delta_q,X)$$

für jedes $q\geq 0$, denn das Bild des nichtleeren wegzusammenhängenden Δ_q unter jeder stetigen Abbildung ist wegzusammenhängend. Wir folgern

$$\bigoplus\mathrm{S}_qX_w\xrightarrow{\sim}\mathrm{S}_qX$$

als abelsche Gruppen, nun für alle $q\in\mathbb{Z}$, denn die freie abelsche Gruppe über einer beliebigen disjunkten Vereinigung von Mengen E_i ist die direkte Summe der freien abelschen Gruppen über den E_i, in Formeln $\mathbb{Z}\bigsqcup E_i=\bigoplus\mathbb{Z}E_i$. Diese Zerlegung ist verträglich mit den Randoperatoren, d. h. wir haben sogar einen Isomorphismus

$$\bigoplus\mathrm{S}X_w\xrightarrow{\sim}\mathrm{S}X$$

---

[26] Im Spezialfall $A=\mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{S}_q(X;\mathbb{Z})=\mathrm{S}X$.

[27] Wer das Tensorprodukt $M\otimes_{\mathbb{Z}}N$ abelscher Gruppen kennt, wird bemerken, dass der Komplex $\mathrm{S}(X;A)$ aus dem Komplex $\mathrm{S}(X;\mathbb{Z})=\mathrm{S}X$ durch Anwenden des Funktors $A\otimes_{\mathbb{Z}}-\colon \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\to\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ hervorgeht. Es ist aber im Allgemeinen **nicht** richtig, dass $\mathrm{H}_q(X;A)$ aus $\mathrm{H}_q(X;\mathbb{Z})$ durch Anwenden dieses Funktors hervorgeht, denn Tensorieren ist im Allgemeinen nicht linksexakt. Das universelle Koeffiziententheorem der Homologie, Satz 6.10.1, klärt die Beziehung zwischen $\mathrm{H}_q(X;A)$ und $\mathrm{H}_q(X;\mathbb{Z})$.

[28] Das Semikolon in $\mathrm{S}(X;A)$ und $\mathrm{H}_q(X;A)$ wird verwendet, um Verwechslungen mit dem später definierten Komplex $\mathrm{S}(X,Z)$ der relativen Ketten und der relativen Homologie $\mathrm{H}_q(X,Z)$ zu vermeiden (siehe Definition 4.1.2).

in Kom($\mathbb{Z}$) (die direkte Summe von Komplexen wird in Definition B.1.23 erklärt). Da die Homologie einer direkten Summe von Komplexen die direkte Summe der Homologien ist (Aufgabe B.1.24 erhalten wir Isomorphismen

$$\bigoplus \mathrm{H}_q X_w \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q X \tag{3.1.6}$$

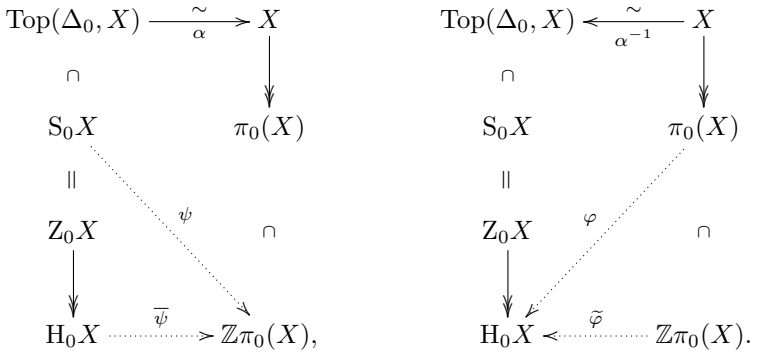
für alle $q \in \mathbb{Z}$.[29]

Lemma 3.1.24 (Nullte Homologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum und $\pi_0(X)$ die Menge seiner Wegzusammenhangskomponenten. Dann induziert die Verknüpfung offensichtlicher Abbildungen $\mathrm{Top}(\Delta_0) \xrightarrow{\sim} X \twoheadrightarrow \pi_0(X)$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\pi_0(X) \tag{3.1.7}$$

abelscher Gruppen.

Beweis. Wir erklären die beiden Diagramme (deren nichtgepunktete Teile bis auf die Richtung der horizontalen Bijektion übereinstimmen)



Wir erklären die gepunkteten Pfeile, die die Diagramme jeweils kommutativ machen. (Wegen $\mathrm{S}_{-1}X = 0$ gilt die Gleichheit $\mathrm{Z}_0 X = \mathrm{S}_0 X$.)

Links ist ψ der eindeutige Gruppenmorphismus, der die Verknüpfung $\mathrm{Top}(\Delta_0, X) \to \mathbb{Z}\pi_0(X)$ auf die freie abelsche Gruppe $\mathrm{S}_0 X$ fortsetzt. Wir wollen zeigen, dass ψ den gepunkteten Gruppenmorphismus $\overline{\psi}$ induziert. Dazu ist zu zeigen, dass ψ auf der Untergruppe $\mathrm{B}_0 X$ der 0-Ränder verschwindet. Da ein 1-Simplex alias Weg in X als Rand „Endpunkt minus Anfangspunkt“ hat (Beispiel 3.1.12), gilt

$$\mathrm{B}_0 X = \langle x - y \mid x, y \in X \text{ in derselben Wegzusammenhangskomponenten} \rangle$$

wobei rechts das Erzeugnis als abelsche Gruppe gemeint ist.[30] Da für alle $x, y \in X$ in derselben Wegzusammenhangskomponenten offensichtlich $\psi(x - y) = 0$ gilt, verschwindet ψ auf $\mathrm{B}_0 X$.

Die eindeutige Existenz der Abbildung φ rechts mit der Eigenschaft, dass der obere Bereich des rechten Diagramms kommutativ ist, kommt daher, dass für je zwei Punkte $x, y \in X$ in derselben Wegzusammenhangskomponenten die entsprechenden konstanten 0-Simplizes x und y sich um einen Rand unterscheiden (wieder nach Beispiel 3.1.12), also dieselbe Homologieklasse $[x] = [y] \in \mathrm{H}_0 X$ haben. Per Definition ist $\widetilde{\varphi}$ der eindeutige Gruppenmorphismus, der φ auf die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\pi_0(X)$ fortsetzt.

Nach Konstruktion sind die beiden Gruppenmorphismen $\overline{\psi}$ und $\widetilde{\varphi}$ invers zueinander. □

3.1.25. Für jeden topologischen Raum X nennt man den Morphismus

$$\begin{aligned} \varepsilon \colon \mathrm{S}_0 X &\to \mathbb{Z}, \\ \sum n_x x &\mapsto \sum n_x, \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

[29] Ist X ein topologischer Raum und gilt $X = \bigsqcup Y_\alpha$ als Mengen, wobei jedes Y_α eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von X ist (beispielsweise könnte jedes Y_α offen in X sein (dann ist jedes Y_α automatisch abgeschlossen in X)), so liefert das analoge Argument oder zweimalige Anwendung des obigen Resultats Isomorphismen $\bigoplus \mathrm{S}_q Y_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_q X$ und $\bigoplus \mathrm{H}_q Y_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q X$.

[30] Allgemein ist $\mathrm{B}_q X$ von allen $\partial(\sigma)$, für $\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_{q+1}, X)$ erzeugt.

abelscher Gruppen **Augmentation** (oder **Augmentationsabbildung**). Es gilt $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ wegen Beispiel 3.1.12. Also verschwindet ε auf B_0X und faktorisiert deswegen über $\mathrm{S}_0X = \mathrm{Z}_0X \twoheadrightarrow \mathrm{H}_0X$ zu einem Morphismus

$$\overline{\varepsilon}\colon \mathrm{H}_0X \to \mathbb{Z}$$

abelscher Gruppen. Nach dem Beweis von Lemma 3.1.24 ist diese Abbildung genau dann ein Isomorphismus, wenn X wegzusammenhängend ist: Ist X wegzusammenhängend, so ist $\overline{\varepsilon}$ bis auf die offensichtliche Identifikation $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\pi_0(X)$ der Isomorphismus $\overline{\psi}$ aus dem dortigen Beweis. Ist umgekehrt $\overline{\varepsilon}$ ein Isomorphismus, so haben wir Isomorphismen $\mathbb{Z}\pi_0(X) \xleftarrow[\sim]{\overline{\psi}} \mathrm{H}_0X \xrightarrow[\sim]{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Z}$ abelscher Gruppen, und es folgt[31] $|\pi_0(X)| = 1$.

Die Gleichung $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ zeigt auch, dass

$$\widetilde{\mathrm{S}}X := \Big(\ldots \to \mathrm{S}_2X \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{S}_1X \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{S}_0X \xrightarrow{\partial_0 := \varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \to \ldots \Big) \tag{3.1.9}$$

ein Komplex ist, der sogenannte **augmentierte Komplex der singulären Ketten von** X (vgl. Lemma 2.4.29).

Aufgabe 3.1.26 (Vgl. 3.4.3)**.** Sei $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ ein singulärer 1-Simplex. Sei $\overline{\sigma}$ der „umgedrehte“ 1-Simplex $\overline{\sigma}(x_0, x_1) := \sigma(x_1, x_0)$. Dann gilt $\sigma = -\overline{\sigma} + \partial\tau$ für eine geeignete singuläre 2-Kette τ; mit anderen Worten sind σ und $-\overline{\sigma}$ homolog (siehe Definition B.1.5).

Hinweis: Betrachte den 2-Simplex $\mu(z_0, z_1, z_2) = \sigma(z_0 + z_2, z_1)$.

Bemerkung: Sei $p \geq 2$, sei $\sigma\colon \Delta_p \to X$ ein p-Simplex und setze $\overline{\sigma}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p) := \sigma(x_1, x_0, x_2, \ldots, x_p)$. Dann gibt es im Allgemeinen keine $(p+1)$-Kette τ mit $\sigma = -\overline{\sigma} + \partial\tau$, denn sonst würde folgen $\partial(\sigma) = -\partial(\overline{\sigma})$, was im Allgemeinen falsch ist (nimm etwa $X = \Delta_p$ und $\sigma = \mathrm{id}$).

Satz 3.1.27 (Homologie konvexer Mengen)**.** *Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge, so gilt $\mathrm{H}_qK = 0$ für alle $q > 0$.*[32]

Beweis. Ist K leer, so ist die Aussage klar. Sonst fixieren wir einen Punkt $p \in K$ und betrachten (ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.4.29) für $q \geq 0$ den **Prismen-Operator**

$$P = P(p) = P(p, K)_q\colon \mathrm{S}_qK \to \mathrm{S}_{q+1}K, \tag{3.1.10}$$

der „jeden q-Simplex durch Verbinden mit dem ausgezeichneten Punkt p zu einem $q+1$-Simplex macht“ und formal der eindeutige Morphismus abelscher Gruppen mit der folgenden Eigenschaft ist: Für jeden q-Simplex $\sigma\colon \Delta_q \to K$ ist $P\sigma$ der eindeutige $(q+1)$-Simplex mit

$$(P\sigma)(1-\tau, \tau x_0, \ldots, \tau x_q) = (1-\tau)p + \tau\sigma(x_0, \ldots, x_q) \qquad \text{für alle } \tau \in [0,1] \text{ und alle } (x_0, \ldots, x_q) \in \Delta_q.$$

Man beachte, dass die Abbildung $P\sigma\colon \Delta_{q+1} \to K$ stetig ist, denn die Abbildung

$$\begin{aligned} [0,1] \times \Delta_q &\twoheadrightarrow \Delta_{q+1}, \\ (\tau, (x_0, \ldots, x_q)) &\mapsto (1-\tau, \tau x_0, \ldots, \tau x_q), \end{aligned}$$

ist *final* (nach [Sch20, 2.8.81]), was bedeutet, dass die Topologie auf der Zielmenge die Finaltopologie bezüglich dieser Abbildung ist.

Wir behaupten die Gleichheit

$$\partial P + P\partial = \partial \circ P_q + P_{q-1} \circ \partial = \mathrm{id}\colon \mathrm{S}_qK \to \mathrm{S}_qK \qquad \text{für alle } q \geq 1. \tag{3.1.11}$$

---

[31] Zunächst muss $\pi_0(X)$ endlich sein, denn $\mathbb{Z}\pi_0(X)$ ist von einem Element erzeugbar. Es folgt $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{|\pi_0(X)|}$. Ist R ein kommutativer Ring, so folgt aber aus $R^m \cong R^n$ als R-Moduln bereits $m = n$ (Wohlbestimmtheit des Rangs). Beweis per Multiplikativität der Determinante oder per Reduktion modulo maximalem Ideal und der entsprechenden Aussage für Vektorräume (für $R = \mathbb{Z}$ kann auch über $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Q}$ tensorieren).

[32] Dasselbe gilt für sternförmige Teilmengen mit demselben Beweis (p ist dann als „Zentrum des Sterns“ zu wählen) – wir zeigen jedoch bald eh eine allgemeinere Aussage, siehe Beispiel 3.3.2.

Sei $q \geq 1$. Nach Definition gelten

$$\partial(P\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \, (P\sigma) \circ k_i^{q+1}$$
$$P(\partial\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, P(\sigma \circ k_i^q)$$

für jeden q-Simplex σ. Leicht prüft man die anschaulich hoffentlich evidenten Formeln

$$(P\sigma) \circ k_0^{q+1} = \sigma,$$
$$(P\sigma) \circ k_i^{q+1} = P(\sigma \circ k_{i-1}^q) \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, q+1\}$$

und folgert daraus die gewünschte Formel $\partial P + P\partial = \mathrm{id}_{\mathrm{S}_q K}$ für $q \geq 1$.

Jeder Zykel $z \in \mathrm{Z}_q K$ mit $q \geq 1$ ist somit wegen $z = \partial(P(z)) + P(\partial(z)) = \partial(P(z))$ ein Rand. □

3.1.28. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Teilmenge, so ist der augmentierte Komplex $\widetilde{\mathrm{S}}K$ der singulären Ketten (siehe (3.1.9)) nullhomotop, wie eine naheliegende Modifikation des Beweises von Satz 3.1.27 zeigt.

3.1.29 ((Weg-)Integral holomorpher Funktionen über Grad-1-Homologieklassen - setzt etwas Funktionentheorie voraus)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $\sigma\colon \Delta_1 \to U$ ein singulärer 1-Simplex. Fasse σ durch Vorschalten von $[0,1] \xrightarrow{\sim} \Delta_1$, $t \mapsto (1-t, t)$, als Weg in U auf und bilde das Integral $\int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$. Per $\mathbb{Z}$-Linearer Fortsetzung definieren wir $\int_\sigma f(x)\,\mathrm{d}z$ für alle $\sigma \in \mathrm{S}_1 X$. Für alle singulären 2-Simplizes $\tau\colon \Delta_2 \to U$ gilt $\int_{\partial\tau} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (wegen der Homotopie-Invarianz des Wegintegrals). Also hängt $\int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$ nur von der Klasse von σ modulo $\mathrm{B}_1(U)$ ab, d. h. wir erhalten eine $\mathbb{Z}$-bilineare[33] Abbildung (auch Paarung genannt)

$$\frac{\mathrm{S}_1 U}{\mathrm{B}_1 U} \times \mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{C},$$
$$([\sigma], f) \mapsto \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z,$$

wobei $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U)$ den Ring er auf U holomorphen Funktionen bezeichnet. Wegen $\mathrm{H}_1(U) = \frac{\mathrm{Z}_1 U}{\mathrm{B}_1 U} \subset \frac{\mathrm{S}_1 U}{\mathrm{B}_1 U}$ können wir diese Paarung zu einer Paarung $\mathrm{H}_1(U) \times \mathcal{O}^{\mathrm{an}}(U) \to \mathbb{C}$ einschränken.

3.2. **Funktorialität der singulären Homologie.**

3.2.1. (Eventuell verwirrend – dann ignorieren und direkt Lemma 3.2.2 lesen.) Wir haben bisher $\mathrm{S}_q X = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X)$ nur für topologische Räume X definiert. Die Zuordnung $X \mapsto \mathrm{S}_q X$ lässt sich aber leicht zu einem Funktor machen: Definiere S_q als Verknüpfung

$$\mathrm{S}_q\colon \mathrm{Top} \xrightarrow{\mathrm{Top}(\Delta_q, -)} \mathrm{Set} \xrightarrow{\mathbb{Z}-} \mathrm{Ab}$$

der Funktoren „stetige Abbildungen aus Δ_q“ $\mathrm{Top}(\Delta_q, -)$ (ein Spezialfall von Beispiel A.2.9) und „freie abelsche Gruppe“ $\mathbb{Z}-$; hier wird natürlich $q \geq 0$ angenommen. Was dieser Funktor auf Morphismen macht, wird am Anfang von Lemma 3.2.2 noch einmal explizit erklärt.

Lemma 3.2.2 (Singuläre Ketten als Funktor)**.** *Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Nachschalten von f liefert für jedes $q \geq 0$ eine Abbildung*

$$f\circ\colon \mathrm{Top}(\Delta_q, X) \to \mathrm{Top}(\Delta_q, Y),$$
$$\sigma \mapsto f \circ \sigma.$$

Sei

$$\mathrm{S}_q f\colon \mathrm{S}_q X = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X) \to \mathrm{S}_q Y = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, Y)$$

[33] Genauer $\mathbb{Z}$-linear im ersten Argument für fixiertes zweites Argument, $\mathbb{C}$-linear im zweiten Argument für fixiertes erstes Argument.

die $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung dieser Abbildung auf die entsprechenden freien abelschen Gruppen; setze $\mathrm{S}_q f := 0$ für $q < 0$. Dann definiert die Familie $\mathrm{S}f := (\mathrm{S}_q f)_{q\in\mathbb{Z}}$ einen Morphismus

$$\mathrm{S}f\colon \mathrm{S}X = (\mathrm{S}X, \partial) \to \mathrm{S}Y = (\mathrm{S}Y, \partial)$$

in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$*. Genauer erhalten wir so einen Funktor* $\mathrm{S}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$*.*[34]

Beweis. Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ müssen wir zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_q X & \xrightarrow{\mathrm{S}_q f} & \mathrm{S}_q Y \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ \mathrm{S}_{q-1} X & \xrightarrow{\mathrm{S}_{q-1} f} & \mathrm{S}_{q-1} Y \end{array} \tag{3.2.1}$$

kommutativ ist. Dies ist trivial für $q \leq 0$. Sei $q > 1$. Es genügt, die Kommutativität auf der Teilmenge $\mathrm{Top}(\Delta_q, X) \subset \mathrm{S}_q X$ zu zeigen. Für jeden q-Simplex $\sigma\colon \Delta_q \to X$ gilt aber

$$\begin{aligned} \partial\Big((\mathrm{S}_q f)(\sigma)\Big) &= \partial(f \circ \sigma) \\ &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (f \circ \sigma) \circ k_i \\ &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f \circ (\sigma \circ k_i) \\ &= (\mathrm{S}_{q-1} f)\Big(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ k_i)\Big) \\ &= (\mathrm{S}_{q-1} f)\Big(\partial(\sigma)\Big) \end{aligned}$$

Dass S ein Funktor ist, ist offensichtlich. (Auch jedes $\mathrm{S}_q\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ ist ein Funktor.) □

3.2.3 (Singuläre Homologie als Funktor)**.** Sei $q \in \mathbb{Z}$. Verknüpfen der Funktoren $\mathrm{S}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ und Funktor $\mathrm{H}_q\colon \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ab}$ (siehe Lemma B.1.13) liefert einen ebenfalls als H_q notierten Funktor

$$\mathrm{H}_q := \mathrm{H}_q \circ \mathrm{S}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab},$$

denn er bildet das Objekt $X \in \mathrm{Top}$ auf $\mathrm{H}_q(\mathrm{S}X) = \mathrm{H}_q(X)$ ab (vgl. 3.1.17).

Explizit bedeutet dies: Für jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ erhalten wir eine Morphismus $\mathrm{H}_q f = \mathrm{H}_q(\mathrm{S}f)\colon \mathrm{H}_q X \to \mathrm{H}_q Y$ abelscher Gruppen. Ist $g\colon Y \to Z$ eine weitere stetige Abbildung, so gilt $\mathrm{H}_q(g \circ f) = \mathrm{H}_q(g) \circ \mathrm{H}_q(f)$. Außerdem gilt $\mathrm{H}_q(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}_q X}$.

Wir können auch den Funktor totale Homologie $\mathrm{H}\colon \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{(B.1.1)}} \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ dahinterschalten und erhalten den Funktor

$$\mathrm{H} := \mathrm{H} \circ \mathrm{S}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}).$$

3.2.4 (Homöomorphismus-Invarianz der singulären Ketten und der singulären Homologie, vgl. Satz 3.3.1)**.** Da singuläre Ketten S und singuläre Homologie H_q Funktoren sind (Lemma 3.2.2, 3.2.3), liefert jeder Homöomorphismus $f\colon X \xrightarrow{\sim} Y$ topologischer Räume Isomorphismen $\mathrm{S}f\colon \mathrm{S}X \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}Y$ in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ und $\mathrm{H}_q(f)\colon \mathrm{H}_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q Y$ in Ab.

Ende der 6. Vorlesung am 13.11.2020.

Hausaufgaben: Diesmal nur relativ elementare Aufgaben aus der homologischen Algebra – bitte die relevanten Definitionen im Anhang nachlesen.

(1) Aufgabe B.1.22
(2) Aufgabe B.1.24
(3) Aufgabe B.2.2

[34] Bitte nicht mit dem Funktor S in Aufgabe 2.4.27 verwechseln. Die Beziehung zwischen diesen beiden Funktoren wird im Wesentlichen in Satz 4.8.11 erklärt.

(4) Aufgaben B.2.3 und B.2.6 und B.2.8
(5) Bonusaufgabe B.1.25

Eventuell in Übungsgruppe Aufgabe B.1.9 erklären.

3.3. **Homotopie-Invarianz der singulären Homologie.**

Satz 3.3.1 (Homotopie-Invarianz der singulären Homologie)**.** *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf der singulären Homologie (und sogar homotope Abbildungen auf den Komplexen singulärer Ketten).*

In Formeln: Sind $f, g\colon X \to Y$ zwei homotope stetige Abbildungen, so gilt

$$\mathrm{H}_q(f) = \mathrm{H}_q(g)\colon \mathrm{H}_q(X) \to \mathrm{H}_q(Y)$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ (und die beiden Morphismen $\mathrm{S}f, \mathrm{S}g\colon \mathrm{S}X \to \mathrm{S}Y$ in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ sind sogar homotop[35], werden also gleich in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ abelscher Gruppen (siehe Definition B.2.9)).

Beispiel 3.3.2. Beispielsweise hat jeder zusammenziehbare (siehe [Sch20, Definition 3.4.10]) topologische Raum dieselbe Homologie wie ein einpunktiger Raum hat. Da jede nichtleere konvexe Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar ist, folgt Satz 3.1.27 sofort aus Satz 3.3.1.[36]

3.3.3 (Anschauung)**.** Sei h eine Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen $f, g\colon X \to Y$. Die Gleichung $\mathrm{H}_q f = \mathrm{H}_q g$ besagt, dass für jeden q-Zykel $z \in \mathrm{Z}_q X$ die beiden q-Zykel $(\mathrm{S}_q f)(z)$ und $(\mathrm{S}_q g)(z)$ homolog sind, dass es also eine $(q+1)$-Kette τ mit Rand $\partial(\tau) = (\mathrm{S}_q g)(z) - (\mathrm{S}_q f)(z)$ gibt. Anschaulich ist τ „das Gebiet in Y, dass vom Bild des Zykels z während der Homotopie h überstrichen wird“, der „Rand dieses Gebiets“ ist $(\mathrm{S}_q g)(z) - (\mathrm{S}_q f)(z)$.

Beweis. Seien $f, g\colon X \to Y$ zwei homotope stetige Abbildungen. Wir zeigen, dass die beiden Morphismen $\mathrm{S}f, \mathrm{S}g\colon \mathrm{S}X \to SY$ homotop sind. Daraus folgt $\mathrm{H}_q f = \mathrm{H}_q g$ nach Aufgabe B.2.2.

Sei $h\colon X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Sei $i_t\colon X \to X \times [0,1]$, $x \mapsto (x,t)$, die Inklusion „in Höhe $t \in [0,1]$“. Dann gelten $f = h \circ i_0$ und $g = h \circ i_1$.

Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{S}i_0$ und $\mathrm{S}i_1$ homotop sind, denn dann sind auch $\mathrm{S}f = \mathrm{S}(h \circ i_0) = \mathrm{S}h \circ \mathrm{S}i_0$ und $\mathrm{S}g = \mathrm{S}(h \circ i_1) = \mathrm{S}h \circ \mathrm{S}i_1$ homotop (siehe Aufgabe B.2.8). (Im Rest des Beweises werden f, g und Y nicht mehr auftauchen.)

Wir führen zunächst etwas Notation ein. Für $q \in \mathbb{N}$ sei $e_0 = (1,0,\dots,0)$, $e_1 = (0,1,0,\dots,0)$, …, $e_q = (0,\dots,0,1)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^{q+1}$. Diese Vektoren sind die Ecken des q-Simplex Δ_q. Gegeben Vektoren $v_0, \dots, v_q$ in einem reellen Vektorraum V, definieren wir die Abbildung

$$(v_0, \dots, v_q)\colon \Delta_q \to \mathrm{konv}(v_0, \dots, v_q) \subset V, \tag{3.3.1}$$

$$\sum_{i=0}^{q} t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{q} t_i v_i.$$

Sie ist die Einschränkung einer linearen Abbildung und bildet die Ecken $e_0, \dots, e_q$ des Standardsimplex Δ_q in dieser Reihenfolge auf $v_0, \dots, v_q$ ab.

Mit dieser Notation definieren wir für $0 \le \nu \le q$ Abbildungen

$$\omega_\nu = \omega_\nu^{q+1} = ((e_0,0), \dots, (e_\nu,0), (e_\nu,1), \dots, (e_q,1))\colon \Delta_{q+1} \to \Delta_q \times [0,1].$$

Diese Abbildungen sind stetig. Bild malen für $q = 1$ (Zerlegung des Rechtecks $\Delta_1 \times [0,1]$ in zwei Dreiecke) und $q = 2$ (Zerlegung des „Box mit dreieckiger Grundseite“ $\Delta_2 \times [0,1]$ in drei Tetraeder). Dass es sich um (nicht ganz disjunkte) „Zerlegungen“ handelt, ist hoffentlich anschaulich klar, jedoch für den Rest des Beweises nicht relevant.

---

[35] Das Wort *homotop* ist überladen: Sowohl stetige Abbildungen als auch Morphismen von Komplexen können homotop sein. Die Verwendung des Begriffs für Morphismen von Komplexen kommt historisch wohl aus der Erkenntnis dieses Satzes.

[36] Man beachte auch, dass der unten angegebene Beweis von Satz 3.3.1 nicht auf Satz 3.1.27 aufbaut.

Im Skript [Soe20] ist ein weiterer, abstrakterer Beweis von Satz 3.3.1 angegeben, der Satz 3.1.27 verwendet (siehe zweiter Beweis von [Soe20, Satz 1.4.1]).

Betrachte den Morphismus

$$\begin{aligned}\delta_q\colon \mathrm{S}_q X &\to \mathrm{S}_{q+1}(X\times[0,1]),\\ \sigma &\mapsto \delta(\sigma) := \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^\nu(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ\omega_\nu.\end{aligned}$$

abelscher Gruppen. Für $q<0$ setze (notgedrungen) $\delta_q=0$. Zeichne im Fall $q=1$ Drehsinn in die Dreiecke des Rechtecks.

Wir behaupten die Formel

$$\partial_{q+1}\delta_q+\delta_{q-1}\partial_q = \mathrm{S}_q i_1 - \mathrm{S}_q i_0 \qquad \text{für alle } q\in\mathbb{Z}. \tag{3.3.2}$$

Diese besagt, dass $(\delta_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ eine Homotopie von $\mathrm{S}_q i_1$ nach $\mathrm{S}_q i_0$ ist, diese beiden Morphismen also homotop sind. Formel am Bild erklären für $q=1$ und $q=2$.

Um die folgende Rechnung kurz zu halten, definieren wir $e'_i := (e_i,0)\in\Delta_q\times[0,1]$ und $e''_i := (e_i,1)\in\Delta_q\times[0,1]$. Ist nun $\sigma\colon\Delta_q\to X$ ein beliebiger q-Simplex, so berechnen wir (die Farben werden später verwendet)

$$\begin{aligned}\partial_{q+1}(\delta_q(\sigma)) &\overset{(3.1.2)}{=} \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^\nu\sum_{\mu=0}^{q+1}(-1)^\mu(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,e'_\nu,e''_\nu,\dots,e''_q)\circ k_\mu^{q+1}\\ &= \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^\nu\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,\widehat{e'_\mu}\dots,e'_\nu,e''_\nu,\dots,e''_q)\\ &\quad+\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^\nu\sum_{\mu=\nu}^{q}(-1)^{\mu+1}(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,e'_\nu,e''_\nu,\dots,\widehat{e''_\mu},\dots e''_q)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &\overset{(3.1.2)}{=} \sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu\sum_{\mu=0}^{q}(-1)^\mu((\sigma\circ k_\mu^q)\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,e'_\nu,e''_\nu,\dots,e''_{q-1})\\ \Big(\text{verwende } k_\mu(e_i)\overset{(3.1.1)}{=}\begin{cases}e_i & \text{falls } i<\mu,\\ e_{i+1} & \text{falls } i\geq\mu.\end{cases}\Big) \quad &= \sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,\widehat{e'_\mu},\dots,e'_{\nu+1},e''_{\nu+1},\dots,e''_q)\\ &\quad+\sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu\sum_{\mu=\nu+1}^{q}(-1)^\mu(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,e'_\nu,e''_\nu,\dots,\widehat{e''_\mu},\dots,e''_q)\\ &= \sum_{\nu=1}^{q}(-1)^{\nu-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^\mu(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,\widehat{e'_\mu},\dots,e'_\nu,e''_\nu,\dots,e''_q)\\ &\quad+\sum_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu\sum_{\mu=\nu+1}^{q}(-1)^\mu(\sigma\times\mathrm{id}_{[0,1]})\circ(e'_0,\dots,e'_\nu,e''_\nu,\dots,\widehat{e''_\mu},\dots,e''_q)\end{aligned}$$

Aufsummieren liefert (die Summe der blauen Terme ist blau, die Summe der roten rot)

$$\begin{aligned}\partial_{q+1}(\delta_q(\sigma)) + \delta_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &= (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ (\widehat{e'_0}, e''_0, \dots, e''_q) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^\nu (-1)^\nu (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ (e'_0, \dots, e'_{\nu-1}, \widehat{e'_\nu}, e''_\nu, \dots, e''_q) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu (-1)^{\nu+1} (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ (e'_0, \dots, e'_\nu, \widehat{e''_\nu}, e''_{\nu+1} \dots, e''_q) \\ &\quad + (-1)^q (-1)^{q+1} (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ (e'_0, \dots, e'_q, \widehat{e''_q}) \\ &= (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ (e''_0, \dots, e''_q) - (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ (e'_0, \dots, e'_q) \\ &= i_1 \circ \sigma - i_0 \circ \sigma \\ &= (\mathrm{S}_q i_1)(\sigma) - (\mathrm{S}_q i_0)(\sigma).\end{aligned}$$

Damit ist (3.3.2) gezeigt und der Satz bewiesen. □

3.3.4. Ich erinnere an die Homotopiekategorie hTop topologischer Räume und den kanonischen Funktor $\mathrm{Top} \to \mathrm{hTop}$ (siehe [Sch20, Definition 3.4.8, 3.4.9]).

Ebenso kommt die Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ der Komplexe abelscher Gruppen (= $\mathbb{Z}$-Moduln) mit einem kanonischen Funktor $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ (siehe Definition B.2.9 und B.2.11).

Nach Satz 3.3.1 liefern homotope Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen $\mathrm{S}f, \mathrm{S}g\colon \mathrm{S}X \to \mathrm{S}Y$; dies zeigt, dass eine eindeutige gestrichelte Abbildung im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Top}(X,Y) & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Kom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S}X, \mathrm{S}Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{hTop}(X,Y) & \overset{\mathrm{S}}{\dashrightarrow} & \mathrm{Hot}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S}X, \mathrm{S}Y) \end{array}$$

von Mengen und Abbildungen existiert, so dass dieses Diagramm kommutativ ist. By abuse of notation wird diese Abbildung wieder mit S bezeichnet.

Abstrakter formuliert – ohne X und Y zu fixieren – bedeutet dies, dass ein eindeutiger gestrichelter Funktor, der wieder mit S bezeichnet wird, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Top} & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{hTop} & \overset{\mathrm{S}}{\dashrightarrow} & \mathrm{Hot}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren existiert, so dass dieses Diagramm kommutativ ist. Dieses Diagramm lebt in der Kategorie der Kategorien (siehe [Sch20, A.2.15]).

Wer mag, kann hier noch rechts die Funktoren H_q ergänzen und erhält mit B.2.11 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Top} & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}_q} & \mathrm{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow_{\mathrm{H}_q} & \\ \mathrm{hTop} & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Hot}(\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

in der Kategorie der Kategorien. Man kann also die q-te singuläre Homologie als Funktor $\mathrm{H}_q := \mathrm{H}_q \circ S\colon \mathrm{hTop} \to \mathrm{Ab}$ auffassen. Insbesondere liefert jede Homotopieäquivalenz $f\colon X \to Y$ topologischer Räume (siehe [Sch20, Definition 3.4.10]) Isomorphismen $\mathrm{H}_q(f)\colon \mathrm{H}_q(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(Y)$.

3.4. **Erste Homologie und Fundamentalgruppe.**

3.4.1. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass der Leser die Definition der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x)$ eines punktierten topologischen Raums (X,x) kennt (siehe [Sch20, Satz 3.1.16, Definition 3.1.14]). Wir verwenden dieselbe Notation wie in *loc. cit.* – ist insbesondere ein Weg α in X gegeben, so bezeichnet $\overline{\alpha}$ den rückwärts durchlaufenen Weg $t \mapsto \alpha(1-t)$, und ε_x bezeichnet den konstanten Weg bei $x \in X$.

Ist $\gamma\colon [0,1[\to X$ ein Weg in einem topologischen Raum, so schreiben wir $[\![\gamma]\!]$ (statt $[\gamma]$ wie in *loc. cit.*) für seine Klasse bezüglich Homotopie mit festen Endpunkten, um Verwechslungen mit Homologieklassen $[z] \in \mathrm{H}_1 X$ für Zykel $z \in \mathrm{Z}_1 X$ zu vermeiden.

Satz 3.4.2 (Satz von Hurewicz (elementare Form), vgl. [Wik20, Der Satz von Hurewicz])**.** *Sei (X,x) ein punktierter topologischer Raum. Sei $c\colon \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0,1]$ die Projektion $(s,t) \mapsto t$ auf die zweite Koordinate.*

(a) Dann gibt es genau einen Morphismus

$$\pi_1(X,x) \to \mathrm{H}_1(X) \tag{3.4.1}$$

von Gruppen von der Fundamentalgruppe in die erste singuläre Homologiegruppe mit

$$[\![\gamma]\!] \mapsto [\gamma \circ c]$$

für alle geschlossenen Wege $\gamma \in \Omega(X,x)$.

(b) Ist X wegzusammenhängend, so ist der von (3.4.1) auf der Abelisierung $\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$ induzierte Morphismus ein Isomorphismus

$$\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(X)$$

*und wird **Hurewicz-Isomorphismus** genannt (siehe [Sch20, Aufgabe 3.10.25] für Definition und universelle Eigenschaft der Abelisierung G^{ab} einer Gruppe G).*

Beweis. (a) Für jede Schleife $\gamma \in \Omega(X,x)$ ist $\gamma \circ c$ offensichtlich ein 1-Zykel, so dass $\Omega(X,x) \to \mathrm{H}_1 X$, $\gamma \mapsto [\gamma \circ c]$, eine wohldefinierte Abbildung ist. Zu zeigen bleibt, dass mit-festen-Endpunkten-homotope Wege auf dasselbe Element abgebildet werden.

Für jedes $\gamma \in \Omega(X,x)$ gibt es genau eine Abbildung $\widetilde{\gamma}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert (die Abbildung c wird erst später benötigt).

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 & \xrightarrow[\sim]{c} & [0,1] & \xrightarrow{\gamma} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{Exp}=\exp(2\pi i -)}\downarrow & & & \nearrow_{\widetilde{\gamma}} & \\ \mathbb{S}^1 & & & & \end{array}$$

Die Abbildung $\widetilde{\gamma}$ ist stetig, denn die normale Topologie auf $\mathbb{S}^1$ stimmt mit der Finaltopologie bezüglich der Abbildung Exp überein (nach [Sch20, 2.8.81]).

Der singuläre 1-Simplex $\mathrm{Exp} \circ c$ ist ein Zykel, so dass wir seine Klasse $[\mathrm{Exp} \circ c] \in \mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1)$ betrachten können. Wir wenden darauf $\mathrm{H}_1(\widetilde{\gamma})\colon \mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1) \to \mathrm{H}_1(X)$ an und erhalten die folgende Beschreibung von $[\gamma \circ c]$:

$$\mathrm{H}_1(\widetilde{\gamma})\Big([\mathrm{Exp} \circ c]\Big) = [\widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Exp} \circ c] = [\gamma \circ c] \tag{3.4.2}$$

Sei nun $\beta \in \Omega(X,x)$ eine Schleife, die zu γ mit-festen-Endpunkten-homotop ist. Wir behaupten, dass dann $\widetilde{\gamma}$ und das analog definierte $\widetilde{\beta}$ homotop sind.

Sei $h\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie mit festen Endpunkten von β nach γ. Mit demselben Argument wie oben induziert h genau eine stetige Abbildung $\widetilde{h}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{Exp} \times \mathrm{id}}\downarrow & \nearrow_{\widetilde{h}} & \\ \mathbb{S}^1 \times [0,1] & & \end{array}$$

kommutativ ist. Dann ist $\widetilde{h}$ offensichtlich eine Homotopie von $\widetilde{\beta}$ nach $\widetilde{\gamma}$ (die auf $\{1\} \times [0,1]$ konstant ist, was uns aber egal ist). Dies zeigt die Behauptung.

Der Satz über die Homotopie-Invarianz der Homologie 3.3.1 liefert nun

$$[\gamma \circ c] \overset{(3.4.2)}{=} \mathrm{H}_1(\widetilde{\gamma})\Big([\mathrm{Exp} \circ c]\Big) = \mathrm{H}_1(\widetilde{\beta})\Big([\mathrm{Exp} \circ c]\Big) \overset{(3.4.2)}{=} [\beta \circ c] \tag{3.4.3}$$

in $\mathrm{H}_1(X)$. Dies zeigt die Existenz der Abbildung (3.4.1).

Wir müssen noch zeigen, dass sie ein Gruppenmorphismus ist. Sei $p\colon \Delta_2 \to [0,1]$ die affine Abbildung mit $p(1,0,0) = 0$, $p(0,1,0) = \frac{1}{2}$, $p(0,0,1) = 1$ (sie drückt das Dreieck flach auf das Intervall). Für beliebige Schleifen $\beta, \gamma \in \Omega(X,x)$ berechnen wir den Rand des 2-Simplex $(\gamma * \beta) \circ p$ zu

$$\partial((\gamma * \beta) \circ p) = \gamma \circ c - (\gamma * \beta) \circ c + \beta \circ c. \tag{3.4.4}$$

(Dies gilt auch, falls γ und β verknüpfbare Wege sind und zeigt, dass $\gamma * \beta \circ c$ und $\gamma \circ c + \beta \circ c$ homolog sind.) Für Schleifen $\beta, \gamma \in \Omega(X,x)$ gilt also in $\mathrm{H}_1(X)$

$$[\gamma \circ c] + [\beta \circ c] = [(\gamma * \beta) \circ c].$$

Also ist die Abbildung (3.4.1) ein Gruppenmorphismus (denn die Summe der Bilder von $[\![\gamma]\!]$ und $[\![\beta]\!]$ ist das Bild von $[\![\gamma]\!] * [\![\beta]\!] = [\![\gamma * \beta]\!]$).

Da sein Zielbereich abelsch ist, induziert er nach der universellen Eigenschaft der Abelisierung einen eindeutigen Morphismus

$$\mathrm{can}\colon \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{H}_1(X)$$

abelscher Gruppen.

Wir ziehen noch eine für den Beweis von (b) nützliche Konsequenz aus diesen Überlegungen. Sei β ein beliebiger Weg in X (mit nicht notwendig demselben Start- wie Endpunkt hat). Wir erklären die Gleichheiten

$$[\overline{\beta} \circ c + \beta \circ c] = [(\overline{\beta} * \beta) \circ c] = [\varepsilon_{\beta(0)} \circ c] = 0$$

in $\mathrm{H}_1 X$. Die erste folgt aus (3.4.4) (beachte, dass $\overline{\beta} \circ c + \beta \circ c$ ein Zykel ist, auch wenn die Summanden dies im Allgemeinen nicht sind). Die zweite folgt aus der Wohldefiniertheit der Abbildung (3.4.1) oder genauer aus (3.4.3), da die Schleife $\overline{\beta} * \beta$ homotop zur konstanten Schleife $\varepsilon_{\beta(0)}$ ist. Die dritte Gleichheit folgt, da (3.4.1) ein Morphismus von Gruppen ist. Mit anderen Worten gilt:

$$\overline{\beta} \circ c + \beta \circ c \qquad \text{ist nullhomolog.} \tag{3.4.5}$$

(b) Sei nun X wegzusammenhängend. Wir konstruieren in diesem Fall die inverse Abbildung zu can und fixieren dazu für jeden Punkt $y \in X$ einen Weg $\alpha_y \in \Omega(X,x,y)$ von x nach y. Sei $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ ein 1-Simplex. Betrachte die Schlaufe „gehe von x zum Startpunkt $\sigma(1,0) = \sigma(c^{-1}(0)$ von $\sigma \circ c^{-1}$, durchlaufe diesen Weg bis zu seinem Endpunkt $\sigma(0,1)$ und gehe zurück nach x“

$$w(\sigma) := \overline{\alpha}_{\sigma(0,1)} * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_{\sigma(1,0)}. \tag{3.4.6}$$

Dehne die Zuordnung $\sigma \mapsto w(\sigma)$ (wobei wir eigentlich die Klasse der Schleife $w(\sigma)$ in der Abelisierung meinen, die strenggenommen als $\overline{[\![w(\sigma)]\!]}$ notiert wird) zu einem Morphismus

$$w\colon \mathrm{S}_1 X \to \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$$

abelscher Gruppen aus (dies funktioniert, da die Gruppe rechts abelsch ist). Wir behaupten, dass dieser alle Ränder in $\mathrm{B}_1 X$ auf Null abbildet. Dazu genügt es zu zeigen, dass in der Abelisierung $w(\partial(\tau)) = 1$ (= neutrales Element von $\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$) für alle 2-Simplizes $\tau \in \Delta_2 \to X$ gilt. Wir berechnen

$$\partial(\tau) = \tau \circ k_0 - \tau \circ k_1 + \tau \circ k_2$$

und erhalten (mit $*$ als Verknüpfungssymbol in der abelschen Gruppe $\pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$), wobei man sich $t \in [0,1]$ variabel denke,

$$\begin{aligned}
w(\partial(\tau)) &= \Big(\overline{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(0,1-t,t) * \alpha_{\tau(0,1,0)}\Big) * \Big(\overline{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(1-t,0,t) * \alpha_{\tau(1,0,0)}\Big)^{-1} \\
&\quad * \Big(\overline{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \tau(1-t,t,0) * \alpha_{\tau(1,0,0)}\Big) \\
\text{(da abelsch)} &= \Big(\overline{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \tau(1-t,t,0) * \alpha_{\tau(1,0,0)}\Big) * \Big(\overline{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(1-t,0,t) * \alpha_{\tau(1,0,0)}\Big)^{-1} \\
&\quad * \Big(\overline{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(0,1-t,t) * \alpha_{\tau(0,1,0)}\Big) \\
&= \overline{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \tau(1-t,t,0) * \alpha_{\tau(1,0,0)} * \overline{\alpha}_{\tau(1,0,0)} * \tau(t,0,1-t) * \alpha_{\tau(0,0,1)} * \overline{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(0,1-t,t) * \alpha_{\tau(0,1,0)} \\
&= \overline{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \Big(\tau(1-t,t,0) * \tau(t,0,1-t) * \tau(0,1-t,t)\Big) * \alpha_{\tau(0,1,0)}.
\end{aligned}$$

Der eingeklammerte Teilausdruck ist die „Einschränkung von τ auf den Rand des Dreiecks Δ_2“, aufgefasst als Schleife bei $\tau(0,1,0)$ (nach Wahl einer geeigneten Parametrisierung des Dreiecksrandes). Diese Schleife ist offensichtlich mit-festen-Endpunkten-homotop zur konstanten Schleife bei $\tau(0,1,0)$, weswegen wir $w(\partial(\tau) = 1$ erhalten. Unsere Abbildung w oder genauer ihre Einschränkung auf Z_1X induziert also einen Morphismus

$$\overline{w}\colon \mathrm{H}_1X \to \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$$

abelscher Gruppen.[37]

Zu zeigen bleibt, dass can und $\overline{w}$ zueinander invers sind. Für jeden Weg $\gamma \in \Omega(X,x)$ gilt

$$\overline{w}(\mathrm{can}(\overline{[\![\gamma]\!]})) = \overline{w}([\gamma \circ c]) = \overline{\alpha}_{\gamma(1)} * \gamma * \alpha_{\gamma(0)} = \alpha_x^{-1} * \alpha_x * \gamma = \gamma = \overline{[\![\gamma]\!]}.$$

Dies zeigt $\overline{w} \circ \mathrm{can} = \mathrm{id}$.

Sei nun $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ wie oben ein 1-Simplex. Dann ist $w(\sigma)$ durch (3.4.6) gegeben. Durch zweimaliges Verwenden der Klammerbemerkung nach (3.4.4) für verknüpfbare Wege erhalten wir, dass die beiden singulären 1-Ketten

- $w(\sigma) \circ c$ und
- $\overline{\alpha}_{\sigma(0,1)} \circ c + \sigma + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c$

homolog sind. Da $\overline{\alpha}_{\sigma(0,1)} \circ c + \alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$ nach (3.4.5) nullhomolog ist, können wir im zweiten Ausdruck $\overline{\alpha}_{\sigma(0,1)} \circ c$ durch $-\alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$ ersetzen. Subtraktion von σ liefert dann, dass

- $w(\sigma) \circ c - \sigma$ und
- $-\alpha_{\sigma(0,1)} \circ c + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c$

homolog sind. Definieren wir $\delta\colon \mathrm{S}_0X \to \mathrm{S}_1X$ durch $\delta(y) = \alpha_y \circ c$ für alle $y \in X$ (alias 0-Simplizes) und $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung, so sind

- $\sigma - w(\sigma) \circ c$ und
- $\alpha_{\sigma(0,1)} \circ c - \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c = \delta(\sigma(0,1) - \sigma(1,0)) = \delta(\partial(\sigma))$

homolog. Ist nun $a \in \mathrm{S}_1X$ eine beliebige 1-Kette, also eine Linearkombination von 1-Simplizes σ wie oben, so sind also

- $a - \mathrm{can}(w(a))$ und[38]
- $\delta(\partial(a))$

homolog. Ist nun $a \in \mathrm{Z}_1X$ ein 1-Zykel, so folgt $[a] - \mathrm{can}(w(a)) = 0$ in $\mathrm{H}_1(X)$ oder äquivalent $\mathrm{can}(\overline{w}([a])) = \mathrm{can}(w(a)) = [a]$. Dies zeigt $\mathrm{can} \circ \overline{w} = \mathrm{id}$. □

3.4.3. Aus dem Beweis des Satzes von Hurewicz 3.4.2 sind die folgenden Eigenschaften von 1-Simplizes merkenswert; man kann alle auch direkt beweisen, vgl. Aufgabe 3.1.26:

- Ist $\varepsilon_x\colon \Delta_1 \to X$ ein konstanter 1-Simplex mit Wert $x \in X$, d. h. $\varepsilon(s,t) = x$ für alle $(s,t) \in \Delta_1$, so ist ε_x nullhomolog (= ein Rand). Dies haben wir bereits in Beispiel 3.1.20 nachgerechnet, alternativ folgt es aus der Tatsache , dass (3.4.1) ein Gruppenmorphismus ist.

[37] Sogar einen Morphismus $\overline{w}\colon \frac{\mathrm{S}_1X}{\mathrm{B}_1X} \to \pi_1(X,x)^{\mathrm{ab}}$ abelscher Gruppen.

[38] Das Element $\mathrm{can}(w(a))$ lebt eigentlich in H_1X. Hier ist ein beliebiger Lift dieses Elements in $\mathrm{Z}_1X \subset \mathrm{S}_1X$ gemeint.

- Sei $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ ein 1-Simplex und $\overline{\sigma}$ der „umgedrehte“ 1-Simplex $\overline{\sigma}(s,t) = \sigma(t,s)$. Dann ist σ homolog zu $-\overline{\sigma}$ (= die Differenz $\sigma - (-\overline{\sigma}) = \sigma + \overline{\sigma}$) ist ein Rand) (siehe Aufgabe 3.1.26 oder (3.4.5)).
- Seien $\sigma, \tau\colon \Delta_1 \to X$ zwei 1-Simplizes mit $\sigma(0,1) = \tau(1,0)$, d. h. der Endpunkt von σ ist der Anfangspunkt von τ. Sei $\tau * \sigma\colon \to X$ der 1-Simplex, der „zuerst σ und dann τ durchläuft“. Dann sind $\tau + \sigma$ und $\tau * \sigma$ homolog (= ihre Differenz ist ein Rand) (siehe (3.4.4)).

Beispiel 3.4.4. Für die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ haben wir Isomorphismen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1).$$

Der erste Isomorphismus ist in [Sch20, Satz 3.2.14] erklärt – damit ist die Fundamentalgruppe insbesondere abelsch. Für jede Gruppe G ist der kanonische Morphismus $G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{ab}}$ genau dann ein Isomorphismus, wenn G abelsch ist – dies erklärt den zweiten Isomorphismus. Der dritte ist der Hurewicz-Isomorphismus aus Satz 3.4.2.

Unter diesen Isomorphismen wird $1 \in \mathbb{Z}$ zuerst auf die Klasse des Wegs $\mathrm{Exp}\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ abgebildet und dann auf die Homologieklasse des singulären 1-Zykels $[\mathrm{Exp} \circ c]$. Mit anderen Worten ist $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1)$ die freie abelsche Gruppe über $[\mathrm{Exp} \circ c]$, in Formeln $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}[\mathrm{Exp} \circ c]$.

Analoges gilt für $\mathbb{C}^\times$ (mit beliebigem Basispunkt, etwa 1; siehe [Sch20, Beispiel 3.2.20]).[39]

Beispiel 3.4.5. Die Fundamentalgruppe der Figur Acht $X = \boxed{\infty}$ in der Zeichenebene ist isomorph zur freien Gruppe $\langle a, b\rangle$ in zwei Erzeugern (siehe [Sch20, Bsp. 3.10.7]). Wegen $\langle a, b\rangle^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}\{a, b\}$ folgt $\mathrm{H}_1(X) \cong \mathbb{Z}^2$ aus Satz 3.4.2.

Beispiel 3.4.6. Sei $n \geq 2$. Da die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}^n, x)$ für jeden Basispunkt trivial ist (siehe [Sch20, Satz 3.1.25]), folgt $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ aus Satz 3.4.2.

Ende der 7. Vorlesung am 19.11.2020.

4. Relative singuläre Homologie

4.0.1. Relative singuläre Homologie wird sich als mächtiges Werkzeug zur Berechnung der singulären Homologie herausstellen. Singuläre Homologie ist ein Spezialfall der relativen singulären Homologie. Die wichtigsten Werkzeuge, die wir kennenlernen werden, sind gewisse lange exakte Sequenzen und Ausschneidung.

4.1. Definition der relativen singulären Homologie.

Definition 4.1.1. Ein **Raumpaar** (X, Z) besteht aus einem topologischen Raum X und einer Teilmenge $Z \subset X$.

Definition 4.1.2. Sei (X, Z) ein Raumpaar. Die Inklusion $i = i_Z\colon Z \hookrightarrow X$ liefert einen Morphismus $\mathrm{S}i\colon \mathrm{S}Z \to SX$ von Komplexen (durch Anwenden des Funktors $\mathrm{S}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$). Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ist seine q-te Komponente $\mathrm{S}_q i\colon \mathrm{S}_q Z \to \mathrm{S}_q X$ offensichtlich injektiv[40] ist, so dass wir $\mathrm{S}Z \subset \mathrm{S}X$ als Unterkomplex auffassen können (Definition B.1.19). Der Quotientenkomplex

$$\mathrm{S}(X, Z) := \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}Z} = \mathrm{S}X/\mathrm{S}Z$$

heißt **Komplex der singulären Ketten von X relativ zu Z** oder **Komplex der relativen singulären Ketten von** (X, Z). Seine q-te Komponente $\mathrm{S}(X, Z)_q$ wird meist als $\mathrm{S}_q(X, Z)$ notiert, in Formeln

$$\mathrm{S}_q(X, Z) := \mathrm{S}(X, Z)_q = \frac{\mathrm{S}_q X}{\mathrm{S}_q Z} = \mathrm{S}_q X/\mathrm{S}_q Z$$

Ihre Elemente heißen **relative singuläre q-Ketten von** (X, Z) oder genauer **singuläre q-Ketten in X relativ zu Z**.

Die q-te Homologiegruppe

$$\mathrm{H}_q(X, Z) := \mathrm{H}_q(\mathrm{S}(X, Z))$$

[39] Wer sich allgemeiner für die erste Homologie offener Teilmengen der Zeichenebene $\mathbb{C}$ interessiert, sei auf [Soe20, Satz 1.6.3] verwiesen.

[40] Zunächst ist $i_Z \circ\colon \mathrm{Top}(\Delta_q, Z) \hookrightarrow \mathrm{Top}(\Delta_q, X)$ injektiv. Ist $E \hookrightarrow F$ eine injektive Abbildung von Mengen, so ist auch die induzierte Abbildung $\mathbb{Z}E \to \mathbb{Z}F$ auf den freien abelschen Gruppen injektiv, symbolisch $\mathbb{Z}E \hookrightarrow \mathbb{Z}F$.

heißt q**-te relative singuläre Homologie von** (X,Z) oder q**-te singuläre Homologie von** X **relativ zu** Z. Die Gruppen $\mathrm{B}_q(X,Z)$ der **relativen singulären** q**-Ränder** und $\mathrm{Z}_q(X,Z)$ der **relativen singulären** q**-Zykel** werden in offensichtlicher Weise definiert.

All diese Bezeichnungen sind etwas sperrig, so dass man sie oft verkürzt und etwa von relativen Ketten spricht.

4.1.3. Zur Illustration ein Bild des Diagramms $\mathrm{S}Z \subset \mathrm{S}X \twoheadrightarrow \mathrm{S}(X,Z) = \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}Z}$, in dem man sich die Komplexe senkrecht ins unendliche ausgedehnt vorstelle.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}_qZ & \subset & \mathrm{S}_qX & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}_q(X,Z) \\ \downarrow{\scriptstyle\partial_q} & & \downarrow{\scriptstyle\partial_q} & & \downarrow{\scriptstyle\partial_q} \\ \mathrm{S}_{q-1}Z & \subset & \mathrm{S}_{q-1}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}_{q-1}(X,Z) \end{array}$$

4.1.4. Im Fall $Z = \varnothing \subset X$ gilt kanonisch $\mathrm{S}X = \mathrm{S}(X,\varnothing)$ und $\mathrm{H}_qX = \mathrm{H}_q(X,\varnothing)$. Insbesondere verallgemeinert die gerade definierte relative Theorie (Komplexe relativer singulärer Ketten, relative singuläre Homologie) die zuvor eingeführte Theorie (Komplexe singulärer Ketten, singuläre Homologie).

4.1.5. Jedes Element von $\mathrm{H}_q(X,Z)$ kann durch eine q-Kette $k \in \mathrm{S}_q(X)$ mit $\partial(k) \in \mathrm{S}_{q-1}(Z)$ repräsentiert werden (denn solche Elemente repräsentieren relative q-Zykel.

4.1.6. Wir behaupten, dass $\mathrm{S}_q(X,Z)$ eine freie abelsche Gruppe ist und als $\mathbb{Z}$-Basis die Menge aller q-Simplizes $\sigma\colon \Delta_q \to X$ hat, deren Bild nicht in Z enthalten ist.

Dies folgt aus der Inklusion $\mathrm{Top}(\Delta_q, Z) \subset \mathrm{Top}(\Delta_q, X)$ und der folgenden allgemeinen Beobachtung: Ist $E \subset F$ die Inklusion einer Teilmenge, so gilt $F = E \sqcup (F \setminus E)$ und somit $\mathbb{Z}F = \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}(F \setminus E)$. Also ist die kanonische Verknüpfung $\mathbb{Z}(F \setminus E) \subset \mathbb{Z}F \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{Z}F}{\mathbb{Z}E}$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen; die Quotientengruppe ist also eine freie abelsche Gruppe mit $\mathbb{Z}$-Basis die Klassen aller Elemente von $F \setminus E$.

Beispiel 4.1.7. Wir werden später sehen, dass $\mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\}) \cong \mathrm{H}_1(\Delta_1,\{e_0,e_1\}) \cong \mathbb{Z}$ gilt (Beispiel 4.2.2, Satz 4.7.5). Der Leser versuche, sich diese Aussage plausibel zu machen und einen Erzeuger dieser Homologiegruppe zu finden.

Definition 4.1.8. Ein Morphismus von Raumpaaren $f\colon (X,Z) \to (Y,T)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(Z) \subset T$. Die Kategorie der Raumpaare wird als $\mathrm{Top}^{\subset}$ notiert.

4.1.9 (Relative Ketten und relative Homologie als Funktoren)**.** Sei $f\colon (X,Z) \to (Y,T)$ ein Morphismus von Raumpaaren. Dann gibt es genau einen Morphismus

$$\mathrm{S}f\colon \mathrm{S}(X,Z) \to \mathrm{S}(Y,T) \tag{4.1.1}$$

von Komplexen, der das rechte Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{S}Z & \subset & \mathrm{S}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}(X,Z) \\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{S}f} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{S}f} & & \vdots{\scriptstyle\exists!\mathrm{S}f} \\ \mathrm{S}T & \subset & \mathrm{S}Y & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}(Y,T). \end{array} \tag{4.1.2}$$

kommutativ macht, denn das linke Quadrat ist offensichtlich kommutativ und somit verschwindet die Verknüpfung der beiden roten Pfeile auf $\mathrm{S}Z$ (universelle Eigenschaft des Quotienten B.1.20).

Anwenden des Funktors $\mathrm{H}_q\colon \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ab}$ auf (4.1.1) liefert die Abbildung

$$\mathrm{H}_qf := \mathrm{H}_q(\mathrm{S}f)\colon \mathrm{H}_q(X,Z) \to \mathrm{H}_q(Y,T)$$

zwischen den relativen Homologien der beiden beteiligten Raumpaare.

In kategorieller Sprache erhalten wir Funktoren „Komplex der relativen Ketten“

$$\mathrm{S}\colon \mathrm{Top}^{\subset} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$$

und „q-te relative Homologie“

$$\mathrm{H}_q := \mathrm{H}_q \circ S\colon \mathrm{Top}^{\subset} \xrightarrow{\mathrm{S}} \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{H}_q} \mathrm{Ab}\,.$$

Aufgabe 4.1.10 (Variante von 3.1.23 für relative Homologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und gelte $X = \bigsqcup X_w$ als Mengen, wobei jede Teilmenge X_w offen in X ist[41] (oder allgemeiner jedes X_w eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von X ist). Seien $Z_w \subset X_w$ beliebige Teilmengen und sei $Z := \bigsqcup Z_w \subset X$ ihre Vereinigung. Dann induzieren die Einbettungen $X_w \hookrightarrow X$ Isomorphismen $\bigoplus \mathrm{S}(X_w, Z_w) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X, Z)$ und $\bigoplus \mathrm{H}_q(X_w, Z_w) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, Z)$.

Hinweis: 3.1.23.

Aufgabe 4.1.11 (Homotopie-Invarianz der relativen singulären Homologie – „Relativisierung“ von Satz 3.3.1)**.** Seien $f, g\colon (X, Z) \to (Y, T)$ zwei Morphismen von Raumpaaren. Eine **Homotopie von f nach g** ist ein Morphismus

$$h\colon \big(X \times [0,1], Z \times [0,1]\big) \to (Y, T)$$

von Raumpaaren mit $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$, wobei $i_t\colon (X, Z) \to (X \times [0,1], Z \times [0,1])$, $x \mapsto (x, t)$, die Inklusion zur Zeit $t \in [0,1]$ ist. Existiert eine solche, nennt man f und g **homotop**.

Sind f und g homotop, so sind die beiden Morphismen $\mathrm{S}f, \mathrm{S}g\colon \mathrm{S}(X, Z) \to \mathrm{S}(Y, T)$ homotop und induzieren dieselbe Abbildung

$$\mathrm{H}_q(f) = \mathrm{H}_q(g)\colon \mathrm{H}_q(X, Z) \to \mathrm{H}_q(Y, T)$$

auf den relativen Homologien für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Passe den Beweis von Satz 3.3.1 an.

Bonusaufgabe: Sind f, g sowohl homotop als Morphismen $X \to Y$ als auch als Morphismen $f, g\colon Z \to T$ (aber nicht als Morphismen von Raumpaaren), so gilt im Allgemeinen nicht $\mathrm{H}_q(f) = \mathrm{H}_q(g)\colon \mathrm{H}_q(X, Z) \to \mathrm{H}_q(Y, T)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. (Lösung der Bonusaufgabe auskommentiert – vermutlich ist es aber nötig, Satz 4.2.1 zum Berechnen einige relativer Homologien zu verwenden)

Lösung 4.1.12 (der Bonusaufgabe)**.** Sei $f = \mathrm{Exp}\colon X := [0,1] \to Y := \mathbb{S}^1$ und sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto 1$. Seien $Z := \{0,1\} \subset X$ und $T := \{1\} \subset \mathbb{S}^1$. Dann sind f, g homotop als Morphismen $X \to Y$ und (sogar gleich) als Morphismen $Z \to T$, aber es gilt $\mathrm{H}_1(f) \neq \mathrm{H}_1(g)\colon \mathrm{H}_1(X, Z) \to \mathrm{H}_1(Y, T)$ – um dies zu sehen, verwende man Beispiel 4.2.2 und berechne $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1, \{1\})$ in ähnlicher Weise mit Hilfe des Hurewicz-Isomorphismus (oder mit Satz 4.5.1).

4.2. Lange exakte Homologie-Sequenz eines Raumpaares.

Satz 4.2.1 (Lange exakte Homologie-Sequenz eines Raumpaares)**.**

(a) Sei (X, Z) ein Raumpaar. Dann ist

$$\mathrm{S}Z \hookrightarrow \mathrm{S}X \twoheadrightarrow \mathrm{S}(X, Z)$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ *und liefert nach dem in Satz B.3.4 beschriebenen Rezept eine exakte Sequenz*

$$\begin{array}{c} \ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{p+1}(X, Z) \\ \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{p+1}} \mathrm{H}_p Z \longrightarrow \mathrm{H}_p X \longrightarrow \mathrm{H}_p(X, Z) \\ \xrightarrow{\widetilde{\partial}_p} \mathrm{H}_{p-1} Z \longrightarrow \ldots \end{array}$$

*die sogenannte **lange exakte Homologie-Sequenz des Raumpaares** (X, Z).*

Dabei ist $\widetilde{\partial}_p$ wie folgt definiert: Sei eine Homologieklasse $[z] \in \mathrm{H}_p(X, Z)$ durch einen relativen p-Zykel $z \in \mathrm{Z}_p(X, Z)$ repräsentiert. Repräsentiere z durch eine p-Kette $z' \in \mathrm{S}_p X$, d. h. $\overline{z'} = z$. Dessen Rand $\partial(z') \in \mathrm{S}_{p-1} X$ liegt dann wegen $\overline{\partial(z')} = \partial(\overline{z'}) = \partial(z) = 0$ bereits in der Teilmenge $\mathrm{S}_{p-1} Z \subset \mathrm{S}_{p-1} X$ und genauer in $\mathrm{Z}_{p-1} Z$. Dann gilt

$$\widetilde{\partial}_p([z]) = [\partial(z')].$$

*Auf Grund dieser Formel nennt man den Verbindungmorphismus $\widetilde{\partial}_p$ auch **Randoperator**.*

[41] Dann ist auch jedes X_w abgeschlossen in X (und damit eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von X).

(b) *„Funktorialität“ in Raumpaaren: Für eden Morphismus $f\colon (X,Z)\to(Y,T)$ von Raumpaaren ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & \mathrm{H}_pZ & \longrightarrow & \mathrm{H}_pX & \longrightarrow & \mathrm{H}_p(X,Z) & \xrightarrow{\widetilde{\partial}} & \mathrm{H}_{p-1}Z & \longrightarrow & \mathrm{H}_{p-1}X & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p(f)} & & \\
\dots & \longrightarrow & \mathrm{H}_pT & \longrightarrow & \mathrm{H}_pY & \longrightarrow & \mathrm{H}_p(Y,T) & \xrightarrow{\widetilde{\partial}} & \mathrm{H}_{p-1}T & \longrightarrow & \mathrm{H}_{p-1}Y & \longrightarrow & \dots
\end{array} \tag{4.2.1}$$

kommutativ, wobei die Zeilen die langen exakten Homologie-Sequenzen der beiden Raumpaare sind.

(Die vertikalen Pfeile bilden einen Morphismus zwischen den horizontalen azyklischen Komplexen – in diesem Sinne ist die lange exakte Homologie-Sequenz ein Funktor $\mathrm{Top}^{\subset}\to\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$*, der genauer in der vollen Unterkategorie der azyklischen Komplexe landet (siehe* [Sch20, Definition 4.3.5]*).)*

Beweis. (a) Nach Definition von $\mathrm{S}(X,Z)=\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}Z}$ (oder komponentenweise $\mathrm{S}_q(X,Z)=\frac{\mathrm{S}_qX}{\mathrm{S}_qZ}$ für alle $q\in\mathbb{Z}$) ist klar, dass $\mathrm{S}Z\hookrightarrow\mathrm{S}X\twoheadrightarrow\mathrm{S}(X,Z)$ eine kurze exakte Sequenz ist, so dass wir in der Tat Satz B.3.4 anwenden können.

(b) Unser Morphismus von Raumpaaren liefert einen „Morphismus (4.1.2) kurzer exakter Sequenzen“, so dass Aufgabe B.3.6 das gesuchte kommutative Diagramm liefert (einzig die Kommutativität der Quadrate mit den Randoperatoren $\widetilde{\partial}$ als Horizontalen benötigt eine kleine Rechnung, die Kommutativität aller anderen Quadrate folgt aus der Funktorialität der singulären Homologie). □

Beispiel 4.2.2. Betrachte das Raumpaar $([a,b],\{a,b\})$ bestehend aus einem kompakten Intervall und seinem topologischen Rand. Die zugeordnete lange exakte Homologiesequenz hat die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \dots & & \mathrm{H}_2([a,b],\{a,b\}) & & \\
 & \xrightarrow{\widetilde{\partial}_2} & \mathrm{H}_1\{a,b\} & \longrightarrow & \mathrm{H}_1[a,b] & \longrightarrow & \mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\}) \\
 & \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} & \mathrm{H}_0\{a,b\} & \longrightarrow & \mathrm{H}_0[a,b] & \longrightarrow & \mathrm{H}_0([a,b],\{a,b\}) \\
 & \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} & \mathrm{H}_{-1}\{a,b\} & \longrightarrow & \dots & &
\end{array}$$

Nach unseren bisherigen Erkenntnissen verschwinden in der

- linken Spalte alle Gruppen bis auf $\mathrm{H}_0\{a,b\}=\mathbb{Z}a\oplus\mathbb{Z}b\cong\mathbb{Z}^2$ (Isomorphismus (3.1.6), Beispiel 3.1.21) und
- in der mittleren Spalte alle Gruppen bis auf $\mathrm{H}_0[a,b]=\mathbb{Z}a\cong\mathbb{Z}$ (Lemma 3.1.24, Satz 3.1.27).

Die rote Abbildung hat also $\mathrm{H}_0([a,b],\{a,b\})$ als Kokern und $\mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\})$ als Kern (im kategoriellen Sinn, sonst kanonisch isomorph zu Kokern bzw. Kern), und es gilt $\mathrm{H}_q([a,b],\{a,b\})=0$ für alle $q\notin\{0,1\}$. Die rote Abbildung ist aber in Matrixschreibweise als

$$\mathrm{H}_0\{a,b\}=\mathbb{Z}a\oplus\mathbb{Z}b\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}}\mathrm{H}_0[a,b]=\mathbb{Z}a$$

gegeben, hat $\mathbb{Z}(b-a)$ als Kern und ist surjektiv. Es folgt $\mathrm{H}_0([a,b],\{a,b\})=0$ und $\mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\})\cong\mathbb{Z}(b-a)\cong\mathbb{Z}$.

Die Klasse des relativen 1-Zykels $\sigma\colon\Delta_1\to[a,b]$, $(x_0,x_1)\mapsto x_0a+x_1b$, in $\mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\})$ wird unter dem Randoperator $\widetilde{\partial}_1\colon\mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\})\to\mathrm{H}_0(\{a,b\})$ auf $b-a$ abgebildet und ist somit eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{H}_1([a,b],\{a,b\})$.

Korollar 4.2.3. *Sei $f\colon(X,Z)\to(Y,T)$ ein Morphismus von Raumpaaren. Induziert f Isomorphismen $\mathrm{H}_qf\colon\mathrm{H}_qZ\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}_qT$ und $\mathrm{H}_qf\colon\mathrm{H}_qX\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}_qY$ für alle $q\in\mathbb{Z}$, so induziert f auch Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_qf\colon\mathrm{H}_q(X,Z)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}_q(Y,T)$$

auf den relativen Homologien für alle $q\in\mathbb{Z}$.

Beweis. In dem explizit angegebenen Ausschnitt des kommutativen Diagramms (4.2.1) aus Satz 4.2.1.(b) sind die beiden äußeren Vertikalen nach Annahme Isomorphismen. Da die Zeilen exakt sind, zeigt das Fünferlemma B.4.1, dass auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus ist. Wer mag, kann auch Aufgabe B.3.7 auf das Diagramm (4.1.2) anwenden, in dem die beiden linken Vertikalen Quasi-Isomorphismen sind. □

4.2.4 (Lange exakte Homologiesequenz eines Raumtripels)**.** Sei X ein topologischer Raum mit Teilmengen $Z \subset Y \subset X$; man nennt (X, Y, Z) ein **Raumtripel**. Dann liefern die offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz

$$\frac{\mathrm{S}Y}{\mathrm{S}Z} \hookrightarrow \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}Z} \twoheadrightarrow \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}Y} \qquad \text{alias} \qquad \mathrm{S}(Y,Z) \hookrightarrow \mathrm{S}(X,Z) \twoheadrightarrow \mathrm{S}(X,Y)$$

in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ (wie man leicht komponentenweise testet; wer mag, kann allgemeiner den dritten Isomorphiesatz $\frac{A}{U} \xrightarrow{\sim} \frac{\frac{A}{V}}{\frac{U}{V}}$ für Unterkomplexe $V \subset U \subset A$ eines Komplexes A beweisen und verwenden) und damit nach Satz B.3.4 eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{p+1}(X,Y) \\ \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{p+1}} \mathrm{H}_p(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{H}_p(X,Z) \longrightarrow \mathrm{H}_p(X,Y) \\ \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{p}} \mathrm{H}_{p-1}(Y,Z) \longrightarrow \ldots \end{array}$$

Für $Z = \varnothing$ spezialisiert diese zur langen exakten Homologisequenz des Raumpaars (X, Y) aus Satz 4.2.1.

Ende der 8. Vorlesung am 20.11.2020.
Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 4.1.11
(2) Aufgabe B.3.5 (Beweis lange exakte Homologie-Sequenz, Satz B.3.4)
(3) Aufgabe B.3.6 (Funktorialität lange exakte Homologie-Sequenz)
(4) Aufgabe B.4.2 (Beweis Fünferlemma B.4.1)

Olaf: Erkläre auch Aufgabe B.3.7.

4.3. **Satz über feine Ketten.**

4.3.1. Unser Nahziel ist der eher technische Satz über feine Ketten 4.3.10, aus dem wir einerseits den Satz über die Mayer-Vietoris-Sequenz 4.4.1 und andererseits den Ausschneidungssatz 4.7.1 herleiten. Diese beiden Sätze bilden starke Hilfsmittel zur Berechnung der singulären Homologie; beispielsweise erlauben beide die Berechnung der singulären Homologie der Sphären (Satz 4.5.1 oder alternativ 4.7.8); eine weitere Anwendung ist der Fixpunktsatz von Brouwer 4.5.8. Wer Motivation benötigt, möge sich zunächst den Abschnitt 4.4 über die Mayer-Vietoris-Sequenz oder den Abschnitt 4.7 über Ausschneidung ansehen.

4.3.2. Wir werden im Folgenden etwas Kategorientheorie benötigen, die wir in Appendix A erklären.

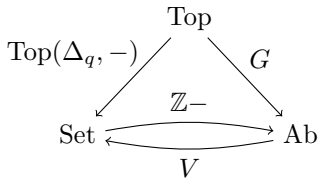
Lemma 4.3.3 (Variante des Yoneda-Lemmas A.0.13)**.** *Für alle $q \in \mathbb{N}$ und alle Funktoren $G\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ (alias Objekte $G \in \mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}}$) ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}}(\mathrm{S}_q, G) &\xrightarrow{\sim} G(\Delta_q), \\ \tau &\mapsto \tau_{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) = \tau(\mathrm{id}_{\Delta_q}), \end{aligned}$$

*eine Bijektion. Das Element $\mathrm{id}_{\Delta_q} \in \mathrm{Top}(\Delta_q, \Delta_q) \subset \mathrm{S}_q\Delta_q$ wird als **tautologischer q-Simplex** bezeichnet. In Worten ist also eine natürliche Transformation $\tau\colon S_q \to G$ eindeutig durch ihren Wert $\tau(\mathrm{id}_{\Delta_q})$ am tautologischen q-Simplex bestimmt und definierbar.*

Die Umkehrabbildung bildet ein Element $g \in G(\Delta_q)$ auf diejenige Transformation $\tau\colon \mathrm{S}_q \Rightarrow G$ ab, für die $\tau_X\colon \mathrm{S}_qX \to GX$ der eindeutige Gruppenmorphismus mit $\tau_X(\sigma) = G(\sigma)(g)$ für alle topologischen Räume X und alle q-Simplizes $\sigma\colon \Delta_q \to X$ ist.

Beweis. Betrachte das Diagramm

(4.3.1)


von Kategorien und Funktoren, wobei V der Vergiss-Funktor ist, $\mathbb{Z}-$ der Freie-abelsche-Gruppe-Funktor und $\mathrm{Top}(\Delta_q, -)$ der durch das Objekt $\Delta_q \in \mathrm{Top}$ dargestellte Funktor (siehe Definition A.0.12).

Lemma A.0.22 liefert in dieser Situation wegen $\mathrm{S}_q = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, -) = (\mathbb{Z}-) \circ \mathrm{Top}(\Delta_q, -)$ die erste der beiden folgenden Bijektionen, die zweite ist eine Anwendung des Yoneda-Lemmas A.0.13.

$$\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}}(\mathrm{S}_q, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Set}^{\mathrm{Top}}(\mathrm{Top}(\Delta_q, -), VG) \xrightarrow{\sim} V(G(\Delta_q)) = G(\Delta_q).$$

Ein Element $\tau = (\tau_X)_{X \in \mathrm{Top}}$ der linken Menge hat als Komponenten Morphismen $\tau_X \colon \mathrm{S}_q X \to G(X)$. Sein Bild in der Mitte hat als Komponenten die Einschränkungen $\tau_X|_{\mathrm{Top}(\Delta_q, X)}$ entlang der Inklusionen $\mathrm{Top}(\Delta_q, X) \subset \mathrm{S}_q X$. Die Yoneda-Bijektion nimmt dann das Bild von $\mathrm{id}_{\Delta_q} \in \mathrm{Top}(\Delta_q, \Delta_q)$ unter der Δ_q-Komponente

$$\tau_{\Delta_q}|_{\mathrm{Top}(\Delta_q, \Delta_q)} \colon \mathrm{Top}(\Delta_q, \Delta_q) \to V(G(\Delta_q)) = G(\Delta_q).$$

Die Aussage über die Umkehrabbildung ist nun klar. □

Beispiel 4.3.4. Die natürliche Transformation $\partial = \partial_q \colon \mathrm{S}_q \Rightarrow \mathrm{S}_{q-1}$ (siehe Beispiel A.0.7) entspricht unter der Bijektion aus Lemma 4.3.3 dem Element $\partial_q(\mathrm{id}_{\Delta_q}) = \partial_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) \overset{(3.1.2)}{=} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, k_i^q \in \mathrm{S}_{q-1}(\Delta_q)$, also der alternierenden Summe der „Seitenflächen“ des Standard-q-Simplex.

Ende der 9. Vorlesung am 26.11.2020.

Definition 4.3.5. Wie definieren im Folgenden natürliche Transformationen

$$U_q \colon \mathrm{S}_q \Rightarrow \mathrm{S}_q \colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ und nennen diese **(baryzentrische) Unterteilungsoperatoren**; diese führen bei jedem singulären Simplex eine „baryzentrische Unterteilung“ durch, vgl. [Wik20, Barycentric subdivision]. Setze $U_q := 0$ für $q < 0$ (einzige Möglichkeit) und $U_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{S}_0}$. Um die Transformationen U_q für $q > 0$ zu definieren, genügt es nach Lemma 4.3.3, die Werte $(U_q)_{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) \in \mathrm{S}_q(\Delta_q)$ auf dem tautologischen Simplex vorzugeben. Induktiv definieren wir U_q durch

(4.3.2)
$$(U_q)_{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) := P_{q-1}\Big(\underbrace{(U_{q-1})_{\Delta_q}\big(\overbrace{\partial(\mathrm{id}_{\Delta_q})}^{=\sum (-1)^i k_i^q \in \mathrm{S}_{q-1}\Delta_q} \big)}_{=\sum (-1)^i \mathrm{S}_q(k_i^q)\left((U_{q-1})_{\Delta_{q-1}}(\mathrm{id}_{\Delta_{q-1}})\right) \in \mathrm{S}_{q-1}\Delta_q} \Big) \in \mathrm{S}_q(\Delta_q),$$

wobei

$$P_{q-1} = P(s_q, \Delta_q)_{q-1} \colon \mathrm{S}_{q-1}\Delta_q \to \mathrm{S}_q\Delta_q$$

der Prismen-Operator (3.1.10) zum Schwerpunkt $s_q := \frac{1}{q+1}(1, 1, \ldots, 1)$ der konvexen Teilmenge $\Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ ist.

Beispiel 4.3.6. Es gilt

$$\begin{aligned}(U_1)_{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_1}) = P_0\Big((U_0)_{\Delta_1}\big((0,1)-(1,0)\big)\Big) &= P_0\big((0,1)-(1,0)\big) \\ &= \text{„1-Simplex von } (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ nach } (0,1)\text{“} - \text{„1-Simplex von } (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ nach } (1,0)\text{“}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}(U_1)_X(\sigma) = \mathrm{S}_1(\sigma)\big((U_1)_{\Delta_1}(\mathrm{id}_{\Delta_1})\big) &= \text{„1-Simplex in } X \text{ von } \sigma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ nach } \sigma(0,1)\text{“} \\ &\quad - \text{„1-Simplex in } X \text{ von } \sigma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ nach } \sigma(1,0)\text{“}\end{aligned}$$

für alle topologischen Räume X und 1-Simplizes $\sigma \colon \Delta_1 \to X$.

Baryzentrische Unterteilungen U_q durch Bilder erklären für $q = 1, 2$, vgl. [Soe20, S. 60].

Lemma 4.3.7. *Für jeden topologischen Raum $X \in \mathrm{Top}$ kommutieren die Abbildungen $(U_q)_X \colon \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_q X$ mit den Differentialen $\partial_q \colon \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q-1} X$ und definieren somit einen Morphismus*

$$U_X := ((U_q)_X)_{q\in\mathbb{Z}} \colon \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$$

von Komplexen. In kategorieller Sprache ist also

$$U := (U_q)_{q\in\mathbb{Z}} \colon \mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{S} \colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \tag{4.3.3}$$

eine natürliche Transformation.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für alle $q \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_q X & \xrightarrow{U_q} & \mathrm{S}_q X \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ \mathrm{S}_{q-1} X & \xrightarrow{U_{q-1}} & \mathrm{S}_{q-1} X \end{array}$$

in Ab kommutiert (eigentlich sollte man $(U_q)_X$ und ∂_q^X schreiben). Wir zeigen, dass das Diagramm von natürlichen Transformationen zwischen Funktoren $\mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_q & \xRightarrow{U_q} & \mathrm{S}_q \\ {\scriptstyle\partial}\Downarrow & & \Downarrow{\scriptstyle\partial} \\ \mathrm{S}_{q-1} & \xRightarrow{U_{q-1}} & \mathrm{S}_{q-1} \end{array}$$

kommutiert (dieses Diagramm lebt in der Kategorie $\mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}}$; seine Auswertung bei $X \in \mathrm{Top}$ ist das vorige Diagramm).

Nach Lemma 4.3.3 reicht es zu zeigen, dass die beiden bei S_q startenden natürlichen Transformationen $\partial \circ U_q$ und $U_{q-1} \circ \partial$ auf dem tautologischen Simplex $\mathrm{id}_{\Delta_q} \in \mathrm{S}_q \Delta_q$ übereinstimmen.

Wir zeigen dies per Induktion über q. Die Fälle $q \leq 0$ sind trivial, der Fall $q = 1$ folgt sofort aus Beispiel 4.3.6. Für $q \geq 2$ haben wir

$$\begin{aligned} \partial\big(U_q(\mathrm{id}_{\Delta_q})\big) &\overset{(4.3.2)}{=} \partial\big(P_{q-1}\big(U_{q-1}(\partial(\mathrm{id}_{\Delta_q}))\big)\big) \\ &= (-P_{q-2}\partial + \mathrm{id})\big(U_{q-1}(\partial(\mathrm{id}_{\Delta_q}))\big) && \text{wegen (3.1.11) und } q \geq 2 \\ &= -P_{q-2}U_{q-2}\partial\partial(\mathrm{id}_{\Delta_q}) + U_{q-1}(\partial(\mathrm{id}_{\Delta_q})) && \text{da } \partial U_{q-1} = U_{q-2}\partial \text{ per Induktionsannahme} \\ &= U_{q-1}(\partial(\mathrm{id}_{\Delta_q})). && \square \end{aligned}$$

Lemma 4.3.8. *Die beiden natürlichen Transformationen $U, \mathrm{id}_S \colon S \Rightarrow S$ sind im folgenden Sinne homotop: Es gibt eine natürliche Transformationen $T_q \colon S_q \Rightarrow \mathrm{S}_{q+1}$, für alle $q \in \mathbb{Z}$, mit*

$$\partial T_q + T_{q-1}\partial = U_q - \mathrm{id}_{\mathrm{S}_q} \tag{4.3.4}$$

[42] für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Insbesondere sind für jeden topologischen Raum die beiden Morphismen $U_X, \mathrm{id}_{\mathrm{S}X} \colon \mathrm{S}X \to \mathrm{S}X$ in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ homotop (mit der Familie $T_X := ((T_q)_X)_{q\in\mathbb{Z}}$ als möglicher Homotopie) und somit induziert U_X die Identität auf allen Homologien, in Formeln

$$\mathrm{H}_p(U_X) = \mathrm{H}_p(\mathrm{id}_{\mathrm{S}X}) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}_p(X)} \colon \mathrm{H}_p(X) \to \mathrm{H}_p(X).$$

Beweis. Wir definieren die T_q induktiv, so dass (4.3.4) für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt.

Wir setzen $T_q := 0$ für alle $q < 0$ (die einzige Möglichkeit) und $T_0 := 0$ (dann gilt (4.3.4) für $q = 0$). Sei $Q > 0$ und gelte (4.3.4) bereits für alle $q < Q$. Dann müssen wir T_Q definieren mit

$$\partial T_Q + T_{Q-1}\partial = U_Q - \mathrm{id}_{\mathrm{S}_Q}.$$

[42] Wer sich fragt, was $+$ und $-$ hier bedeuten: Sind $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ Funktoren mit Zielkategorie Ab, so bildet die Menge aller natürlichen Transformatioenn $F \Rightarrow G$ eine abelsche Gruppe: Gegeben $\sigma, \tau \colon F \Rightarrow G$ ist $\sigma + \tau$ durch $(\sigma + \tau)_C := \sigma_C + \tau_C$ definiert. Dies verwendet, dass die Morphismenmengen in Ab selbst abelsche Gruppen sind.

Nach Lemma 4.3.3 genügt es dafür ein Element $t \in \mathrm{S}_{Q+1}(\Delta_Q)$ (alias $T_Q(\mathrm{id}_{\Delta_Q})$) mit

$$\partial t = U_Q(\mathrm{id}_{\Delta_Q}) - \mathrm{id}_{\Delta_Q} - T_{Q-1}\partial(\mathrm{id}_{\Delta_Q})$$

zu finden. Es ist also zu zeigen, dass die rechte Seite ein Rand ist, d. h. in $\mathrm{B}_Q(\Delta_Q)$ liegt. Weil Δ_Q konvex ist und $Q > 0$ gilt, ist dies aber äquivalent dazu, dass die rechte Seite ein Zykel ist, also in $\mathrm{Z}_Q(\Delta_Q)$ liegt (Satz 3.1.27). Dies stimmt aber wegen

$$\begin{aligned}
\partial\Big(U_Q(\mathrm{id}_{\Delta_Q}) - \mathrm{id}_{\Delta_Q} - T_{Q-1}\partial(\mathrm{id}_{\Delta_Q})\Big) &= U_{Q-1}(\partial(\mathrm{id}_{\Delta_Q})) - \partial(\mathrm{id}_{\Delta_Q}) - \partial T_{Q-1}\partial(\mathrm{id}_{\Delta_Q}) && \text{nach Lemma 4.3.7}\\
&= \big(U_{Q-1} - \mathrm{id}_{\mathrm{S}_{Q-1}} - \partial T_{Q-1}\big)(\partial(\mathrm{id}_{\Delta_Q}))\\
&= T_{Q-2}\partial(\partial(\mathrm{id}_{\Delta_Q})) && \text{per Induktion}\\
&= 0. && \square
\end{aligned}$$

Definition 4.3.9. Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen eines topologischen Raums X. Sei $\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$ die freie abelsche Gruppe über all denjenigen q-Simplizes von X, deren Bild ganz in einer der Teilmengen aus $\mathcal{V}$ liegt, in Formeln

$$\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}} := \mathbb{Z}\{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X) \mid \text{es gibt ein } V \in \mathcal{V} \text{ mit } \mathrm{im}(\sigma) \subset V\}.$$

Die Elemente dieser Gruppe heißen **$\mathcal{V}$-feine singuläre Ketten in X**. Offensichtlich gilt $\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X \subset \mathrm{S}_qX$ und $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X := (\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X)_{q\in\mathbb{Z}}$ ist ein Unterkomplex von $\mathrm{S}X$. Er heißt **Komplex der $\mathcal{V}$-feinen Ketten in X**.

Satz 4.3.10 (über feine Ketten)**.** *Sei $\mathcal{V}$ eine Überdeckung eines topologischen Raums X mit $X = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V^\circ$, wobei V° das Innere von V in X ist (beispielsweise eine offene Überdeckung). Dann ist die Inklusion $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \subset \mathrm{S}X$ ein Quasi-Isomorphismus (Definition B.1.16)*[43]*, induziert also Isomorphismen $\mathrm{H}_q(\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_qX$ auf allen Homologiegruppen; äquivalent: Der Quotientenkomplex $\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}$ ist azyklisch.*

Insbesondere berechnet $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$ bereits die singuläre Homologie.

Beweis. Der Unterkomplex $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \subset \mathrm{S}X$ liefert die kurze exakte Sequenz von Komplexen $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \subset \mathrm{S}X \twoheadrightarrow \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}}$ (Beispiel B.3.3). Nach der langen exakten Homologiesequenz (Satz B.3.4) sind die beiden Aussagen

- $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \subset \mathrm{S}X$ ist ein Quasi-Isomorphismus und
- $\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}$ ist azyklisch

äquivalent.

Der Unterteilungsoperator $U_q = (U_q)_X \colon \mathrm{S}_qX \to \mathrm{S}_qX$ bildet die Untergruppe $\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$ in sich selbst ab (nach Definition 4.3.5 und Lemma 4.3.3). Also induziert er einen Gruppenmorphismus $\overline{U}_q \colon \frac{\mathrm{S}_qX}{\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X} \to \frac{\mathrm{S}_qX}{\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X}$. Genauer ist $\overline{U} := (\overline{U}_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ein Endomorphismus des Komplexes $\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}$.

Analog induzieren die im Beweis von Lemma 4.3.8 definierten Morphismen $T_q = (T_q)_X \colon S_qX \to \mathrm{S}_{q+1}X$ Gruppenmorphismen $\overline{T}_q \colon \frac{\mathrm{S}_qX}{\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X} \to \frac{\mathrm{S}_{q+1}X}{\mathrm{S}_{q+1}^{\mathcal{V}}X}$ und wir folgern aus (4.3.4), dass $\overline{U}$ homotop zur Identität von $\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}$ ist.

Behauptung A: Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ und jede singuläre q-Kette $\gamma \in \mathrm{S}_qX$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(U_q)^n\gamma \in \mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$, d. h. es gilt $\overline{U}_q^n(\overline{\gamma}) = 0$ in $\frac{\mathrm{S}_qX}{\mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X}$.

Beweis der Behauptung A: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\gamma \colon \Delta_q \to X$ ein q-Simplex ist. Wir betrachten die (nach Annahme) offene Überdeckung $(\gamma^{-1}(V^\circ))_{V\in\mathcal{V}}$ von Δ_q. Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue [Sch20, 2.7.18] gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass jeder ε-Ball in Δ_q bereits in einer Menge dieser Überdeckung enthalten ist. Lemma 4.3.13 zeigt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jeder Simplex der n-ten baryzentrischen Unterteilung $U_q^n(\mathrm{id}_{\Delta_q})$ von id_{Δ_q} Durchmesser $< \varepsilon$ hat, also ganz im ε-Ball um jeden seiner Punkte liegt. Daraus folgt $U_q^n(\gamma) = (\mathrm{S}_q\gamma)\big(U_q^n(\mathrm{id}_{\Delta_q})\big) \in \mathrm{S}_q^{\mathcal{V}}X$ (nach Lemma 4.3.3 und der Definition des Funktors S_q in Lemma 3.2.2). Dies zeigt Behauptung A.

Wir wissen somit, dass der Endomorphismus $\overline{U} \colon \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X} \to \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}$ einerseits homotop zur Identität ist und andererseits „lokal“ (= „elementweise“) „nilpotent“ in dem Sinne, ist dass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ und jedes Element

[43] Sie wird zu einem Isomorphismus in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$, was aus einem späteren Resultat folgt (gegeben zwei in Pfeilrichtung beschränkte Komplexe P, Q projektiver Moduln, ist die kanonische Abbildung $\mathrm{Hot}_R(P,Q) \to \mathrm{D}_R(P,Q)$ bijektiv (wobei $\mathrm{D}(R)$ die derivierte Kategorie ist).

$x \in \left(\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}\right)^q$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{U}^n(x) = 0$ existiert. Daraus folgt bereits, dass der Komplex $\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}$ azyklisch ist, denn allgemein gilt:

Behauptung B: Ist $f\colon A \to A$ ein lokal nilpotenter, zur Identität id_A homotoper Endomorphismus in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$, so ist A azyklisch.

Beweis der Behauptung B: Da f homotop zu id_A ist, folgt $\mathrm{H}_p(f) = \mathrm{H}_p(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}_pA}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Seien $p \in \mathbb{Z}$ und $a \in A_p$ beliebig. Lokale Nilpotenz liefert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(a) = 0$. Ist nun a sogar ein Zykel mit Homologieklasse $[a] \in \mathrm{H}_pA$, so folgt

$$[a] = \mathrm{id}^n_{\mathrm{H}_pA}([a]) = \big(\mathrm{H}_p(f)\big)^n([a]) = \mathrm{H}_p(f^n)([a]) = [f^n(a)] = [0] = 0,$$

also $\mathrm{H}_pA = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. □

4.3.1. *Durchmesser der Simplizes der baryzentrischen Unterteilung.*

Definition 4.3.11. Der **Durchmesser** $\mathrm{diam}(E)$ einer Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^m$ ist durch

$$\mathrm{diam}(E) := \sup_{v,w\in E} \|v - w\| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\pm\infty\}$$

definiert, wobei $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ die euklidische Norm ist. (Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Definition des Durchmessers eines metrischen Raums.)

Lemma 4.3.12. *Seien $v_0, \dots, v_q \in \mathbb{R}^m$ Vektoren, wobei $q \geq 0$. Dann gilt für alle $w \in \mathbb{R}^m$ und alle $v \in \mathrm{konv}(v_0, \dots, v_q)$*

$$\|w - v\| \leq \max_{i\in\{0,\dots,q\}} \|w - v_i\|.$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{diam}\big(\mathrm{konv}(v_0, \dots, v_q)\big) = \max_{i,j\in\{0,\dots,q\}} \|v_i - v_j\|.$$

Beweis. Schreibe $v = \sum_{j=0}^q t_j v_j$ für eindeutige $t_j \in [0, 1]$ mit $\sum_j t_j = 1$. Dann gilt

$$\|w - v\| = \Big\| \sum t_j(w - v_j) \Big\| \leq \sum t_j \|w - v_j\| \leq \max_{i\in\{0,\dots,q\}} \|w - v_i\|.$$

Dies zeigt die erste Ungleichung. Zweimaliges Anwenden dieser Ungleichung zeigt

$$\|w - v\| \leq \max_{i,j\in\{0,\dots,q\}} \|v_i - v_j\|$$

für alle $v, w \in \mathrm{konv}(v_0, \dots, v_m)$, woraus sofort die behauptete Gleichheit folgt. □

Lemma 4.3.13. *Seien $v_0, \dots, v_q \in \mathbb{R}^m$ Vektoren mit $q \geq 0$. Sei $\sigma := (v_0, \dots, v_q)\colon \Delta_q \to \mathbb{R}^m$ der in (3.3.1) definierte singuläre q-Simplex mit Ecken $v_0, \dots, v_q$. Dann hat jeder Simplex der baryzentrischen Unterteilung von σ Durchmesser $\leq \frac{q}{q+1}\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\sigma))$.*

Formal meint dies: Sei τ ein singulärer q-Simplex, der mit Koeffizient $\neq 0$ in $U_q(\sigma)$ vorkommt. Dann gilt $\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\tau)) \leq \frac{q}{q+1}\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\sigma))$.

Beweis. Wir beweisen dies per Induktion über q. Die Fäll $q = 0$ und $q = 1$ sind offensichtlich.

Sei $s := \frac{1}{q+1}(v_0 + \cdots + v_q)$ der Schwerpunkt des Bildes $\mathrm{konv}(v_0, \dots, v_q)$ unseres Simplex σ. Sei τ ein Simplex in der baryzentrischen Unterteilung von σ. Dann ist $\mathrm{im}(\tau)$ die konvexe Hülle von s und einem „$(q-1)$-Simplex ν der baryzentrischen Unterteilung einer Seitenfläche μ von σ“; seien $w_0, \dots, w_{q-1}$ die „Ecken“ von ν in beliebiger Reihenfolge. Bild malen. Dann gilt nach Lemma 4.3.12 mindestens eine der beiden folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\tau)) = \|s - w_i\|$ für ein geeignetes $i \in \{0, \dots, q-1\}$.
(b) $\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\tau)) = \|w_j - w_i\|$ für geeignete $i, j \in \{0, \dots, q-1\}$.

Die Aussage (b) impliziert $\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\tau)) = \mathrm{diam}(\mathrm{im}(\nu))$ (nach Lemma 4.3.12). Da ν ein Simplex in der baryzentrischer Unterteilung des $(q-1)$-Simplex μ ist, folgt per Induktion und wegen $\mathrm{im}(\mu) \subset \mathrm{im}(\sigma)$

$$\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\tau)) = \mathrm{diam}(\mathrm{im}(\nu)) \leq \frac{q-1}{q}\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\mu)) \leq \frac{q}{q+1}\mathrm{diam}(\mathrm{im}(\sigma))$$

wie gewünscht.

Gelte nun Aussage (a) und sei i wie dort gewählt. Wegen $w_i \in \operatorname{im}(\nu) \subset \operatorname{im}(\mu)$ folgt $\operatorname{diam}(\operatorname{im}(\tau)) = \|s - w_i\| \leq \|s - v_j\|$ für ein $j \in \{0, \dots, q\}$ nach Lemma 4.3.12. Wir erhalten wie gewünscht

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\operatorname{im}(\tau)) &\leq \|s - v_j\| \\
&= \Big\| \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{q} v_k - \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{q} v_j \Big\| \\
&= \frac{1}{q+1} \Big\| \sum_{k=0}^{q} (v_k - v_j) \Big\| \\
&\leq \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{q} \|v_k - v_j\| \\
&\leq \frac{1}{q+1} \sum_{k \neq j} \|v_k - v_j\| \\
&\leq \frac{q}{q+1} \operatorname{diam}(\operatorname{im}(\sigma)).
\end{aligned}$$

□

Ende der 10. Vorlesung am 27.11.2020.
Hausaufgaben:

(1) Aufgabe A.0.11
(2) Aufgabe A.0.15
(3) Aufgabe A.0.16
(4) Aufgabe B.2.13 (Knobelaufgabe!)

4.4. **Mayer-Vietoris-Sequenz.**

Satz 4.4.1 (Mayer[44]-Vietoris[45]-Sequenz)**.** *Seien U, V Teilmengen eines topologischen Raums X mit $X = U^\circ \cup V^\circ$ (oft ist $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung). Dann ist*

(4.4.1)
$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \mathrm{H}_{p+1}X & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
& & \mathrm{H}_p(U \cap V) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_p(i_U) \\ \mathrm{H}_p(i_V) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_pU \oplus \mathrm{H}_pV & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_p(j_U) & -\mathrm{H}_p(j_V) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_pX \\
& & & \searrow & & & \\
& & & & \mathrm{H}_{p-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

eine exakte Sequenz, die sogenannte ***Mayer-Vietoris-Sequenz****, wobei das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & & \\
 & {\scriptstyle i_U}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle j_U} & \\
U \cap V & & & & X \\
 & {\scriptstyle i_V}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle j_V} & \\
 & & V & &
\end{array}$$

die Benennung der Inklusionen erklärt und die Definition der Verbindungsmorphismen aus dem Beweis hervorgeht (siehe auch 4.4.2 für eine Art Algorithmus).

Nachträglich ergänzt: „Funktorialität in Tripeln (X, U, V)“. Sei X' ein weiterer topologischer Raum mit Teilmengen U', V' und gelte $X' = U'^\circ \cup V'^\circ$. Ist $f\colon X \to X'$ eine stetige Abbildung mit $f(U) \subset U'$ und $f(V) \subset f(V')$, so liefern die durch f induzierten Abbildungen einen Morphismus von der Mayer-Vietoris-Sequenz (4.4.1) zu (X, U, V) in diejenige zu (X', U', V').

[44][Wik20, Walther Mayer]
[45][Wik20, Leopold Vietoris]

Beweis. Sei $\mathcal{V} = \{U, V\}$ unsere Überdeckung von X. Dann ist

$$\mathrm{S}(U \cap V) \xhookrightarrow{\binom{\mathrm{S}i_U}{\mathrm{S}i_V}} \mathrm{S}U \oplus \mathrm{S}V \xrightarrow{(\mathrm{S}j_U \ -\mathrm{S}j_V)} \mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \tag{4.4.2}$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ (offensichtlich bzw. Aufgabe 4.4.3). Wir erhalten eine zugehörige lange exakte Homologiesequenz (Satz B.3.4). Nach unserer Annahme $X = U^\circ \cup V^\circ$ und dem Satz über feine Ketten 4.3.10 ist $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \hookrightarrow \mathrm{S}X$ ein Quasi-Isomorphismus und liefert also Isomorphismen $\mathrm{H}_p(\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_pX$, mit deren Hilfe wir unsere lange exakte Sequenz zur behaupteten Mayer-Vietoris-Sequenz umschreiben. □

4.4.2. Um den Wert des Verbindugsmorphismus auf einer Homologieklasse $c \in \mathrm{H}_pX$ zu berechnen, muss man ein Urbild von c unter dem Isomorphismus $\mathrm{H}_p(\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_pX$ finden, auf das man dann das allgemeine Rezept aus Satz B.3.4.(a) anwenden kann. Eine rechnerische Möglichkeit hierfür ist baryzentrische Unterteilung: Wähle einen p-Zykel γ mit $c = [\gamma]$. Nach Behauptung A im Beweis des Satzes über feine Ketten 4.3.10 gibt es ein n, so dass die n-fache baryzentrische Unterteilung $U^n(\gamma)$ in $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$ liegt. Dieses Element ist wieder ein p-Zykel und es gilt $[\gamma] = [U^n(\gamma)]$ in H_pX (denn nach (4.3.4) in Lemma 4.3.8 bildet baryzentrische Unterteilung U Zykel auf Zykel ab und erhält Homologieklassen). Also ist die Homologieklasse des p-Zykels $U^n(\gamma) \in \mathrm{S}^{\mathcal{V}}_pX$ das gesuchte Urbild von c.

Aufgabe 4.4.3. Seien $A, B \subset X$ Teilmengen eines topologischen Raums X. Dann ist

$$\mathrm{S}(A \cap B) \xhookrightarrow{\binom{1}{1}} \mathrm{S}A \oplus \mathrm{S}B \xrightarrow{(1\ -1)} \mathrm{S}^{\{A,B\}}X$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$.

Hinweis: Verwende 4.1.6.

Aufgabe 4.4.4 (Mayer-Vietoris-Sequenz für simpliziale Homologie)**.** Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und seien $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$ Untersimplizialkomplexe mit $\mathcal{K} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Dann gibt es eine Mayer-Vietoris-Sequenz wie in Satz 4.4.1, wobei $U \cap V, U, V, X$ durch $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{K}$ zu ersetzen sind und $\mathrm{H}_q(-)$ für simpliziale Homologie steht.

Hinweis: Verwende Proposition 2.4.21 und zeige, dass

$$\mathbb{Z}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})^{\text{st-mono}} \xhookrightarrow{\binom{1}{1}} \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}} \oplus \mathbb{Z}\mathcal{V}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{(1\ -1)} \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$$

eine kurze exakte Sequenz ist.

Bonus: Löse damit Aufgabe 2.4.26.

4.5. **Homologie der Sphären.**

Satz 4.5.1 (singuläre Homologie der Sphären)**.** *Die singulären Homologiegruppen der n-dimensionalen Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind wie folgt gegeben: Im Fall $n \geq 1$ gilt*

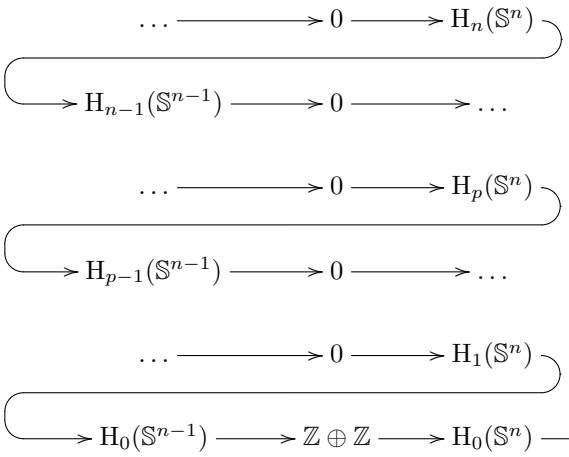
$$\mathrm{H}_q(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.5.1}$$

Im Fall $n = 0$ hat $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ als einzige nichtverschwindende Homologie $\mathrm{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[1] \cong \mathbb{Z}^2$. Im Fall $n = -1$ verschwinden alle Homologien von $\mathbb{S}^0 = \varnothing$.

Beweis. Wir führen Induktion über n. Die Fälle $n = -1, 0$ sind klar.

Sei $n \geq 1$. Da $\mathbb{S}^n$ wegzusammenhängend ist, gilt schon einmal $\mathrm{H}_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$. Betrachte die offene Überdeckung von $\mathbb{S}^n$ durch die beiden offenen, etwas vergrößerten Hemisphären U und V (etwa $U = \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\}$). Bild malen. Die beiden Räume U und V sind jeweils zusammenziehbar und haben somit nur Homologie $\mathbb{Z}$ im Grad Null. Die Inklusion $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \subset U \cap V$ des Äquators ist offensichtlich die eines Deformationsretrakts und somit eine Homotopieäquivalenz (siehe [Sch20, Lemma 3.5.4]), induziert also Isomorphismen auf allen Homologien nach 3.3.4. Mit diesen Erkenntnissen verwandelt sich die

Mayer-Vietoris-Sequenz aus Satz 4.4.1 in eine exakte Sequenz



Fall $n = 1$: Die linke Spalte dieser exakten Sequenz lebt nur in Grad Null. Daraus folgt $\mathrm{H}_p(\mathbb{S}^1) = 0$ für alle $p \geq 2$. Es bleibt $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ zu zeigen (was wir schon aus Beispiel 3.4.4 wissen, aber nun noch einmal zeigen). Die obige exakte Sequenz zeigt, dass $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$ isomorph zum Kern der Abbildung $\mathrm{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[+1] \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist; diese Abbildung ist durch $a[-1] + b[+1] \mapsto (a + b, a + b)$ gegeben und hat als Kern $\mathbb{Z}([-1] - [+1]) \cong \mathbb{Z}$.

Fall $n \geq 2$: Per Induktion lebt die linke Spalte des obigen Diagramms nur in den Graden 0 und $n - 1 \geq 1$ ist dort jeweils isomorph zu $\mathbb{Z}$. Daraus folgt $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ und $\mathrm{H}_p(\mathbb{S}^n) = 0$ für alle $p \geq 2$ mit $p \neq n$. Zu bestimmen bleibt $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^n)$, was isomorph zum Kern der Abbildung $\mathrm{H}_0(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist. Diese Abbildung ist aber offensichtlich injektiv, so dass $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^n) = 0$ folgt (dies folgt auch aus Beispiel 3.4.6). □

4.5.2. Diese Berechnung der Homologie der Sphären ist relativ leicht merkbar, jedoch ist im Vergleich zur später erklärten Berechnung 4.7.8 mit Hilfe des Korollars 4.7.7 (und stereographischer Projektion) ziemlich unklar, was ein Erzeuger von $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n)$ ist, jedenfalls für $n \geq 3$.

In Vorlesung Erzeuger von $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ und $\mathrm{H}_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ erklärt per Verbindungsmorphismus MV-Sequenz. Das Resultat für $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1)$ benötigen wir später: Jeder 1-Zykel, der sich einmal (im Uhrzeiger oder Gegenuhrzeigersinn) um die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ aufwickelt, liefert einen Erzeuger von $\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1)$ (auch klar nach Hurewicz). Man kann einen solchen 1-Zykel auch durch homologe 1-Ketten ersetzen: Nach 3.4.3 kann man etwa die Summe $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ von drei 1-Simplizes nehmen, wobei sich τ_i „um das i-te Drittel der Kreislinie windet“. Den Summanden τ_i kann man auch durch $-\overline{\tau}_i$ ersetzen.

Aufgabe 4.5.3.

(a) Es ist nicht möglich, die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen U, V mit wegzusammenhängendem Schnitt $U \cap V$ zu überdecken.

(b) Es ist nicht möglich, die Kugelschale $\mathbb{S}^2$ durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen U, V zu überdecken, deren Schnitt verschwindende erste singuläre Homologie $\mathrm{H}_1(U \cap V) = 0$ hat.

Diejenigen, die Fundamentalgruppen kennen, dürfen folgern: Es ist nicht möglich, die Kugelschale $\mathbb{S}^2$ durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen U, V mit einfach zusammenhängendem Schnitt $U \cap V$ zu überdecken.

Hinweis: Mayer-Vietoris.

Aufgabe 4.5.4. Berechne mit Mayer-Vietoris die singuläre Homologie der folgenden topologischen Räume X und finde jeweils eine explizite $\mathbb{Z}$-Basis.

(a) Sei X ein Bouquet von n Kreislinien $\mathbb{S}^1$.[46]

(b) Sei X eine Kugelschale $\mathbb{S}^2$, die von einer Kreislinie $\mathbb{S}^1$ in einem Punkt berührt wird.

[46] D. h. X ist der Quotient der disjunkten Vereinigung von n Kopien von $\mathbb{S}^1$ modulo der Äquivalenzrelation, die die n Basispunkte $1 \in \mathbb{S}^1$ dieser Kreislinien zu einem Punkt identifiziert. Im Fall $n = 1$ gilt $X = \mathbb{S}^1$, im Fall $n = 2$ ist X eine Figur Acht „∞“, im Fall $n = 3$ sind es drei Kreislinine, die sich in einem Punkt berühren (der Rand einer Blume mit drei Blättern), usw.

(c) Bonus: Seien A und B topologischer Räume mit Punkten $a \in A$ und $b \in B$. Sei X die Verklebung von A und B in diesen ausgezeichneten Punkten, also der Quotient von $A \sqcup B$ modulo der Identifizierung $a = b$. Ergänze und beweise (eventuell modulo mengentheoretischer Details): Falls ... gilt, so kann man $\mathrm{H}_q(X)$ wie folgt durch $\mathrm{H}_q(A)$ und $\mathrm{H}_q(B)$ ausdrücken: ...

Bemerkung: Wir haben hier *Einpunktvereinigungen* oder *Wegde-Produkte* betrachtet, siehe [Wik20, Wedge-Produkt (Topologie)].

4.5.5. Der topologische Rand der n-dimensionalen abgeschlossenen Vollkugel/Disk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist

$$\mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Spezialfälle sind $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ und $\mathbb{S}^{-1} = \varnothing$.

4.5.6. Das folgende Korollar 4.5.7 verallgemeinert [Sch20, Satz 3.3.6].

Korollar 4.5.7 (Nicht-Existenz einer Retraktion der Vollkugel auf ihren Rand)**.** *Für $n \geq 0$ gibt es keine stetige Abbildung $D^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ der Vollkugel auf ihren Rand, deren Einschränkung auf $\mathbb{S}^{n-1}$ die Identität ist.*

In anderen Worten gibt es keine Retraktion von D^n auf ihren Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ (siehe Definition [Sch20, 3.3.1]).

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist wegen $D^0 = \{0\}$ und $\mathbb{S}^{-1} = \varnothing$ trivial. Gelte $n \geq 1$. Nehmen wir an, dass $r\colon D^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ eine stetige Abbildung mit $r|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ist. In anderen Worten ist das linke der beiden folgenden Diagramme kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\ i\ } & D^n \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ & & \mathbb{S}^{n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\mathrm{H}_{n-1}(i)} & \mathrm{H}_{n-1}(D^n) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_{n-1}(r)} \\ & & \mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

Das rechte Diagramm entsteht aus dem linken durch Anwenden des Funktors $\mathrm{H}_{n-1}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ und ist deswegen ebenfalls kommutativ. Dies widerspricht aber Satz 4.5.1, denn

- im Fall $n \geq 2$ gilt $\mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ und $\mathrm{H}_{n-1}(D^n) = 0$;
- im Fall $n = 1$ gilt $\mathrm{H}_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}^2$ und $\mathrm{H}_0(\mathrm{D}^n) \cong \mathbb{Z}$, es gibt aber keinen surjektiven Gruppenmorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$. □

Satz 4.5.8 (Fixpunktsatz von Brouwer)**.** *Jede stetige Selbstabbildung $f\colon D^n \to D^n$ der abgeschlossenen Vollkugel besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Wie im Beweis von [Sch20, Satz 3.3.7] erhalten wir sonst eine Retraktion $D^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, was Korollar 4.5.7 widerspricht.

(In [Mun84, Theorem 21.2] findet sich ein Alternativbeweis, der nur das elementare Lemma 4.15.2 benutzt und wohl etwas einfacher ist: Die Stetigkeit der obigen Retraktion muss nicht bewiesen werden.) □

4.5.9. An dieser Stelle schließt sich Abschnitt 4.15 ebenfalls sinnvoll an (von den drei Beweisen von Satz 4.15.5 ist jedoch dann nur derjenige mit Mayer-Vietoris mit dem aktuellen Wissen verständlich).

4.6. **Homologie von Flächen.**

Definition 4.6.1. Eine Fläche ist eine topologische Mannifaltigkeit der Dimension zwei.

4.6.2. Wir erinnern an die Klassifikation zusammenhängender kompakter (= geschlossener) Flächen [Sch20, Satz 3.10.22] durch zwei abzählbare Familien. Jede solche Fläche ist zu genau einer aus der folgenden Liste homöomorph:

- einer 2-Sphäre mit $g \geq 0$ Henkeln[47];
- die verbundene/zusammenhängende Summe von $g \geq 1$ reell projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ (siehe [Wik20, Verbundene Summe])[48]. Für $g = 1$ erhält man die Kleinsche Flasche.

[47] Es geht hier nur um die Oberfläche. Wie man die Henkel einklebt ist unerheblich, da alle Möglichkeiten homöomorphe Flächen liefern.

[48] Auch hier ist es unerheblich, wie man die verbundenen Summen bildet: Alle Möglichkeiten liefern homöomorphe Flächen.

Eine Sphäre mit $g \geq 1$ Henkeln ist homöomorph zur verbundenen Summe von g Tori $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und zum topologischen Raum, der dem Flächenwort $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ zugeordnet ist (siehe [Sch20, Definition 3.10.17]). Die verbundene Summe von $g \geq 1$ reell projektiven Ebenen ist homöomorph zum topologischen Raum des Flächenworts $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$.

Satz 4.6.3 (singuläre Homologie zusammenhängender kompakter Flächen)**.**

(a) Ist X eine 2-Sphäre mit $g \geq 0$ Henkeln, so gilt

$$\mathrm{H}_q(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{falls } q = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Ist X eine verbundene Summe von $g \geq 1$ reell projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, so gilt

$$\mathrm{H}_q(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 2, \\ \frac{\mathbb{Z}^g}{\mathbb{Z}(2,\dots,2)} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } q = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Achtung, arbeitet man hier statt mit ganzzahligen Koeffizienten mit Koeffizienten in einem beliebigen Modul M über einem Ring R, wie in 4.9.1 beschrieben, so gilt

$$\mathrm{H}_q(X; M) \cong \begin{cases} \{m \in M \mid 2m = m + m = 0\} & \text{falls } q = 2, \\ \frac{M^{\oplus g}}{\{(2m,\dots,2m) \mid m \in M\}} & \text{falls } q = 1, \\ M & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die zweite Homologie ist also die 2-Torsionsuntergruppe von M.

Kleine Beispiele hier oder nach/während Beweis explizit erklären:

- Henkelsphäre: $g = 0$ Sphäre, $g = 1$ Torus, $g = 2$ verbundene Summe zweier Tori (Schneide Fundamentalpolygon in zwei Teile, jeder Teil liefert Torus mit Loch, verklebe).
- Verbundene Summe von g reell projektiven Ebenen: $g = 1$ reell projektive Ebene, $g = 2$ Kleinsche Flasche.

Beweis. Der folgende Beweis ähnelt dem Beweis von [Sch20, Satz 3.10.22], jedoch verwenden wir statt des Satzes von Seifert-van Kampen den Satz über die Mayer-Vietoris-Sequenz (die Menge Z° dort nennen wir unten V, die Menge $F(w) \setminus z$ dort ist ein mögliches U unten).

(Die Aussage über H_0 ist jeweils klar, die über H_1 folgt aus dem Hurewicz-Isomorphismus (Satz 3.4.2) zusammen mit den Isomorphismen (3.10.4) und (3.10.5) vom Ende des Beweises von [Sch20, Satz 3.10.22], sobald man $X = F(w)$ wie unten annimmt. Wir geben jedoch einen direkteren Beweis.)

(a): Der Fall der Sphäre ohne Henkel wurde bereits in Satz 4.5.1 bewiesen. Gelte also $g \geq 1$. Male Bilder für $g = 1, 2$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $X = F(w)$ für ein Flächenwort

$$w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

gilt (siehe [Sch20, Satz 3.10.22]). Der Raum $X = F(w)$ entsteht aus dem „Fundamentalpolygon“ durch geeignete Identifizierung von Kanten; die Bilder der Kanten des Fundamentalpolygons bezeichnen wir als „Kantengerüst“. Seien

- U das „zu einer offenen Teilmenge verdickte Kantengerüst“ (welches das Kantengerüst als Deformationsretrakt hat) und
- V das Komplement des Kantengerüsts.

Dann ist $X = F(w) = U \cup V$ eine offene Überdeckung. Wir bilden die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 4.4.1).

Weil V homöomorph zum Inneren des Fundamentalpolygons und somit zusammenziehbar ist, lebt $\mathrm{H}(V)$ nur im Grad Null und ist dort $\mathbb{Z}$. Weil U das Kantengerüst als Deformationsretrakt hat, ist dessen Inklusion nach U eine Homotopieäquivalenz, induziert also Isomorphismen auf allen singulären Homologien. Das Kantengerüst ist ein Bouquet von $2g$ Kreislinien $\mathbb{S}^1$ (denn das Alphabet unseres Flächenworts besteht aus den $2g$ Buchstaben $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ und alle Ecken des Fundamentalpolygons gehen auf denselben Punkt in X), so dass wir seine Homologie nach Aufgabe 4.5.4 kennen: Sie ist $\mathbb{Z}$ in Grad Null, isomorph zu $\mathbb{Z}^{2g}$ in Grad Eins und verschwindet in allen anderen Graden. Genauer ist $[a_1], [b_1], [a_2], [b_2], \ldots, [a_g], [b_g]$ eine $\mathbb{Z}$-Basis der ersten Homologie, wobei wir die mit $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ markierten Kanten unseres Fundamentalpolygons in offensichtlicher Weise als 1-Zykel im Kantengerüst auffassen. Ausserdem ist $U \cap V$ offensichtlich homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1$. Mit diesen Erkenntnissen wird unsere Mayer-Vietoris-Sequenz zu einer exakten Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_2 X & & & & \\
& \xrightarrow{\widetilde{\partial}_2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(i_U)} & \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}[b_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[a_g] \oplus \mathbb{Z}[b_g] & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(j_U)} & \mathrm{H}_1 X & & \\
& \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\binom{1}{1}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_0(j_U) & -\mathrm{H}_0(j_V) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_0 X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Die linke Abbildung in der unteren Zeile ist injektiv, weshalb $\widetilde{\partial}_1 = 0$ folgt. Weiter gilt $\mathrm{H}_1(i_U) = 0$, denn der „Gegenuhrzeigersinn"-Erzeuger von $\mathbb{Z} \cong \mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathrm{H}_1(U \cap V)$ wird auf $[a_1] + [b_1] - [a_1] - [b_1] + \cdots - [b_g] = 0$ abgebildet, denn er kann in U nach außen auf das Kantengerüst geschoben werden (die Homologieklasse ändert sich dabei nicht wegen Homotopieinvarianz); (hier verwenden wir den roten Text in 4.5.2, der einerseits einen Erzeuger beschreibt und andererseits erklärt, wie man einen solchen aufsplitten und verändern darf). Also sind $\widetilde{\partial}_2$ und $\mathrm{H}_1(j_U)$ Isomorphismen. Natürlich gilt $\mathrm{H}_0 X \cong \mathbb{Z}$. Da in der obigen Sequenz in den linken beiden Spalten in allen Graden ≥ 2 nur Nullen stehen, folgt $\mathrm{H}_p(X) = 0$ für alle $p \geq 3$.

Male Bild im Fall $g = 2$, sowohl als verbundene Summe zweier Tori als auch als Sphäre mit zwei Henkeln. Erkläre, wo die Erzeuger liegen.

Erkläre auch den Fundamentalzykel! D. h. rate ihn und zeige (per feine Ketten), dass er unter $\widetilde{\partial}_2$ wie gewünscht abgebildet wird. War gar nicht so leicht: Man zerlegt das Fundamentalpolygon in Kuchenstücke alias 2-Simplizes (im Video Quadrat in vier Dreiecke zerlegt). Um das Bild unter dem MV-Verbindugsmorphismus auszurechnen, muss man einmal baryzentrisch unterteilen (habe dies skizziert, dabei zuerst Nummerierungsfehler gemacht, den ich später bemerkt habe), vgl. 4.4.2, dann aufteilen in Summand, der von U kommt, und Summand, der von V kommt...

(b) Der Beweis geht analog wie oben. Wir können ohne Einschränkung $X = F(w)$ für $w = a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_g a_g$ annehmen. Mal Bild für $g = 1$, reell projektive Ebene, und $g = 2$, Kleinsche Flasche. Der Schnitt $U \cap V$ ist nun ein Bouquet von g Kreislinien. Die Mayer-Vietoris-Sequenz liefert die folgende exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_2 X & & & & \\
& \xrightarrow{\widetilde{\partial}_2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(i_U)} & \mathbb{Z}[a_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[a_g] & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(j_U)} & \mathrm{H}_1 X & & \\
& \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\binom{1}{1}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_0(j_U) & -\mathrm{H}_0(j_V) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_0 X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Die linke Abbildung in der unteren Zeile ist injektiv, weshalb $\widetilde{\partial}_1 = 0$ folgt. Weiter gilt (für $1 \in \mathbb{Z} \cong \mathrm{H}_1(U \cap V)$ den Gegenuhrzeigersinn-Erzeuger)

$$\mathrm{H}_1(i_U)(1) = [a_1] + [a_1] + [a_2] + [a_2] + \cdots + [a_g] + [a_g].$$

Wir folgern einerseits $\mathrm{H}_2X = 0$, weil $\mathrm{H}_1(i_U)$ injektiv ist, und andererseits

$$\mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}^g}{\mathbb{Z}(2,\dots,2)} \cong \frac{\mathbb{Z}[a_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_g]}{\langle 2[a_1] + 2[a_2] + \dots + 2[a_g] \rangle} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1X,$$

da $\widetilde{\partial}_1 = 0$. Natürlich gilt $\mathrm{H}_0X \cong \mathbb{Z}$. Da in der obigen Sequenz in den linken beiden Spalten in allen Graden ≥ 2 nur Nullen stehen, folgt $\mathrm{H}_p(X) = 0$ für alle $p \geq 3$.

Bei Koeffizienten in einem R-Modul M ist $\mathrm{H}_1(i_U)$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_1(i_U)\colon M \to M[a_1] \oplus \dots \oplus M[a_g] \cong M^{\oplus g} := M^g, \\ m \mapsto (2m, 2m, \dots, 2m). \end{aligned}$$

Sie ist im allgemeinen nicht injektiv (etwa für $M = \mathbb{F}_2 = R$). Ihr Kern ist (isomorph zu) $\mathrm{H}_2(X; M)$, ihr Kokern ist (isomorph zu) $\mathrm{H}_1(X; M)$.

Male Bild im Fall $g = 1$ und $g = 2$. Erkäre jeweils Erzeuger. Erkläre 2-Torsion!

Erkläre, warum es keinen Fundamentalzykel gibt! □

4.6.4. Sei $w = a(1)^{\varepsilon(1)}a(2)^{\varepsilon(2)} \dots a(2r)^{\varepsilon(2r)}$ ein Flächenwort über einem r-elementigen Alphabet A. Die wesentliche Idee des obigen Beweises funktioniert, falls beim Übergang vom Fundamentalpolygon zum topologischen Raum $X = F(w)$ alle Ecken auf denselben Punkt gehen und somit das Kantengerüst von X ein Bouquet von Kreislinien ist (wir hätten den Beweis auch in dieser Allgemeinheit beginnen können): Dann erhalten wir eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_2X & & & & \\ & \widetilde{\partial}_2 \searrow & & & & & & & \\ & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(i_U)} & \bigoplus_{a\in A} \mathbb{Z}[a] & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(j_U)} & \mathrm{H}_1X & & \\ & & & \widetilde{\partial}_1 \searrow & & & & & \\ & & & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\binom{1}{1}} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{H}_0(j_U) & -\mathrm{H}_0(j_V)\end{pmatrix}} & \mathrm{H}_0X \longrightarrow 0. \end{array}$$

Die linke Abbildung in der unteren Zeile ist injektiv, weshalb $\widetilde{\partial}_1 = 0$ folgt. Also ist H_2X der Kern bzw. H_1X ist der Kokern der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_1(i_U)\colon \mathbb{Z} \to \bigoplus_{a\in A} \mathbb{Z}[a] \cong \mathbb{Z}^A \cong \mathbb{Z}^r, \\ 1 \mapsto \varepsilon(1)[a(1)] + \varepsilon(2)[a(2)] + \dots \varepsilon(2r)[a(2r)]. \end{aligned}$$

Das Element rechts unten ist die „additive Version“ von w. Natürlich gilt $\mathrm{H}_0X = \mathbb{Z}$ und $\mathrm{H}_{\geq 3}X = 0$.

Kleinsche Flasche, anschauliche Darstellung mit Quadrat, dann Zylinder und dann Randkreise falsch herum verkleben. Erklärt $\mathbb{Z}$-Basis H_1 besonders anschaulich.

Aufgabe 4.6.5. Berechne die singuläre Homologie einer Sphäre mit $g = 2$ Henkeln direkt mit Mayer-Vietoris (ohne Darstellung dieser Fläche durch ein Flächenwort)! Beschreibe $\mathbb{Z}$-Basen der Homologiegruppen H_0, H_1 und H_2 geometrisch. Hm, mir schwebte da eigentlich sowas wie in 4.8.14 beschrieben vor, was aber an dieser Stelle noch nicht verfügbar ist ...

Hinweis: Starte mit der Sphäre; entferne vier offene Kreisscheiben und klebe zwei Zylinder an, indem deren Ränder mit den Rändern der offenen Kreisscheiben identifiziert werden. Nimm als Menge U eine offene Verdickung der Sphäre ohne die Kreisscheiben und als Menge V eine offene Verdickung der disjunkten Vereinigung der beiden Zylinder. Bestimme explizit die „linken horizontalen“ Morphismen in der Mayer-Vietoris-Sequenz. Spalte die lange exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen auf (was könnte damit gemeint sein?). Dies liefert eine kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z}^g \hookrightarrow \mathrm{H}_1 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^g$. Folgere $\mathrm{H}_1 \cong \mathbb{Z}^{2g}$ (beispielsweise kann man eine $\mathbb{Z}$-Basis von H_1 konstruieren, indem man die Standard-$\mathbb{Z}$-Basis der Untergruppe $\mathbb{Z}^g$ mit Lifts der Elemente der Standard-$\mathbb{Z}$-Basis des Quotienten $\mathbb{Z}^g$ kombiniert).[49]

[49] Abstrakter folgt dies aus der Tatsache, dass jede kurze exakte Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ abelscher Gruppen mit C einer freien (oder allgemeiner projektiven) abelschen Gruppe spaltet.

Beschreibe explizit 1-Zykel, die eine $\mathbb{Z}$-Basis von H_1 bilden (hierzu ist der Verbindungsmorphismus mit Hilfe des Satze über feine Ketten zu analysieren).

Bemerkung: Dasselbe Verfahren funktioniert für $g \geq 1$ Henkel.

Aufgabe 4.6.6. Berechne die singuläre Homologie der Kleinschen Flasche mit Mayer-Vietoris und der in [Wik20, Mayer-Vietoris sequence, Klein bottle] erklärten Überdeckung durch zwei Möbiusbänder.

Hier http://www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/karte.php?ID=9 ein nettes Modell.

Ende der 11. Vorlesung am 03.12.2020. Ende der 12. Vorlesung am 04.12.2020 (war eher eine lange Vorlesung...).

Hausaufgaben:

(1) (a) Aufgabe 4.4.3
    (b) Aufgabe 4.4.4 (Mayer-Vietoris simplizial)
(2) (a) Aufgabe 4.5.3 (gewisse Überdeckungen von $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{S}^2$ existieren nicht)
    (b) Aufgabe 4.5.4 (Bouquet von Kreislinien und ähnliches)
(3) mein Favorit diese Woche (beim Rechnen nicht die Geometrie vergessen!): Aufgabe 4.6.5 (singuläre Homologie der Sphäre mit zwei Henkeln, direkt ohne Flächenwort)
(4) Aufgabe 4.6.6 (singuläre Homologie der Kleinschen Flasche, ebenfalls direkt ohne Flächenwort)

4.7. **Ausschneidung.**

Satz 4.7.1 (Ausschneidung)**.** *Seien (X, Z) ein Raumpaar und $E \subset Z$ eine Teilmenge mit $\overline{E} \subset Z^\circ$, wobei Abschluss und Inneres in X gebildet werden. Dann liefert die Inklusion $X \setminus E \hookrightarrow X$ oder genauer der entsprechende Morphismus $(X \setminus E, Z \setminus E) \hookrightarrow (X, Z)$ von Raumpaaren Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_q(X \setminus E, Z \setminus E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X, Z) \tag{4.7.1}$$

auf den relativen Homologiegruppen für alle $q \in \mathbb{Z}$.

4.7.2. Gleichzeitiges „Ausschneiden“ von E aus X und Z ändert die relative Homologie nicht. In Anwendungen sind oft Z offen in X und E abgeschlossen in X. Dann vereinfacht sich die Bedingung $\overline{E} \subset Z^\circ$ zu $E \subset Z$.

Beweis. Betrachte die Überdeckung $\mathcal{V} = \{Z, X \setminus E\}$ von X. Dann gilt $X = Z^\circ \cup (X \setminus E)^\circ$ wegen $(X \setminus E)^\circ = X \setminus \overline{E}$ (siehe [Sch20, Lemma 2.5.6]) und unserer Annahme $\overline{E} \subset Z^\circ$, so dass der Satz über feine Ketten 4.3.10 anwendbar ist und zeigt, dass $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \subset \mathrm{S}X$ ein Quasi-Isomorphismus ist.

Zunächst die gestrichelten Pfeile ignorierend, betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{S}(Z \setminus E) & \xrightarrow{\binom{1}{1}} & \mathrm{S}Z \oplus \mathrm{S}(X \setminus E) & \xrightarrow{(1\ -1)} & \mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)} & & \downarrow \\
\mathrm{S}(X \setminus E) & \xrightarrow{\binom{1}{1}} & \mathrm{S}X \oplus \mathrm{S}(X \setminus E) & \xrightarrow{(1\ -1)} & \mathrm{S}X \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1\ 0)} & & \downarrow \\
\mathrm{S}(X \setminus E, Z \setminus E) & \dashrightarrow & \mathrm{S}(X, Z) & \dashrightarrow & \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}
\end{array}$$

in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ mit hoffentlich offensichtlichen, teilweise in Matrixschreibweise gegebenen Abbildungen, wobei wir Elemente der direkten Summen als Spaltenvektoren schreiben; die horizontale Abbildung links oben bildet etwa s auf $\binom{1}{1} s = \binom{s}{s}$ ab. Die Spalten dieses Diagramms sind offensichtlich kurze exakte Sequenzen. Dies samt Kommutativität zeigt, dass die mittleren horizontalen Abbildungen die gestrichelten horizontalen Abbildungen induzieren, so dass die beiden unteren Quadrate kommutativ sind. Die linke horizontale Abbildung ist die in 4.1.9 erklärte Abbildung für unseren Morphismus von Raumpaaren.

Die oberen beiden Zeilen dieses Diagramms sind ebenfalls kurze exakte Sequenzen (offensichtlich bzw. Aufgabe 4.4.3 für die Überdeckungen $\mathcal{V}$ und $\{X, X \setminus E\}$).

Das komponentenweise angewandte Neunerlemma B.4.3 (oder seine Version B.4.5 für Komplexe) zeigt nun, dass auch die dritte Zeile eine kurze exakte Sequenz ist. Da nach dem Satz über feine Ketten 4.3.10 der Komplex $\frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X}$ azyklisch ist, zeigt die lange exakte Homologiesequenz (Satz B.3.4) zur dritten Zeile, dass

$\mathrm{S}(X \setminus E, Z \setminus E) \hookrightarrow \mathrm{S}(X, Z)$ ein Quasi-Isomorphismus ist. Die induzierten Isomorphismen auf den Homologien sind die behaupteten Isomorphismen (4.7.1). □

4.7.1. *Anwendungen der Ausschneidung.*

4.7.3. Bezeichne $\partial\Delta_n$ den topologischen Rand des n-ten Standardsimplex $\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in [0,1]^{n+1} \mid \sum x_i = 1\}$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$, d. h.

$$\partial\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für ein } i\}.$$

4.7.4. Offensichtlich gibt es einen Homöomorphismus $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D^n$, der einen Homöomorphismus $\partial\Delta_n \xrightarrow{\sim} \partial D^n = \mathbb{S}^{n-1}$ induziert (stereographische Projektion).[50] Jeder solche Homöomorphismus induziert Isomorphismen $\mathrm{H}_q(\partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\mathbb{S}^{n-1})$ auf den Homologiegruppen bzw. $\mathrm{H}_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1})$ auf den relativen Homologiegruppen (3.2.4, 4.1.9). Dies sorgt für die „doppelte Formulierung desselben Resultats“ in Satz 4.7.5.

Satz 4.7.5. *Sei $n \geq 0$. Die singulären Homologiegruppen der Standardsimplizes relativ zu ihrem Rand sind durch*

$$\mathrm{H}_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\mathrm{id}_{\Delta_n}] \cong \mathbb{Z} & \textit{falls } q = n, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$

gegeben, wobei id_{Δ_n} der tautologische n-Simplex ist.

Analog sind die singulären Homologiegruppen der Vollkugeln relativ zu ihrem Rand durch

$$\mathrm{H}_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{falls } q = n, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$

gegeben.

4.7.6. Den Fall $n = 1$ haben wir in Beispiel 4.2.2 von Hand erledigt.

Beweis. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ gilt $\Delta_0 = \{1\} \supset \partial\Delta_0 = \varnothing$ und somit $\mathrm{H}_q(\Delta_0, \partial\Delta_0) = \mathrm{H}_q(\{1\}, \varnothing) = \mathrm{H}_q(\{1\})$, die Aussage ist also trivial nach Beispiel 3.1.21.

Induktionsschritt von $n \geq 0$ auf $n+1$: Wir fassen $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ als Teilmenge auf vermöge der $(n+1)$-ten Seiteninklusion $k_{n+1} \colon \Delta_n \to \Delta_{n+1}$, $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, x_n, 0)$. Die Ecke $p := e_{n+1}$ von Δ_{n+1} liegt dann Δ_n gegenüber. Sei Λ_{n+1} die Vereinigung aller Seitenflächen von Δ_{n+1}, die p enthalten. Male Bilder!

Die Beweisidee wird durch Abbildung 2 (und die Isomorphismen in (4.7.5)) illustriert: Die Inklusionen der drei rechts untereinanderstehenden Raumtripel induzieren Isomorphismen auf der relativen Homologie. Im Raumtripel in der obersten Zeile verschwindet die relative Homologie des äußeren Paares, weswegen die $q+1$-te relative Homologie des linken Paares unter dem Randoperator isomorph auf die q-te des rechten Paares geht.

---

[50] Wer dies konkret sehen möchte: Betrachte den Homöomorphismus

$$\underbrace{(-e_1 - e_2 - \cdots - e_n, e_1, e_2, \ldots, e_n)}\colon \Delta_n \xrightarrow{\sim} K := \mathrm{konv}\big(-(e_1 + e_2 + \cdots + e_n), e_1, e_2, \ldots, e_n\big) \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei die Koordinaten von $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von 0 bis n durchnummeriert sind und die von $\mathbb{R}^n$ von 1 bis n. Weiter sei

$$\varphi \colon K \xrightarrow{\sim} D_n$$

die „stereographische Projektion“ vom Ursprung $0 = -\frac{1}{n+1}(e_1 + \cdots + e_n) + \frac{1}{n+1}e_1 + \ldots \frac{1}{n+1}e_n$, der im Inneren unserer konvexen Hülle liegt, auf die n-dimensionale Kreisscheibe D^n. Die Stetigkeit dieser Abbildung sieht man wie folgt. Zunächst ist $\varphi' := \varphi|_{\partial K} \colon \partial K \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$, sicherlich stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus nach [Sch20, Satz 2.7.15]. Damit kennen wir den Streckfaktor in jeder Richtung und es gilt

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\left\| \varphi'^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich in x stetig, insbesondere im Ursprung. Damit ist φ stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus nach dem soeben zitierten Resultat. Die Verknüpfung unsere beiden Homöomorphismen ist der gesuchte Homöomorphismus $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D_n$.

Allgemeiner gilt (Übung 1.4.12 in Soergel, Topologie und kompakte Gruppen): Sind $K, L \subset \mathbb{R}^n$ zwei nichtleere offene konvexe Teilmengen, so gibt es einen Homöomorphismus $K \xrightarrow{\sim} L$. Sind K und L zusätzlich beschränkt, so gibt es sogar einen Homöomorphismus $\overline{K} \xrightarrow{\sim} \overline{L}$ zwischen ihren Abschlüssen, der einen Homöomorphimsus zwischen ihren Rändern induziert.

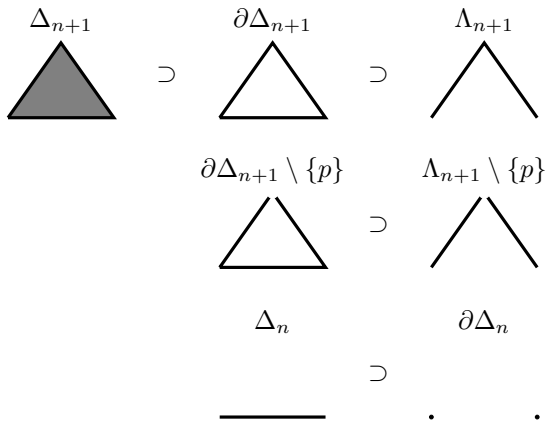


ABBILDUNG 2. Illustration zum Beweis von Satz 4.7.5 im Fall $n = 1$

Wir geben zwei Begründungen, warum die Inklusion $(\Delta_n, \partial\Delta_n) \subset (\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\})$ von Raumpaaren Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\}) \tag{4.7.2}$$

auf allen relativen Homologien induziert:[51]

(a) Beide (an unserer Inklusion von Raumpaaren beteiligten) Inklusionen $\Delta_n \subset \partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}$ und $\partial\Delta_n \subset \Lambda_{n+1} \setminus \{p\}$) sind Inklusionen von Deformationsretrakten, somit Homotopieäquivalenzen (siehe [Sch20, Lemma 3.5.4]), und induzieren also Isomorphismen auf der singulären Homologie nach 3.3.4. Nun verwende Korollar 4.2.3

(b) (Gefällt mir eigentlich besser, aber streng genommen ist nicht alles definiert.) Mit den naheliegenden Definitionen ist das Raumpaar $(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ ein „Deformationsretrakt von Raumpaaren“ des Raumpaares $(\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\})$, somit ist unsere Inklusion von Raumpaaren eine „Homotopieäquivalenz von Raumpaaren“ und induziert somit Isomorphismen auf der relativen Homologie nach Aufgabe 4.1.11.

Ausschneiden von $\{p\}$ aus dem Raumpaar $(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ liefert nach Satz 4.7.1 Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \tag{4.7.3}$$

auf allen Homologien. Schließlich liefert das Raumtripel $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ nach 4.2.4 eine lange exakte Homologiesequenz

$$\begin{aligned} &\ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \\ &\xrightarrow{\widetilde{\partial}_{q+1}} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \longrightarrow \mathrm{H}_q(\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \longrightarrow \mathrm{H}_q(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \\ &\xrightarrow{\widetilde{\partial}_q} \mathrm{H}_{q-1}(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \longrightarrow \ldots \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

in der alle Terme der mittleren Spalte Null sind, also $\mathrm{H}_q(\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt: Dies folgt aus der langen exakten Homologie-Sequenz 4.2.1 für das Raumpaar $(\Lambda_{n+1}, \Delta_{n+1})$, denn alle Morphismen $\mathrm{H}_q(\Lambda_{n+1}) \to \mathrm{H}_q(\Delta_{n+1})$ sind Isomorphismen, denn Λ_{n+1} und Δ_{n+1} sind zusammenziehbar, vgl. Beispiel 3.3.2. Die lange exakte Sequenz (4.7.4) schrumpft deswegen zu Isomorphismen

$$\widetilde{\partial}_{q+1} \colon \mathrm{H}_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

[51] Ausschneidung 4.7.1 ist hier nicht andwendbar!

zusammen. Zusammengefasst haben wir Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(\Delta_n,\partial\Delta_n) \xrightarrow[\sim]{(4.7.2)} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}\setminus\{p\},\Lambda_{n+1}\setminus\{p\}) \xrightarrow[\sim]{(4.7.3)} \mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1},\Lambda_{n+1}) \tag{4.7.5}$$

$$\widetilde{\partial}_{q+1}\uparrow\sim$$

$$\mathrm{H}_{q+1}(\Delta_{n+1},\partial\Delta_{n+1})$$

Per Induktion zeigt dies, dass die Homologie rechts unten nur für $q+1=n+1$ von Null verschieden und dann isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Im Fall $q=n$ wird der Erzeuger $[\mathrm{id}_{\Delta_n}]$ von $\mathrm{H}_n(\Delta_n,\partial\Delta_n)$ unter der Verknüpfung der beiden horizontalen Abbildungen auf $[k_{n+1}]\in\mathrm{H}_n(\partial\Delta_{n+1},\Lambda_{n+1})$ abgebildet. Der potentielle Erzeuger $[\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}]$ von $\mathrm{H}_{n+1}(\Delta_{n+1},\partial\Delta_{n+1})$ wird unter dem Randisomorphismus $\widetilde{\partial}_{q+1}$ auf die Homologieklasse von $\partial\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i k_i$ abgebildet, welche mit der Homologieklasse von $(-1)^{n+1}k_{n+1}$ übereinstimmt (die beiden Elemente stimmen genauer schon in $\mathrm{S}_n(\Delta_{n+1},\Lambda_{n+1})$ überein), denn die anderen Summanden haben Bild in Λ_{n+1}, und ist somit in der Tat ein Erzeuger.

Die Behauptung für $\mathrm{H}_q(D^n,\mathbb{S}^{n-1})$ folgt aus 4.7.4. □

Korollar 4.7.7. *Die singulären Homologiegruppen des „n-dimensionalen" Randes $\partial\Delta_{n+1}$ des $(n+1)$-ten Standardsimplex Δ_{n+1} sind wie folgt gegeben: Im Fall $n\geq 1$ gilt*

$$\mathrm{H}_q(\partial\Delta_{n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\partial\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}]\cong\mathbb{Z} & \text{falls } q=n,\\ \mathbb{Z}[e_0]\cong\mathbb{Z} & \text{falls } q=0,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Hier ist $\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}\in\mathrm{Top}(\Delta_{n+1},\Delta_{n+1})\subset\mathrm{S}_{n+1}(\Delta_{n+1})$ der tautologische $(n+1)$-Simplex; wir fassen seinen Rand als Element von $\mathrm{S}_n(\partial\Delta_{n+1})$ auf.

Im Fall $n=0$ besteht der Rand $\partial\Delta_1=\{e_0,e_1\}$ des 1-Simplex aus zwei Punkten und seine einzige nichtverschwindende Homologie ist $\mathrm{H}_0(\partial\Delta_1)=\mathbb{Z}[e_0]\oplus\mathbb{Z}[e_1]\cong\mathbb{Z}^2$.

4.7.8 (Homologie der Sphären)**.** Satz 4.5.1 folgt sofort aus Korollar 4.7.7 mit Hilfe von 4.7.4. Als Zusatzinformation bekommt man einen Erzeuger von $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n)\cong\mathbb{Z}$: Sei $p\colon\partial\Delta_{n+1}\xrightarrow{\sim}\mathbb{S}^n$ ein Homöomorphismus (beispielsweise herrührend von dem Homöomorphismus stereographische Projektion $\Delta_{n+1}\xrightarrow{\sim}D^{n+1}$ aus Fußnote 50). Setze $e:=\mathrm{S}_n(p)(\partial\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}})$ Dann gilt $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n)=\mathbb{Z}[e]$.

Beweis. Der Fall $n=0$ ist klar. Im Fall $n\geq 1$ folgt dies aus Satz 4.7.5 und der langen exakten Homologie-Sequenz 4.2.1 des Raumpaars $(\Delta_{n+1},\partial\Delta_{n+1})$ (die mittlere Spalte lebt nur im Grad Null, die rechte nur in den beiden Graden 0 und $n+1\geq 2$). □

Definition 4.7.9. Ist x ein Punkt eines topologischen Raums, so heißt

$$\mathrm{H}_q(X,X\setminus\{x\})$$

q-te lokale Homologie von X bei x (vgl. [Wik20, Relative homology, Local homology]). Ich führe (vorerst?) keine eigenständige Notation dafür ein.

Korollar 4.7.10. *Für alle $n\geq 0$ und $x\in\mathbb{R}^n$ gilt für die lokale Homologie von $\mathbb{R}^n$ bei x*

$$\mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{x\})\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{falls } q=n,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

[52] *Invarianz der Dimension: Insbesondere sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ für $m\neq n$ nicht homöomorph.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $x=0$ annehmen. Die Inklusion $D^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ konvexer Mengen liefert Isomorphismen auf den singulären Homologien (die beide nur in Grad Null leben und dort isomorph zu $\mathbb{Z}$ sind). Da $\mathbb{S}^{n-1}$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ist, liefert die Inklusion $\mathbb{S}^{n-1}\hookrightarrow\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$)

[52] Der Beweis zeigt auch, wie man einen Erzeuger von $\mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{x\})$ bekommt.

Isomorphismen zwischen den singulären Homologien. Die Inklusion $(D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ liefert somit nach Korollar 4.2.3 Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$. Nun verwende Satz 4.7.5.

Die letzte Aussage ist klar, denn jeder Homöomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ induziert einen Isomorphismus $\varphi\colon (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\})$ von Raumpaaren für beliebiges $x \in \mathbb{R}^m$. Nimm die m-te relative Homologie. □

Aufgabe 4.7.11. Die (im Beweis von Korollar 4.7.10 betrachtete) Inklusion $i\colon (D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ist keine „Homotopieäquivalenz von Raumpaaren“, denn es gibt nicht einmal einen Morphismus $g\colon (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to (D^n, \mathbb{S}^{n-1})$ von Raumpaaren, so dass $g \circ i$ homotop zur Identität von $(D^n, \mathbb{S}^{n-1})$ ist (*homotop* ist hier im Sinne von Aufgabe 4.1.11 zu verstehen).

(Lösung auskommentiert)

Aufgabe 4.7.12.

(a) Ist u ein Punkt einer (nichtleeren) offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\mathrm{H}_q(U, U \setminus \{u\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Ausschneidungssatz 4.7.1 und Korollar 4.7.10.

(b) Wenn nichtleere Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph sind, so gilt $m = n$.

(c) Sind allgemeiner M und N homöomorphe nichtleere topologische Mannigfaltigkeit der Dimensionen m und n (siehe [Sch20, Definition 3.10.18]), so gilt $m = n$.

(d) In jeder Triangulierung einer nichtleeren m-dimensionalen Mannigflatigkeit kommen nur Simplizes der Dimension $\leq m$ vor: Sei $f\colon \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} M$ eine Triangulierung einer nichtleeren m-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit M. Wer mag, darf zusätzlich annehmen, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\leq s}$ gibt. Dann gilt $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\leq m}$.

Bemerkung: Wer dies mit den aktuellen Mitteln ohne die Zusatzannahme beweisen kann, bekommt Bonuspunkte! Wir werden die allgemeine Aussage später als Korollar 5.2.11 beweisen.

Aufgabe 4.7.13 (Relative Homologie als (reduzierte) Homologie der Einpunktidentifizierung)**.** Sei (X, A) ein Raumpaar. Sei X/A die Menge, die aus X entsteht, indem man A zu einem Punkt identifiziert.[53] Wir versehen X/A mit der Finaltopologie bezüglich der offensichtlichen Abbildung $X \twoheadrightarrow X/A$.

Sei $A \subset X$ abgeschlossen und existiere eine Teilmenge $U \subset X$ mit $A \subset U^\circ$, so dass die Inklusionen $A \hookrightarrow U$ und $A/A \hookrightarrow U/A$ Isomorphismen auf allen singulären Homologien induzieren (diese Inklusionen könnten beispielsweise Homotopieäquivalenzen sein – dies ist beispielsweise der Fall, wenn A ein Deformationsretrakt von U ist[54]). Dann ist für alle $q \in \mathbb{Z}$ die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q(X, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X/A, A/A).$$

Folgere für alle $q \neq 0$ kanonische Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(X, A) \cong \mathrm{H}_q(X/A).$$

Bemerkung: Der letzte kanonische Isomorphismus gilt auch für $q = 0$, wenn wir die rechte Seite durch die später definierte reduzierte singuläre Homologie $\widetilde{\mathrm{H}}_q(X/A)$ von X/A ersetzen (siehe 5.1.10).

---

[53] Formal betrachtet man die Äquivalenzrelation $x \sim y \iff (x = y \text{ oder } (x \in A \text{ und } y \in A))$ und setzt $X/A := X/\!\sim$.

[54] Dies wird im Beweis von [Hat02, Proposition 2.22] einfach behauptet: „The deformation retraction of V onto A induces a deformation retraction of V/A onto A/A ... “. Das stimmt zwar, scheint mir aber nicht so offensichtlich – ich denke, man sollte dafür ein Resultat wie Proposition C.0.4 zitieren, aus dem es in offensichtlicher Weise folgt.

Hinweis: Betrachte das folgende kommutative Diagramm von Raumpaaren (für implizit verwendete topologische Feinheiten beachte [Sch20, Aufgabe 2.8.50]).

$$\begin{array}{ccccc} (X,A) & \longrightarrow & (X,U) & \longleftarrow & (X\setminus A, U\setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (X/A, A/A) & \longrightarrow & (X/A, U/A) & \longleftarrow & (X/A\setminus A/A, U/A\setminus A/A) \end{array}$$

Bemerkung: Ein gutes Beispiel zur Veranschaulichung ist $X = D^2 \supset A = \mathbb{S}^1$ und U eine ε-Umgebung von A.

Ende der 13. Vorlesung am 10.12.2020.

4.8. **Vergleichsisomorphismus zwischen simplizialer Homologie eines Simplizialkomplexes und singulärer Homologie seiner geometrischen Realisierung.**

4.8.1. Ziel dieses Abschnitts ist Satz 4.8.11: Die simpliziale Homologie eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ stimmt bis auf einen kanonischen natürlichen Isomorphismus mit der singulären Homologie seiner geometrischen Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ überein. (Wer bereit ist, auf die Worte *kanonisch* und *natürlich* zu verzichten, kann den Beweis abkürzen, wie in 4.8.12 erklärt.)

Um dies zu sehen, betrachten wir einen weiteren Komplex $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$ abelscher Gruppen, der zwischen den beiden Komplexen $\mathrm{S}\mathcal{K}$ (zur Berechnung der simplizialen Homologie) und $\mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$ (zur Berechnung der singulären Homologie) vermittelt.

Definition 4.8.2. Sei $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, E)$ ein Simplizialkomplex. Für $q \geq 0$ definiere[55]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q^{\text{bel}} &:= \big\{ s\colon \{0,\dots,q\} \to E \text{ beliebige Abbildung} \mid (\operatorname{im} s) \in \mathcal{K} \big\} \\ &= \big\{ (s_0,\dots,s_q) \in E^{q+1} \mid \{s_0,\dots,s_q\} \in \mathcal{K} \big\} \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

4.8.3. Ist $e \in E$ eine Ecke von $\mathcal{K}$, so gilt beispielsweise $(e,e,\dots,e) \in \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$ für alle $q \geq 0$.

4.8.4. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Ersetzen wir in Definition 2.4.4 und Proposition 2.4.6 samt Beweis $\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ durch $\mathcal{K}^{\text{bel}}$ (und natürlich (2.4.2) durch (4.8.1)), so erhalten wir einen Komplex

$$\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} := (\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}, \partial) := \Big(\dots \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_0=0} \underbrace{\mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}}_{=\{0\}} \to \dots \Big) \tag{4.8.2}$$

abelscher Gruppen. Dieser Komplex lebt (im Gegensatz zu $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$) wegen 4.8.3 in *allen* nichtnegativen Graden, falls $E \neq \varnothing$ gilt. Man beachte, dass wir zur Definition von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$ keine Ordnung auf E benötigen. Fixieren wir aber eine solche, so induzieren die Inklusionen $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \subset \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$ einen komponentenweise injektiven Morphismus

$$\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \tag{4.8.3}$$

von Komplexen, der sich im Beweis von Proposition 4.8.5 als Quasi-Isomorphismus erweisen wird.

Proposition 4.8.5. *Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Dann definieren die (offensichtlich surjektiven) Gruppenmorphismen*

$$\Phi_q\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q\mathcal{K},$$

$$\mathcal{K}_q^{\text{bel}} \ni s = (s_0,\dots,s_q) \mapsto \begin{cases} (s_0,\dots,s_q) & \text{falls } \{s_0,\dots,s_q\} \in \mathcal{K}_q \text{ (äquivalent: } s \text{ injektiv, d. h. } s \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $q \geq 0$ und $\Phi_q := 0$ für $q < 0$ einen Quasi-Isomorphismus

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{K}}\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \twoheadrightarrow \mathrm{S}\mathcal{K} \tag{4.8.4}$$

in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$.[56] *Insbesondere berechnet $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$ die simpliziale Homologie von $\mathcal{K}$.*

[55] Diese Definition tauchte bereits in 2.4.30.(a) auf, dort jedoch nur für einen maximalen Simplizialkomplex.

[56] Diese Aussage ist im Wesentlichen [Mun84, Theorem 13.6, S. 77] oder [Spa81, Theorem 8, S. 171], wo der Komplex $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$ als *ordered chain complex* und der Komplex $\mathrm{S}\mathcal{K}$ als *oriented chain complex* bezeichnet werden.

Beweis. **Behauptung 1: $\Phi\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}} \to \mathrm{S}\mathcal{K}$ ist ein Morphismus von Komplexen.**[57] Die Verträglichkeit der Φ_q mit den Differentialen ist zu zeigen. Für beliebiges $q \geq 1$ und $s = (s_0, \ldots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}}$ ist also $\Phi(\partial(s)) = \partial(\Phi(s))$ zu zeigen. Nur im Fall $\{s_0, \ldots, s_q\} \in \mathcal{K}_{q-1}$ ist dies nicht offensichtlich. In diesem Fall gibt es genau zwei verschiedene Indizes $a < b$ mit $s_a = s_b$. Wegen $\Phi(s) = 0$ ist nur zu zeigen, dass $\Phi(\partial(s))$ verschwindet (die vorletzte Gleichung verwendet die Definition (2.4.7)):

$$\begin{aligned}
\Phi(\partial(s)) &= \Phi\Big(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(s_0, \ldots, s_{i-1}, \widehat{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_q\Big) \\
&= (-1)^a(s_0, \ldots, s_{a-1}, \widehat{s_a}, s_{a+1}, \ldots, s_{b-1}, s_b, s_{b+1}, \ldots, s_q) \\
&\quad + (-1)^b(s_0, \ldots, s_{a-1}, s_a, s_{a+1}, \ldots, s_{b-1}, \widehat{s_b}, s_{b+1}, \ldots, s_q) \\
&= (-1)^a(s_0, \ldots, s_{a-1}, \widehat{s_a}, s_{a+1}, \ldots, s_{b-1}, s_b, s_{b+1}, \ldots s_q) \\
&\quad + (-1)^b(-1)^{b-a-1}(s_0, \ldots, s_{a-1}, \widehat{s_a}, s_{a+1}, \ldots, s_{b-1}, s_a, s_{b+1}, \ldots, s_q) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Behauptung 2: $\Phi\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}} \to \mathrm{S}\mathcal{K}$ ist ein Quasi-Isomorphismus. Sei E die Eckenmenge von $\mathcal{K}$ und $\leq$ eine Ordnung auf E (existiert stets). Dann ist das Diagramm

(4.8.5)
$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}} & \xrightarrow{\Phi=\Phi_{\mathcal{K}}} & \mathrm{S}\mathcal{K} \\
{\scriptstyle (4.8.3)}\uparrow{\scriptstyle \Theta_{\mathcal{K}}} & \overset{\sim}{\nearrow}{\scriptstyle (2.4.11)} & \\
\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} & &
\end{array}$$

offensichtlich kommutativ.[58] Da der diagonale Pfeil nach Proposition 2.4.21 ein Isomorphismus (und insbesondere ein Quasi-Isomorphismus) ist, ist Φ genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn der vertikale Pfeil $\Theta_{\mathcal{K}}$ ein solcher ist. Wir zeigen letzteres mit einer Art Induktion.

- Im Fall $\mathcal{K} = \varnothing$ ist $\Theta_{\mathcal{K}}$ offensichtlich ein Quasi-Isomorphismus.
- Ist $\mathcal{K}$ ein maximaler Simplizialkomplex mit nichtleerer Eckenmenge[59], so leben sowohl die Homologie von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ als auch die von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}}$ nur in Grad Null und sind dort isomorph zu $\mathbb{Z}$ (nach Lemma 2.4.29 und 2.4.30.(a) und dem Argument im Beweis von Korollar 2.4.31.(a)). Da $\mathrm{H}_0(\Theta_{\mathcal{K}})$ offensichtlich ein Isomorphismus ist, ist $\Theta_{\mathcal{K}}$ ein Quasi-Isomorphismus.
- Sind $\mathcal{U} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{K}$ beliebige Unterkomplexe von $\mathcal{K}$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\mathrm{bel}} & \subset & \mathbb{Z}\mathcal{W}^{\mathrm{bel}} \\
{\scriptstyle \Theta_{\mathcal{U}}}\uparrow & & {\scriptstyle \Theta_{\mathcal{W}}}\uparrow \\
\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}} & \subset & \mathbb{Z}\mathcal{W}^{\text{st-mono}}
\end{array}$$

  offensichtlich kommutativ, wobei die in der unteren Zeile verwendeten Ordnungen auf den Eckenmengen die Einschränkungen der Ordnung $\leq$ auf E sind.[60]
- Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$ zwei Untersimplizialkomplexe. Dann ist das Diagramm

(4.8.6)
$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})^{\mathrm{bel}} & \xhookrightarrow{\binom{1}{1}} & \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\mathrm{bel}} \oplus \mathbb{Z}\mathcal{V}^{\mathrm{bel}} & \xrightarrow{(1\ -1)} & \mathbb{Z}(\mathcal{U}\cup\mathcal{V})^{\mathrm{bel}} \\
{\scriptstyle \Theta_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}}\uparrow & & {\scriptstyle \Theta_{\mathcal{U}}\oplus\Theta_{\mathcal{V}}}\uparrow & & {\scriptstyle \Theta_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}}\uparrow \\
\mathbb{Z}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})^{\text{st-mono}} & \xhookrightarrow{\binom{1}{1}} & \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}} \oplus \mathbb{Z}\mathcal{V}^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{(1\ -1)} & \mathbb{Z}(\mathcal{U}\cup\mathcal{V})^{\text{st-mono}}
\end{array}$$

[57] Der Beweis erinnert mich an die Lösung von Aufgabe 2.4.27.

[58] Daraus folgt, dass $\mathrm{S}\mathcal{K}$ ein direkter Summand von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}}$ ist ($\Phi_{\mathcal{K}}$ ist eine spaltende Surjektion/ein spaltender Epimorphismus).

[59] Diese darf sogar unendlich sein, auch wenn wir im aktuellen Beweis nur den endlichen Fall benötigen.

[60] Kategoriell gesagt ist Θ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren, die auf der Kategorie der Unterkomplexe von $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, E, \leq)$ (samt Inklusionen als Morphismen) definiert sind.

von Komplexen kommutativ und seine Zeilen sind kurze exakte Sequenzen (für die untere Zeile wurde dies vermutlich in der Lösung von Aufgabe 4.4.4 gezeigt, der Beweis für die obere Zeile geht analog). Aufgabe B.3.7 zeigt somit:[61]

(4.8.7) Sind $\Theta_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}$, $\Theta_{\mathcal{U}}$ und $\Theta_{\mathcal{V}}$ Quasi-Isomorphismen, so ist auch $\Theta_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}$ ein Quasi-Isomorphismus.

- Ist $\mathcal{K}$ endlich, so ist $\Theta_{\mathcal{K}}$ ein Quasi-Isomorphismus. Dies folgt per Induktion über die Kardinalität $|\mathcal{K}|$ aus den vorherigen Überlegungen: Genauer kann man $\mathcal{K}$, ausgehend vom leeren Simplizialkomplex, durch sukzessives Hinzufügen neuer Simplizes (samt aller nichtleeren Teilmengen) in endlich vielen Schritten aufbauen. Im Induktionsschritt verwendet man (4.8.7): Dabei sei $\mathcal{U}$ der bisher aufgebaute Unterkomplex und $\mathcal{V}$ der maximale Simplizialkomplex des neu hinzugefügten Simplex, aufgefasst als Unterkomplex von $\mathcal{K}$. Dann sind $\Theta_{\mathcal{V}}$ nach dem obigen und $\Theta_{\mathcal{U}}$ und $\Theta_{\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}$ per Induktion Quasi-Isomorphismen; also ist nach (4.8.7) auch $\Theta_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}$ ein Quasi-Isomorphismus.
- Sei nun $\mathcal{K}$ unendlich. Zu zeigen ist, dass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ die induzierte Abbildung

(4.8.8) $$\mathrm{H}_q(\Theta_{\mathcal{K}})\colon \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \to \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$$

bijektiv ist.[62] Sowohl bei der Surjektivität als auch bei der Injektivität kann man sich dabei auf den Fall eines endlichen Unterkomplexes $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ zurückziehen, den wir bereits behandelt haben. Im Detail:

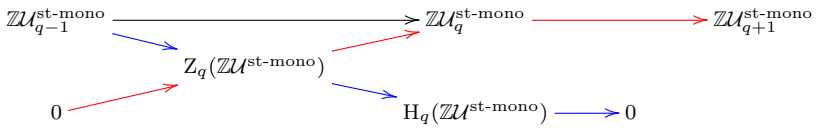
  - Surjektivität: Sei $c \in \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$ eine Homologieklasse. Gelte $c = [z]$ für einen q-Zykel $\mathrm{Z}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$. Da z eine (endliche) Linearkombination ist, gibt es einen endlichen Untersimplizialkomplex $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ mit $z \in \mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{bel}}$ und genauer mit $z \in \mathrm{Z}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}})$. Also können wir $[z]$ als Element von $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}})$ auffassen. Da $\mathrm{H}_q(\Theta_{\mathcal{U}})$ surjektiv ist, gibt es ein Urbild $e \in \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$ von $[z]$. Das Bild von e in $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$ ist dann das gesuchte Urbild von $c = [z] \in \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$.
  - Injektivität: Sei $c \in \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$ eine Homologieklasse, die auf Null geht. Gelte $c = [z]$ für einen q-Zykel $z \in \mathrm{Z}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$. Dann ist $\Theta(z)$ ein Rand, d. h. es gibt eine $(q+1)$-Kette $k \in \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\text{bel}}$ mit $\partial(k) = z$. Da sowohl k als auch z (endliche) Linearkombinationen sind, gibt es einen endlichen Untersimplizialkomplex $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$, mit $k \in \mathbb{Z}\mathcal{U}_{q+1}^{\text{bel}}$ und $z \in \mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{st-mono}}$. Sicherlich gelten $\partial^{\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}}}(k) = z$ und $z \in \mathrm{Z}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$. Dies bedeutet, dass $[z]$, nun aufgefasst als Element von $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$ unter der bereits als injektiv bekannten Abbildung $\mathrm{H}_q(\Theta_{\mathcal{U}})$ nach Null geht, also Null ist. Dann gilt aber erst recht $c = [z] = 0$ in $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$. □

Aufgabe 4.8.6. Nach Aufgabe 2.4.27 ist $\mathrm{S}\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ ein Funktor. In naheliegender Weise (und schrecklicher Notation) fassen wir $\mathcal{K} \mapsto \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$ als Funktor $\mathbb{Z}(-)^{\text{bel}}\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ auf. Zeige,

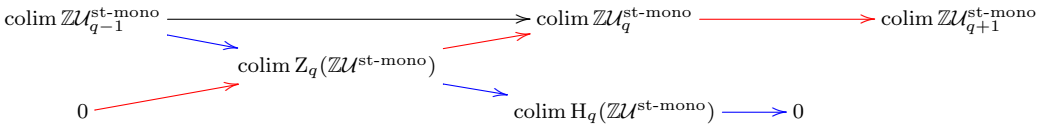
---

[61] Wir verwenden auch: Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon A' \to B'$ zwei Quasi-Isomorphismen von Komplexen, so ist auch $f \oplus g\colon A \oplus A' \to B \oplus B'$ ein Quasi-Isomorphismus, denn $\mathrm{H}_q(f \oplus g)\colon \mathrm{H}_q(A \oplus B) \to \mathrm{H}_q(A' \oplus B')$ und $\mathrm{H}_q(f) \oplus \mathrm{H}_q(g)\colon \mathrm{H}_q(A) \oplus \mathrm{H}_q(B) \to \mathrm{H}_q(A') \oplus \mathrm{H}_q(B')$ stimmen modulo der naheliegenden Isomorphismen überein, vgl. Aufgabe B.1.24. (Der Funktor H_q ist *additiv*.)

[62] Formal ist das eine Konsequenz aus der Exaktheit filtrierter Kolimiten in der Kategorie Ab der abelschen Gruppen, die wir möglicherweise später behandeln Referenz einfügen: Die Kategorie I aller endlichen Unterkomplexe $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ (mit Inklusionen als Morphismen) ist filtriert. Für jeden Unterkomplex $\mathcal{U}$ haben wir ein kommutatives Diagramm



in Ab. Die rote Sequenz (vier Objekte, drei Morphismen) ist exakt (d. h. exakt bei $\mathrm{Z}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$ und $\mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{st-mono}}$). Ebenso ist die blaue Sequenz exakt. Geht man zum Kolimes dieses I-Diagramms über, so erhält man das kommutative Diagramm



mit exakten roten und blauen Sequenzen, weil filtrierte Kolimiten exakt sind. Die oberste Zeile ist kanonisch isomorph zu $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$. Es folgt $\operatorname{colim} \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$ (analoges gilt auch für Zykel und Bilder). Analoges gilt, wenn man überall den oberen Index st-mono durch bel ersetzt; alles ist kompatibel mit den Morphismen $\Theta_{\mathcal{U}}$. Sind nun alle $\mathrm{H}_q(\Theta_{\mathcal{U}})\colon \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) \to \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}})$ Isomorphismen, so ist auch ihr Kolimes ein Isomorphismus, also $\mathrm{H}_q(\Theta_{\mathcal{K}})$.

dass die Familie $\Phi := (\Phi_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathrm{SimpKomp}}$ der (Quasi-Iso)Morphismen (4.8.4) eine natürliche Transformation

$$\Phi\colon \mathbb{Z}(-)^{\mathrm{bel}} \Rightarrow \mathrm{S}$$

definiert.

Ende der 14. Vorlesung am 11.12.2020.
Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 4.7.12 (lokale Homologie von offener Teilmenge $U \subsetneq \mathbb{R}^n$ an einem Punkt)
(2) Aufgabe 4.7.13 (relative Homologie versus reduzierte Homologie von „Einpunktidentifizierung“)
(3) Aufgabe 4.8.6 (natürliche Trafo $\Phi\colon \mathbb{Z}(-)^{\mathrm{bel}} \Rightarrow \mathrm{S}$)
(4) Aufgabe 4.7.11

4.8.7. Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Jedem Element $s = (s_0, \ldots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}}$ ordnen wir mit Hilfe der in (3.3.1) erklärten Notation einen singulären q-Simplex

$$\underset{\sim}{s} := \underset{\sim}{(s_0, \ldots, s_q)}\colon \Delta_q \to \Delta(\mathcal{K})$$

der geometrischen Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ zu. Diese Zuordnung definiert eine offensichtlich injektive Abbildung[63]

$$\mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}} \hookrightarrow \mathrm{Top}(\Delta_q, \Delta(\mathcal{K}))$$

und per $\mathbb{Z}$-linearer Ausdehung einen injektiven Gruppenmorphismus

$$\Psi_q\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}} \hookrightarrow \mathrm{S}_q\Delta(\mathcal{K}) \tag{4.8.9}$$

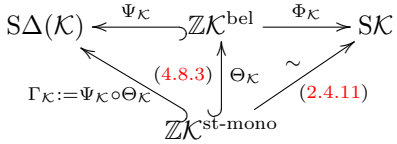
Proposition 4.8.8. *Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Die Abbildungen Ψ_q aus (4.8.9) definieren einen (komponentenweise injektiven) Quasi-Isomorphismus*

$$\Psi = \Psi_{\mathcal{K}} := (\Psi_q)_{q\in\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}} \hookrightarrow \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K}) \tag{4.8.10}$$

in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$*. Insbesondere rechnet $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}}$ die singuläre Homologie der geometrischen Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ unseres Simplizialkomplexes aus.*

Beweis. Dass die Ψ_q mit den Differentialen kommutieren und somit einen Morphismus Ψ von Komplexen definieren, ist offensichtlich. Sei $\leq$ eine Ordnung auf der Eckenmenge von $\mathcal{K}$ (existiert stets). Wir explandieren das kommutative Diagramm (4.8.5) aus dem Beweis von Proposition 4.8.5 zu

(4.8.11)



Es genügt zu zeigen, dass die linke diagonal Verknüpfung

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{K}} = \Psi_{\mathcal{K}} \circ \Theta_{\mathcal{K}}\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} &\hookrightarrow \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K}),\\ s = (s_0, \ldots, s_q) &\mapsto \underset{\sim}{s} := \underset{\sim}{(s_0, \ldots, s_q)},\end{aligned} \tag{4.8.12}$$

ein Quasi-Isomorphismus ist, denn $\Theta_{\mathcal{K}}$ ist ein Quasi-Isomorphismus, wie wir im Beweis von Proposition 2.4.21 gezeigt haben (wer nicht in den Beweis schauen möchte: Nach der zitierten Proposition ist $\Phi_{\mathcal{K}}$ ein Quasi-Isomorphismus; da der rechte diagonale Pfeil (2.4.11) ein Isomorphismus ist, ist $\Theta_{\mathcal{K}}$ ein Quasi-Isomorphismus)

Für $m \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{K}_{\leq m}$ das m-Skelett von $\mathcal{K}$ (Beispiel 2.1.14). Diese Skelette bilden eine aufsteigende Folge $\varnothing = \mathcal{K}_{\leq -1} \subset \mathcal{K}_{\leq 0} \subset \mathcal{K}_{\leq 1} \subset \ldots$ von Untersimplizialkomplexen von $\mathcal{K}$, deren Vereinigung ganz $\mathcal{K}$ ist.

Analog bilden die geometrischen Realisierungen

$$X_{\leq m} := \Delta(\mathcal{K}_{\leq m}) = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}_{\leq m}} \Delta(\sigma)$$

dieser Skelette eine aufsteigende Folge $\varnothing = X_{\leq -1} \subset X_{\leq 0} \subset X_{\leq 1} \subset \ldots$ von nach 2.2.6 abgeschlossenen Teilmengen von $X := \Delta(\mathcal{K})$, deren Vereinigung ganz X ist.

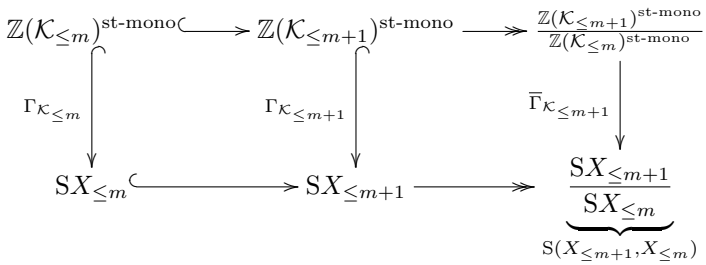
[63] Elemente im Bild könnte man als ist **simplizialsinguläre q-Simplizes von $\Delta(\mathcal{K})$** bezeichnen.

Behauptung 1: Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}} \colon \mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathrm{S}X_{\leq m}$$

ein Quasi-Isomorphismus.[64]

Wir zeigen dies per Induktion über m. Für $m \leq -1$ sind Start- und Zielkomplex Null, so dass die Behauptung trivial ist. Für $m \in \mathbb{Z}$ betrachte das Diagramm (es ist nur für $m \geq -1$ interessant)



in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ mit offensichtlichen kurzen exakten Zeilen, dessen linkes Quadrat offensichtlich kommutativ ist (abtrakt ist Γ natürlich auf Unterkomplexen von $\mathcal{K}$), und dessen rechte Vertikale $\overline{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}}$ der eindeutige Morphismus ist, der das rechte Quadrat kommutativ macht (diese Vertikale ist injektiv (= komponentenweise injektiv), was uns aber hier nicht weiter interessiert).

Per Induktion können wir annehmen, dass die linke Vertikale $\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}}$ ein Quasi-Isomorphismus ist. Um wie geünscht zu zeigen, dass die mittlere Vertikale $\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m+1}}$ ein Quasi-Isomorphismus ist, genügt es somit nach Aufgabe B.3.7, die folgende Hilfsbehauptung zu zeigen:

Hilfsbehauptung: Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$\overline{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}} \colon \frac{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}}}{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}} \to \mathrm{S}(X_{\leq m+1}, X_{\leq m})$$

ein Quasi-Isomorphismus.[65]

Für $m \leq -2$ ist die Aussage trivial, denn Start- und Zielkomplex von $\overline{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}}$ sind Null. Gelte $m \geq -1$. Wir analysieren zuerst den Start- und dann den Zielkomplex.

Analyse des Startkomplexes: Der Komplex $\frac{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}}}{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}}$ lebt nur in Grad $m+1$ und hat dort (die Klassen der Elemente von) $\mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}$ als $\mathbb{Z}$-Basis. Seine totale Homologie hat somit dieselbe Eigenschaft, in Formeln

$$\mathrm{H}_q\left(\frac{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}}}{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}} = \bigoplus_{s \in \mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}} \mathbb{Z}s & \text{falls } q = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.8.13}$$

Analyse des Zielkomplexes: Sei U_m die „Verdickung“ der geometrischen Realisierung $X_{\leq m}$ des m-Skeletts, die wir erhalten, indem wir aus $X_{\leq m+1}$ die „Schwerpunkte“ aller $(m+1)$-Simplizes entfernen.

Wir behaupten, dass die beiden Einbettungen

$$(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) \hookrightarrow (X_{\leq m+1}, U_m) \hookleftarrow (X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m})$$

von Raumpaaren Isomorphismen auf der relativen singulären Homologie induzieren. Für die rechte Einbettung ist dies klar nach Aussschneidung (Satz 4.7.1 – $U_m \supseteq X_{\geq m+1}$ ist eine offene Teilmenge, $X_{\leq m} \subseteq X_{\leq m+1}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge, $X_{\leq m} \subset U_m$). Für die linke Einbettung sieht man dies folgendermaßen. Da $X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$ eine Homotopieäquivalenz ist (anschaulich ist klar, dass $X_{\leq m}$ ein Deformationsretrakt von U_m ist, jedoch ist die Stetigkeit des naheliegenden Kandidaten für eine Deformationsretraktion etwas subtil – wir zeigen diese in 4.8.9), induziert sie Isomorphismen auf der singulären Homologie (Satz 3.3.1), und wir können Korollar 4.2.3 anwenden.

---

[64] Die Klammersetzung soll deutlich machen, dass $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$ ein Komplex ist (und nicht etwa der „$\leq m$-Teil“ des Komplexes $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$). Seine q-te Komponente ist $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})_q^{\text{st-mono}}$. Auf der rechten Seite ist das nicht so kritisch, da man den Grad-Index hier traditionell meist als Index bei S notiert: Die q-te Komponente von $\mathrm{S}X_{\leq m}$ ist $\mathrm{S}_q X_{\leq m}$.

[65] Der Beweis wird zeigen, dass die linke Seite ein Komplex mit verschwindendem Differential ist (der deswegen mit seiner Homologie „übereinstimmt“), der isomorph auf die Homologie des rechten Komplexes geht. Insbesondere ist unsere Abbildung komponentenweise injektiv und wir können den linken Komplex als Unterkomplex des rechten auffassen.

Das rechte Raumpaar $(X_{\leq m+1}\setminus X_{\leq m}, U_m\setminus X_{\leq m})$ ist aber die disjunkte Vereinigung Raumpaare $(\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)'\setminus b(\sigma))$, wobei $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$ alle abstrakten $(m+1)$-Simplizes durchläuft, $\Delta(\sigma)'$ den offenen Simplex zu σ bezeichnet (siehe 2.2.13) und $b(\sigma)$ der Schwerpunkt/das Baryzentrum von $\Delta(\sigma)$ ist, in Formeln[66]

$$(X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m}) = \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{K}_{m+1}} (\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)' \setminus b(\sigma)). \tag{4.8.14}$$

Das obige Diagramm von Raumpaaren können wir für jeden abstrakten Simplex $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$ zum kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) & \hookrightarrow & (\Delta(\sigma), \Delta(\sigma)\setminus b(\sigma)) & \hookleftarrow & (\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)'\setminus b(\sigma)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) & \hookrightarrow & (X_{\leq m+1}, U_m) & \hookleftarrow & (X_{\leq m+1}\setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m})
\end{array}$$

ergänzen, wobei $\partial\Delta(\sigma)$ die offensichtliche Bedeutung hat[67]. Wir wenden darauf den Funktor relative Homologie $\mathrm{H}_q\colon \mathrm{Top}^{\subset} \to \mathrm{Ab}$ an und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(\Delta(\sigma), \Delta(\sigma)\setminus b(\sigma)) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)'\setminus b(\sigma)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}, U_m) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}\setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m}).
\end{array}$$

Wir haben bereits erklärt, dass seine unteren Horizontalen Isomorphismen sind. Dasselbe Argument zeigt auch (hier ist es einfacher, man benötigt 4.8.9 nicht), dass seine oberen Horizontalen Isomorphismen sind.

Indem wir die direkte Summe der oberen Zeile diese Diagramms für variables $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$ nehmen und die untere Zeile beibehalten, erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{K}_{m+1}} \mathrm{H}_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{K}_{m+1}} \mathrm{H}_q(\Delta(\sigma), \Delta(\sigma)\setminus b(\sigma)) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{K}_{m+1}} \mathrm{H}_q(\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)'\setminus b(\sigma)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\sim \\
\mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}, U_m) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}\setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m}),
\end{array}$$

dessen Horizontalen natürlich immer noch Isomorphismen sind (jede Vertikale ist auf der σ-Komponente die Vertikale des obigen Diagramms). Die rechte Vertikale ist wegen (4.8.14) und Aufgabe 4.1.10 (offensichtlich ist jedes $\Delta(\sigma)'$ sogar offen in $X_{\leq m+1}$) ebenfalls ein Isomorphismus.

Folglich ist auch die linke Vertikale ein Isomorphismus

$$\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{K}_{m+1}} \mathrm{H}_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}).$$

Für jedes $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$ gibt es ein eindeutiges Element $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m+1}) \in \mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}$ mit $\sigma = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_{m+1}\}$. Die Abbildung $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m+1})\colon \Delta_{m+1} \xrightarrow{\sim} \Delta(\sigma)$ ist ein Homöomorphismus und restringiert zu einen Homöomorphismus zwischen den Rändern dieser vollen Simplizes, ist also ein Isomorphismus $(\Delta_{m+1}, \partial\Delta_{m+1}) \xrightarrow{\sim} (\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma))$ von Raumpaaren. Nach Satz 4.7.5 gilt

$$\mathrm{H}_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) = \begin{cases} \mathbb{Z}[(\sigma_0, \ldots, \sigma_{m+1})] \cong \mathbb{Z} & \text{falls } q = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[66] Formal haben wir nicht definiert, was eine disjunkte Vereinigung von Raumpaaren ist: Man nehme in beiden Komponenten die disjunkte Vereinigung und versehe diese jeweils mit der Finaltopologie. (Kategoriell beschreibt dies das Koprodukt in der Kategorie der Raumpaare.)

[67] Es ist der Rand von $\Delta(\sigma)$ (im umgebenden Raum $\mathbb{R}\sigma$) oder äquivalent die geometrische Realisierung des m-Skeletts von σ, wobei σ als maximaler Simplizialkomplex aufgefasst wird.

Wir folgern, dass die totale relative Homologie $\mathrm{H}(X_{\leq m+1}, X_{\leq m})$ nur in Grad $m+1$ lebt und dort die $\mathbb{Z}$-Basis $((\underbrace{\sigma_0, \ldots, \sigma_{m+1}}))_{\sigma \in \mathcal{K}^{\text{st-mono}}_{m+1}}$ hat, in Formeln

$$\mathrm{H}_q(X_{\leq m+1}, X_m) = \begin{cases} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} \mathbb{Z}(\underbrace{\sigma_0, \ldots, \sigma_{m+1}}) & \text{falls } q = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vergleichen wir dies mit (4.8.13) und beachten, dass $\mathrm{H}_{m+1}(\overline{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}})$ bezüglich der durch $\mathcal{K}^{\text{st-mono}}_{m+1}$ indizierten $\mathbb{Z}$-Basen $(s)_{s \in \mathcal{K}^{\text{st-mono}}_{m+1}}$ des Startbereichs bzw. $((\underbrace{s_0, \ldots, s_{m+1}}))_{(s_0, \ldots, s_{m+1}) \in \mathcal{K}^{\text{st-mono}}_{m+1}}$ des Zielbereichs durch die Einheitsmatrix dargestellt wird (was nur bedeutet, dass $\mathrm{H}_{m+1}(\overline{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}})$ das Element s auf das Element $\underset{\sim}{s} := (\underbrace{s_0, \ldots, s_q})$ abbildet (vgl. 4.8.7) und diese Elemente jeweils $\mathbb{Z}$-Basen bilden), so zeigt dies die Hilfsbehauptung. Insgesamt ist damit Behauptung 1 bewiesen; damit ist der Beweis der Propositin für alle endlichen Simplizialkomplexe und allgemeiener für all solche Simplizialkomplexe $\mathcal{K}$, die $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\leq m}$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ erfüllen, erledigt.

Behauptung 2: Die Abbildung (4.8.12) ist ein Quasi-Isomorphismus.

Zu zeigen ist, dass

$$\mathrm{H}_q(\Gamma_{\mathcal{K}}) \colon \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \to \mathrm{H}_q(\mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})) = \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

bijektiv ist. Dies folgern wir aus Behauptung 1 in ähnlicher Weise, wie wir die Bijektivität von (4.8.8) gezeigt haben – statt endlicher Unterkomplexe betrachten wir jedoch geeignete m-Skelette $\mathcal{K}_{\leq m}$. Sowohl bei Surjektivität wie auch bei Injektivität muss man jedoch etwas aufpassen.

Surjektivität: Ist $c \in \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$ eine beliebige Homologieklasse, so kann man diese natürlich durch einen singulären q-Zykel $z \in \mathrm{Z}_q(\Delta(\mathcal{K}))$ repräsentieren. Da z eine (endliche) Linearkombination von singulären q-Simplizes τ ist und jeder solche kompaktes Bild $\tau(\Delta_q)$ hat (Bilder von Kompakta unter stetigen Abbildungen sind kompakt), gibt es nach Proposition 2.2.15 ein $m \in \mathbb{N}$, so dass die endlich vielen beteiligten τ bereits in $\Delta(\mathcal{K}_{\leq m})$ landen. Dies zeigt, dass z bereits als Element von $\mathrm{S}_q(\Delta(\mathcal{K}_{\leq m}))$ und genauer als Element von $\mathrm{Z}_q(\Delta(\mathcal{K}_{\leq m}))$ aufgefasst werden kann.

Injektivität: Sei z ein q-Zykel von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$, dessen Homologieklasse $[z] \in \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$ unter $\mathrm{H}_q(\Gamma_{\mathcal{K}})$ auf Null abgebildet wird, d. h. es gilt $[\Gamma_{\mathcal{K}}(z)] = 0$. Dann gibt es eine Kette $x \in \mathrm{S}_{q+1}\Delta(\mathcal{K})$ mit $\partial(x) = \Gamma_{\mathcal{K}}(z)$. Wie oben finden wir mit Proposition 2.2.15 ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathrm{S}_{q+1}\Delta(\mathcal{K}_{\leq m})$.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $m \geq q$ gilt. Dann können wir z bereits als q-Zykel in $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$ auffassen (beachte, dass der Unterkomplex $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$ von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ mit letzterem (samt Differentialen) in allen Graden $\leq m$ übereinstimmt.[68] Es gilt dann bereits $\partial(x) = \Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}}(z)$ in $\mathrm{S}_q\Delta(\mathcal{K}_{\leq m})$, d. h. $[\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}}(z)] = 0$. Da $\mathrm{H}_q(\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}})$ aber bereits als Isomorphismus bekannt ist, folgt $[z] = 0$ in $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}})$ und dann erst recht in $\mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$. □

4.8.9. Wir erklären, warum die Inklusion $X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$ aus dem vorhergehenden Beweis eine Homotopieäquivalenz ist. Genauer zeigen wir, dass $X_{\leq m}$ ein Deformationsretrakt von U_m ist. Dazu benötigen wir einige Aussagen aus der mengentheoretischen Topologie, die wir in Appendix C bereitstellen.

Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Dann ist die offensichtliche Abbildung

$$\bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta(\sigma) \twoheadrightarrow \Delta(\mathcal{K}) \tag{4.8.15}$$

surjektiv und final (letzteres ist nur eine Umformulierung der Tatsache, dass $\Delta(\mathcal{K})$ die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \Delta(\mathcal{K})$ trägt). Proposition C.0.4 samt dem banalen Lemma C.0.1 zeigt dann, dass auch

$$\bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (\Delta(\sigma) \times [0,1]) \twoheadrightarrow \Delta(\mathcal{K}) \times [0,1] \tag{4.8.16}$$

final und surjektiv ist.[69]

[68] Der Komplex $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$ ist eine „dumme Abschneidung“ (*stupid truncation*) von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$.

[69] Die beiden Abbildungen (4.8.15) und (4.8.16) sind sogar abgeschlossen (was für surjektive Abbildungen Finalität impliziert, siehe [Sch20, 2.8.81]). Dies sieht man für (4.8.16) wie folgt (der Beweis für (4.8.15) geht analog):

Ersetzen wir $\mathcal{K}$ in (4.8.16) durch $\mathcal{K}_{\leq m+1}$ und restringieren diese Abbildung im Zielraum zur offenen Teilmenge $U_m \times [0,1] \subseteq \Delta(\mathcal{K}_{\leq m+1}) \times [0,1] = X_{\leq m+1} \times [0,1]$, so zeigt Lemma C.0.3, dass

$$\bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}_{\leq m}} (\Delta(\sigma) \times [0,1]) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} \big((\Delta(\sigma) \setminus \{s_\sigma\}) \times [0,1]\big) \to U_m \times [0,1] \tag{4.8.17}$$

final (und natürlich weiterhin surjektiv) ist, wobei s_σ der Schwerpunkt von $\Delta(\sigma)$ ist. Sei nun H die eindeutige Abbildung von der disjunkten Vereinigung auf der linken Seite nach U_m mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle $\sigma \in \mathcal{K}_{\leq m}$ ist $H_{\Delta(\sigma)\times[0,1]}$ die Verknüpfung
$$\Delta(\sigma) \times [0,1] \xrightarrow{\mathrm{pr}} \Delta(\sigma) \hookrightarrow X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$$
der Projektion mit den offensichtlichen Inklusionen.
- Für alle $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$ ist $H_{(\Delta(\sigma)\setminus\{s_\sigma\})\times[0,1]}$ die Verknüpfung
$$(\Delta(\sigma) \setminus \{s_\sigma\}) \times [0,1] \to \Delta(\sigma) \setminus \{s_\sigma\} \hookrightarrow U_m$$
der naheliegenden „stereographischen“ (oder einer beliebigen) Deformationsretraktion auf den „Rand“ $\bigcup_{\tau\in\sigma,|\tau|=|\sigma|-1} \Delta(\tau)$ von $\Delta(\sigma)$ mit der offensichtliche Inklusion.

Die so definierte Abbildung faktorisiert eindeutig über (4.8.17) zu einer Abbildung $\overline{H}\colon U_m \times [0,1] \to U_m$. Da H offensichtlich stetig ist, ist $\overline{H}$ wegen der Finalität von (4.8.17) ebenfalls stetig. Nach Konstruktion ist $\overline{H}$ eine Deformationsretraktion von U_m auf $X_{\leq m}$. Somit ist $X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$ eine Homotopieäquivalenz (siehe [Sch20, Lemma 3.5.4]).

4.8.10. Die Familie $\Psi := (\Psi_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\mathrm{SimpKomp}}$ der (Quasi-Iso-)Morphismen (4.8.10) definiert eine natürliche Transformation

$$\Psi\colon \mathbb{Z}(-)^{\mathrm{bel}} \Rightarrow \mathrm{S} \circ \Delta\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}),$$

wobei der Funktor $\mathbb{Z}(-)^{\mathrm{bel}}$ wie in Aufgabe 4.8.6 definiert ist.

Satz 4.8.11 (Vergleichsisomorphismus zwischen simplizialer Homologie eines Simplizialkomplexes und singulärer Homologie seiner geometrischen Realisierung)**.** *Für jeden Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ liefern die Quasi-Isomorphismen*[70]

$$\mathrm{S}\mathcal{K} \xleftarrow[(4.8.4)]{\Phi_\mathcal{K}} \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}} \xhookrightarrow[(4.8.10)]{\Psi_\mathcal{K}} \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K})$$

kanonische Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q\mathcal{K} \xleftarrow[\sim]{\mathrm{H}_q(\Phi_\mathcal{K})} \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}_q(\Psi_\mathcal{K})} \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K})) \tag{4.8.18}$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Genauer sind diese Quasi-Isomorphismen bzw. Isomorphismen natürlich in $\mathcal{K}$ (in dem Sinne, dass sie natürliche Transformationen bzw. Isotransformationen zwischen den offensichtlichen Funktoren definieren).

Beweis. Dies ist schlicht die Zusammenfassung der Propositionen 4.8.5 und 4.8.8. Natürlichkeit folgt aus Aufgabe 4.8.6 und 4.8.10. □

4.8.12 (Kurze Beweisalternative für eine Teilaussage von Satz 4.8.11)**.** Sei $(E,\mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Fixiere eine Ordnung $\leq$ auf der Eckenmenge E und betrachte die Morphismen

$$\mathrm{S}\mathcal{K} \xleftarrow[\sim]{(2.4.11)} \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \xhookrightarrow{\Gamma_\mathcal{K}} \mathrm{S}\Delta(\mathcal{K}) \tag{4.8.19}$$

von Komplexen. Diese tauchen „gespiegelt“ als „untere“ Zeile des Diagramms (4.8.11) auf. Der linke Pfeil ist nach Proposition 2.4.21 ein Isomorphismus (und insbesondere ein Quasi-Isomorphismus), der rechte Pfeil $\Gamma_\mathcal{K}$,

---

Sei $A \subseteq \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{K}}(\Delta(\sigma)\times[0,1])$ abgeschlossen. Dann gilt $A = \bigsqcup A_\sigma$ mit $A_\sigma := A \cap (\Delta(\sigma)\times[0,1]) \subseteq \Delta(\sigma)\times[0,1]$. Für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$ gilt

$$\pi(A) \cap (\Delta(\sigma)\times[0,1]) = \bigcup_{\varnothing\neq\tau\subset\sigma} A_\tau$$

wobei wir A_τ via $\Delta(\tau)\times[0,1] \subset \Delta(\sigma)\times[0,1]$ als Teilmenge von $\Delta(\sigma)\times[0,1]$ auffassen. Die rechte Seite ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen in $\Delta(\sigma)\times[0,1]$. Da (4.8.16) final ist, ist $\pi(A)$ abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{K})$.

[70] und sogar Homotopieäquivalenzen, wie aus ... folgen wird.

der in (4.8.12) erklärt ist, ist nach Behauptung 2 im Beweis von Proposition 4.8.8 ein Quasi-Isomorphismus. Wir erhalten somit Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q\mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}_q(\Gamma_{\mathcal{K}})} \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K})) \tag{4.8.20}$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$. Hierfür wurde weder die Definition von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$ noch Proposition 4.8.5 benötigt.

A priori hängt der Vergleichsisomorphismus (4.8.20) (:= die „Verknüpfung“ von links nach rechts) von der Wahl der Ordnung $\leq$ auf E ab und es ist auch nicht klar, dass er natürlich in $\mathcal{K}$ ist. Da aber im kommutativen Diagramm (4.8.11) das dortige $\Theta_{\mathcal{K}}$ nach (dem Beweis von) Proposition 4.8.5 ebenfalls ein Quasi-Isomorphismus ist, stimmt der Vergleichsisomorphismus (4.8.20) mit dem kanonischen natürlichen Vergleichsisomorphismus (4.8.11) überein und ist somit unabhängig von der Ordnung $\leq$ auf E und natürlich in $\mathcal{K}$.

4.8.13. Mit Satz 4.8.11 und 2.4.28 kann man die singuläre Homologie aller topologischen Räume X ausrechnen, die zur geometrischen Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ eines endlichen Simplizialkomplexes homöomorph sind.

Beispiel 4.8.14. Die Homologie der Sphären haben wir bereits zweimal berechnet (Satz 4.5.1 und Korollar 4.7.7 bzw. 4.7.8). Eine dritte Berechnung folgt nun aus Korollar 2.4.31.(b).

Wer fleißig genug Flächen (2-Sphäre, Torus, ..., reell projektive Ebene, Kleinsche Flasche, ...) triangulliert, kann nun endlich viele (oder gar alle?) Ergebnisse aus Satz 4.6.3 bestätigen. Für meinen Geschmack sind etwa die beiden Erzeuger der zweiten Homologie eines Torus (mit Triangulierung) im simplizialen Bild viel leichter vorstellbar als im singulären: Die Summe der „kompatibel orientierten Dreiecke der Triangulierung“ ist ein Erzeuger; der andere Erzeuger ist sein negatives, was auch die Summe der andersherum orientierten Dreiecke ist. Analoges gilt für die anderen „orientierbaren“ Flächen, also die Sphären mit Henkeln. Bei den „nicht orientierbaren“ Flächen (reell projektive Ebene, Kleinsche Flasche, ...) ist es in keiner Triangulierung möglich, für jedes Dreieck eine Orientierung so zu wählen, dass die Summe (oder auch eine positive Linearkombination) über all diese orientierten Dreiecke ein Zykel ist (denn nach Satz 4.6.3 und Satz 4.8.11 verschwindet die zweite simpliziale Homologie); in Beispielen mag man sich explizit davon überzeugen: Man orientiert ein beliebiges Dreieck; damit ist die Orientierung aller Nachbardreiecke festgelegt usw.; jedoch geht es am Ende nicht auf.

4.8.15 (Verschiedene Triangulierungen liefern kanonisch isomorphe simpliziale Homologien)**.** Trägt ein topologischer Raum verschiedene Triangulierungen, so war vor den Resultaten dieses Abschnitts keineswegs klar, was die Beziehung zwischen den entsprechenden simplizialen Homologien ist. Die Hoffnung war vermutlich, dass sie isomorph sind. Dies ist in der Tat der Fall, wie wir nun mit Hilfe der singulären Homologie zeigen können:[71]

Sei X ein topologischer Raum und seien $(\mathcal{K}, f\colon \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} X)$ und $(\mathcal{L}, g\colon \Delta(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} X)$ zwei Triangulierungen von X. Sei $q \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}} = \gamma^q_{(\mathcal{L},g),(\mathcal{K},f)} := \mathrm{H}_q(\Phi_{\mathcal{L}}) \circ \mathrm{H}_q(\Psi_{\mathcal{L}})^{-1} \circ \mathrm{H}_q(\Psi_{\mathcal{K}}) \circ \mathrm{H}_q(\Phi_{\mathcal{K}})^{-1}\colon \mathrm{H}_q\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q\mathcal{L}$$

nach Satz 4.8.11 ein Isomorphismus zwischen den q-ten singulären Homologien von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$.[72]

Insbesondere gilt: Haben zwei Simplizialkomplexe homöomorphe geometrische Realisierungen, so stimmen ihre simplizialen Homologien bis auf Isomorphismus überein.

Ende der 15. Vorlesung am 17.12.2020.

Korollar 4.8.16. *Seien $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $q \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Ist $\mathcal{K}_q$ endlich, so kann die abelsche Gruppe $\mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$ stets von $|\mathcal{K}_q|$ Elementen erzeugt werden.*

Insbesondere gilt für jeden endlichen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$: Alle $\mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$ sind endlich erzeugt und nur endlich viele davon sind von Null verschieden.

---

[71] Alternativ könnte man versuchen, zu je zwei Triangulierungen eine gemeinsame „Verfeinerung“ zu konstruieren und über diese die simplizialen Homologien zu vergleichen, vgl. aber Triangulierung (Topologie) Hauptvermutung. Siehe auch Pachner-Zug.

[72] Ist $(\mathcal{M}, h\colon \Delta(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} X)$ eine weitere Triangulierung von X, so gelten $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{L}} \circ \gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}} = \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}}$ und $\gamma_{\mathcal{K},\mathcal{K}} = \mathrm{id}$. Die Familie $(\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{K}})_{(\mathcal{K},f),(\mathcal{L},g)}$ all dieser Isomorphismen ist also bestmöglich kompatibel.

Beweis. Nach Satz 4.8.11 genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{H}_q\mathcal{K}$ von $|\mathcal{K}_q|$ Elementen erzeugt werden kann. Nach 2.4.22 ist $\mathrm{S}_q\mathcal{K}$ durch $|\mathcal{K}_q|$ Elemente erzeugbar. Wegen Lemma 4.8.17 ist die Untergruppe $\mathrm{B}_q\mathcal{K}$ von $|\mathcal{K}_q|$ Elementen erzeugbar, und dies überträgt sich offensichtlich auf den Quotienten $\mathrm{H}_q\mathcal{K} = \frac{\mathrm{B}_q\mathcal{K}}{\mathrm{Z}_q\mathcal{K}}$. □

Lemma 4.8.17. *Ist eine abelsche Gruppe A durch n Elemente erzeugbar, so ist jede Untergruppe von A auch durch n Elemente erzeugbar.*

Beweis. Wir führen Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist trivial.

Im Fall $n = 1$ ist A zyklisch, also isomorph zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, und die Aussage ist wohlbekannt: Jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ (auch die triviale) ist durch ein Element erzeugbar, und dies überträgt sich auf jeden Quotienten $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, denn die Untergruppen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ stehen (per Urbildnehmen) in kanonischer Bijektion zu den Untergruppen von $\mathbb{Z}$, die $m\mathbb{Z}$ enthalten.

Gelte $n > 1$. Gelte $A = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ (die Klammern meinen hier „Erzeugnis als abelsche Gruppe“ – man könnte auch $A = \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n$ schreiben) für geeignete Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$. Sei $U \subset A$ eine Untergruppe. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \langle a_1\rangle & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\langle a_1\rangle} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U \cap \langle a_1\rangle & \hookrightarrow & U & \twoheadrightarrow & U' \end{array}$$

abelcher Gruppen, wobei U' per Definition das Bild von U in $\frac{A}{\langle a_1\rangle}$ ist. Beide Zeilen sind kurze exakte Sequenzen. Da $\frac{A}{\langle a_1\rangle}$ durch die $n-1$ Elemente $\overline{a}_2, \dots \overline{a}_n$ erzeugt ist, gibt es per Induktion Elemente $u_2, \dots, u_n \in U$ mit $U' = \langle \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n\rangle$. Die Untergruppe $U \cap \langle a_1\rangle$ der zyklischen Gruppe $\langle a_1\rangle$ ist (nach dem Fall $n = 1$) von einem Element u_1 erzeugt. Dann sind die Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n$ Erzeuger von U, wie man sofort mit Hilfe der unteren exakten Sequenz beweist. □

4.9. **Euler-Charakteristik.**

4.9.1. Wir haben in 3.1.19 erklärt, wie man die singuläre Homologie $\mathrm{H}_q(X; A)$ eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A definiert; sie ist funktoriell in $X \in \mathrm{Top}$: Jede stetige Abbilung $f\colon X \to Y$ induziert Gruppenmorphismen $\mathrm{H}_q(f)\colon \mathrm{H}_q(X; A) \to \mathrm{H}_q(Y; A)$.

Ähnlich kann man simpliziale Homologie $\mathrm{H}_q(\mathcal{K}; A)$ eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ mit Koeffizienten in A definieren; sie ist funktoriell in $\mathcal{K} \in \mathrm{SimpKomp}$, vgl. Aufgabe 2.4.27. Fast alle bisherigen Behauptungen samt ihrer Beweise gelten mutatis mutandis auch in diesem Kontext (folgende Ausnahmen sind mir bisher aufgefallen: Bei Satz 4.6.3 sind in Teil (b) Formulierung und Beweis anzupassen, was nun in blauer Farbe geschehen ist; Korollar 4.8.16 sei ausgenommen, jedoch gilt die analoge Aussage für Koeffizienten in einem Körper (und auch etwas allgemeiner), wie wir in 4.9.3 erklären); wenn wir sie in Zukunft zitieren, meinen wir oft die entsprechende Variante, ohne dies explizit zu sagen. Beispielsweise liefert die entsprechende Variante von Satz 4.8.11 Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(\mathcal{K}; A) \cong \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K}); A) \tag{4.9.1}$$

Habe in 3.1.19 roten Text ergänzt. Dann hier besser: Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann gilt obiges sinngemäß und wir erhalten etwa R-Moduln $\mathrm{H}_q(X; M)$ und $\mathrm{H}_q(\mathcal{K}; M)$, beides funktoriell in X (und auch in $M \in \mathrm{Mod}(R)$). Ist insbesondere k ein Körper, so ist $\mathrm{H}_q(X; k)$ ein k-Vektorraum.

Beispiel 4.9.2. Wir illustrieren die allgemeine blaue Version in Satz 4.6.3.(b). Sei X wie dort eine verbundene Summe von $g \geq 1$ reell projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Ihre singuläre Homologie mit Koeffizienten in verschiedenen Körpern ist wie folgt gegeben:

- Sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ (also $2 \neq 0$ in k), etwa $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder ein endlicher Körper $\mathbb{F}_p$ oder $\mathbb{F}_{p^r}$ mit $p \neq 2$ eine Primzahl):

$$\mathrm{H}_q(X;k) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 2, \\ \frac{k^{\oplus g}}{\{(2x,\dots,2x)|x\in k\}} = \frac{k^{\oplus g}}{\{(x,\dots,x)|x\in k\}} \cong k^{g-1} & \text{falls } q = 1, \\ k & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Sei k ein Körper der Charakteristik 2, etwa $\mathbb{F}_2$:

$$\mathrm{H}_q(X;k) \cong \begin{cases} k & \text{falls } q = 2, \\ \frac{k^{\oplus g}}{\{(0x,\dots,0x)|x\in k\}} = k^{\oplus g} = k^g & \text{falls } q = 1, \\ k & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.9.3. Ist k ein Körper und $\mathcal{K}$ ein endlicher Simplizialkomplex, so gilt für seine geometrische Realisierung $X = \Delta(\mathcal{K})$: Alle Homologien $\mathrm{H}_q(X;k)$ sind endlich-dimensionale k-Vektorräume und nur endlich viele davon sind von Null verschieden. Der Beweis geht analog zu dem von Korollar 4.8.16, jedoch verwendet man statt Lemma 4.8.17 die wohlbekannte Aussage, dass jeder Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums kleiner-gleiche Dimension hat.[73]

Dieselbe Aussage stimmt dann automatisch auch für jeden kompakten, triangulierbaren topologischen Raum (siehe Definition 2.2.17 und 2.2.18) und allgemeiner für jeden topologischen Raum, der zu einem kompakten, triangulierbaren topologischen Raum homotopieäquivalent ist (wegen Satz 3.3.1 über die Homotopie-Invarianz der singulären Homologie).

Definition 4.9.4. Ist X ein topologischer Raum, so heißt

$$b_q(X) := b_q(X;\mathbb{Q}) := \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}_q(X;\mathbb{Q}) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

q-te Betti-Zahl von X. Sind alle Betti-Zahlen endlich und verschwinden für hinreichend großes q, so heißt die alternierende Summe

$$\chi(X) := \chi(X;\mathbb{Q}) := \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q b_q(X) = \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}_q(X;\mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}$$

die **(topologische) Euler-Charakteristik von** X und man sagt, dass X eine „wohldefinierte Euler-Charakteristik hat“.

Statt mit $\mathbb{Q}$ kann man hier mit einem beliebigen Körper k arbeiten und analog die **q-te Betti-Zahl (über k)**

$$b_q(X;k) := \dim_k \mathrm{H}_q(X;k) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

und, falls die folgende Summe sinnvoll ist, die **Euler-Charakteristik (über k)**

$$\chi(X;k) := \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q b_q(X;k) = \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q \dim_k \mathrm{H}_q(X;k) \in \mathbb{Z}$$

betrachten.

4.9.5. Euler-Charakteristik und Betti-Zahlen sind invariant unter Homotopieäquivalenzen (und insbesondere unter Homöomorphismen) (nach Satz 3.3.1): Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, die in hTop invertierbar wird, so gelten $\chi(X;k) = \chi(Y;k)$ und $b_q(X;k) = b_q(Y;k)$ für alle Körper k und alle $q \in \mathbb{Z}$.

Ausblick 4.9.6. Aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie, Satz 6.10.1, (und etwas Wissen über Tensorprodukte (Flachheit)) wird folgen:

[73] Lemma 4.8.17 gilt sinngemäß für jeden Hauptidealring R (mit „demselben“ Beweis): Ist ein R-Modul durch n Elemente erzeugbar (also $M = Rm_1 + \dots Rm_n$ für geeignete $m_1, \dots, m_n \in M$), so ist jeder Untermodul ebenfalls durch n Elemente erzeugbar.

Somit gilt auch Korollar 4.8.16 ebenfalls in diesem Kontext: Ist $\mathcal{K}_q$ endlich, so kann der R-Modul $\mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K});R)$ stets von $|\mathcal{K}_q|$ Elementen erzeugt werden.

- Man kann $b_q(X) = b_q(X;\mathbb{Q})$ alternativ als Rang der abelschen Gruppe $\mathrm{H}_q(X) = \mathrm{H}_q(X,\mathbb{Z})$ definieren.[74]
- Betti-Zahlen und Euler-Charakteristik hängen nur von der Charakteristik des Körpers ab: Sind k und l zwei Körper derselben Charakteristik (die Null oder eine Primzahl ist), so gilt $b_q(X;k) = b_q(X;l)$ für alle q und insbesondere $\chi(X;k) = \chi(X;l)$.

  Kennt man also die Betti-Zahlen bzw. Euler-Charakteristiken für alle Primkörper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_p$, so kennt man sie für alle Körper.

  Nachträglich Verbesserung eingefügt: Ist für jedes n die abelsche Gruppe $\mathrm{H}_n(X)$ endlich erzeugbar und verschwinden alle bis auf endlich viele der $\mathrm{H}_n(X)$, so hängt die Euler-Charakteristik gar nicht vom Körper ab, siehe Proposition 6.10.4. Eventuell brauche ich diese (bei uns meist erfüllte) Voraussetzung auch für die anderen Aussagen in diesem Ausblick...
- Sind alle $\mathrm{H}_q(X)$ torsionsfrei, so stimmem alle Betti-Zahlen und die Euler-Charakteristik für alle Körper überein, denn ein $\mathbb{Z}$-Modul ist genau dann torsionsfrei, wenn er flach ist (siehe Proposition 6.4.7 oder per Overkill [Sta18, 0AUW]; noch allgemeiner stimmt das wohl für sogenannte Prüfer-Ringe).

Beispiele 4.9.7.

- Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ nichtverschwindende Bettizahlen $b_0(\mathbb{S}^n) = 1 = b_n(\mathbb{S}^n)$ und Euler-Charakteristik $\chi(\mathbb{S}^n) = 1+(-1)^n$ (nach Satz 4.5.1). Die Sphären gerader Dimension haben also Euler-Charakteristik 2, die ungerader Dimension Euler-Charakteristik 0. Dasselbe gilt für Betti-Zahlen bzw. Euler-Charakteristik bezüglich einem beliebigen Körper k statt $\mathbb{Q}$.
- Eine Sphäre X mit g Henkeln hat nichtverschwindende Bettizahlen $b_0(X) = 1$, $b_1(X) = 2g$ und $b_2(X) = 1$ und Euler-Charakteristik $\chi(X) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ (nach Satz 4.6.3). Dasselbe gilt für Betti-Zahlen bzw. Euler-Charakteristik bezüglich einem beliebigen Körper k statt $\mathbb{Q}$.
- Eine verbundene Summe X von $g \geq 1$ reell projektiven Ebenen hat nach 4.9.2
  - über jedem Körper k der Charakteristik $\neq 2$ nichtverschwindende Bett-Zahlen $b_0(X;k) = 1$ und $b_1(X;k) = g - 1$ und
  - über jedem Körper k der Charakteristik zwei nichtverschwindende Bett-Zahlen $b_0(X;k) = 1 = b_2(X;k)$ und $b_1(X;k) = g$

  und über jedem Körper k Euler-Charakteristik $\chi(X;k) = 1 - (g-1) = 1 - g + 1 = 2 - g$.

  Die Betti-Zahlen hängen hier also vom Körper k ab, die Euler-Charakteristik aber nicht (vgl. das spätere Korollar 4.9.9).

4.9.8. Nach 4.9.3 hat die geometrische Realisierung jedes endlichen Simplizialkomplexes wohldefinierte Euler-Charakteristik $\chi(\Delta(\mathcal{K}))$. Genauer ist $\chi(\Delta(\mathcal{K});k)$ für jeden Körper k wohldefiniert. Die analoge Aussage gilt für jeden kompakten, triangulierbaren topologischen Raum und jeden zu einem solchen homotopieäquivalenten Raum.

Korollar 4.9.9 (von Satz 4.8.11)**.** *Für jeden endlichen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ und jeden Körper k gilt*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K});k) = \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q |\mathcal{K}_q| = \#\{\textit{Simplizes gerader Dimension}\} - \#\{\textit{Simplizes ungerader Dimension}\}.$$

Insbesondere ist die Euler-Charakteristik von $\Delta(\mathcal{K})$ unabhängig vom Körper, in Formeln

$$\chi(\Delta(\mathcal{K});k) = \chi(\Delta(\mathcal{K});\mathbb{Q}) = \chi(\Delta(\mathcal{K})). \tag{4.9.2}$$

[74] Der Rang einer beliebigen abelschen Gruppe A ist definiert als der Rang der torsionsfreien abelschen Gruppe $A/T(A)$, wobei $T(A) := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}_{>0} : na = 0\}$ die Torsionsuntergruppe von A ist. Ist A eine torsionsfreie abelsche Gruppe (d. h. $T(A) = 0$), so definieren wir den Rang von A als

$$\mathrm{rg}(A) := \begin{cases} r & \text{falls es ein } r \in \mathbb{N} \text{ mit } A \cong \mathbb{Z}^r \text{ gibt;} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(es gibt höchstens ein solches r; es gibt ein solches r, falls A endlich erzeugt ist (vgl. Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen)).

Man bezeichnet $\chi(\mathcal{K}) := \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q|\mathcal{K}_q| = \sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q|\mathcal{K}_q|$ *als* ***(simpliziale) Euler-Charakteristik von*** $\mathcal{K}$*. Damit verkürzt sich die obige Gleichheit zu*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K});k) = \chi(\mathcal{K})$$

und besagt in Worten, dass topologische Euler-Charakteristik von $\Delta(\mathcal{K})$ *und simpliziale Euler-Charakteristik von* $\mathcal{K}$ *übereinstimmen.*

Beweis. Wir betrachten den Komplex $\mathrm{S}(\mathcal{K};k)$ der Simplizialketten von $\mathcal{K}$ mit Koeffizienten in k, der in offensichtlicher Weise definiert ist (ersetze $\mathbb{Z}$ durch k in Definition 2.4.10 und Proposition 2.4.15). Da $\mathrm{S}_q(\mathcal{K};k)$ Dimension $|\mathcal{K}_q|$ hat (wegen 2.4.22 mit $\mathbb{Z}$ ersetzt durch k), gilt

$$\sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q|\mathcal{K}_q| = \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q|\mathcal{K}_q| = \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q \dim \mathrm{S}_q(\mathcal{K};k)$$

(da $\mathcal{K}$ endlich ist, sind nur endlich viele Summanden von Null verschieden). Zu zeigen ist, dass dies mit

$$\chi(\Delta(\mathcal{K});k) = \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q \dim_k \mathrm{H}_q(\Delta(\mathcal{K});k) \overset{(4.9.1)}{=} \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q \dim_k \mathrm{H}_q(\mathcal{K};k) = \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q \dim_k \mathrm{H}_q(\mathrm{S}(\mathcal{K};k))$$

übereinstimmt, wobei wir Satz 4.8.11 (mit $\mathbb{Z}$ ersetzt durch k) für die markierte Gleichheit verwenden. Zu zeigen ist also für den Komplex $\mathrm{S}(\mathcal{K};k)$, dass die alternierende Summe der Dimensionen seiner Komponenten mit der alternierenden Summe der Dimensionen seiner Homologien übereinstimmt. Das nachfolgende Lemma 4.9.13 (zusammen mit Definition 4.9.11) zeigt genau diese Aussage. □

Definition 4.9.10. Eine Familie $A = (A_p)_p$ von Moduln über eine Ring R heißt **beschränkt**, wenn nur endlich viele A_p von Null verschieden sind. Ein Komplex $A = ((A_p)_p, (d_p)_p)$ von Moduln über eine Ring heißt **beschränkt**, wenn die Familie $(A_p)_p$ beschränkt ist.

Definition 4.9.11. Sei k ein Körper. Sei $A = (A_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine beschränkte Familie endlichdimensionaler k-Vektorräumen.[75] Dann heißt

$$\chi(A) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} \dim_k A_p$$

(algebraische) Euler-Charakteristik von A. Dieselbe Formel definiert die **Euler-Charakteristik** eines beschränkten Komplexes A endlichdimensionaler k-Vektorräume. (Letztere hängt also nicht von den Differentialen d_p des Komplexes ab.)

4.9.12. Ist X ein topologischer Raum, so gilt

$$\chi(X;k) = \chi(\mathrm{H}(X;k)), \tag{4.9.3}$$

falls beide Seiten wohldefiniert sind, falls also die (totale) singuläre Homologie $\mathrm{H}(X;k)$ von X mit Koeffizienten in k beschränkt ist und alle $\mathrm{H}_p(X;k)$ endlichdimensional sind.

Lemma 4.9.13 (Homologische Berechnung der Euler-Charakteristik)**.** *Für jeden beschränkten Komplex endlichdimensionaler* k*-Vektorräume* A *gilt*

$$\chi(A) = \chi(\mathrm{H}(A))$$

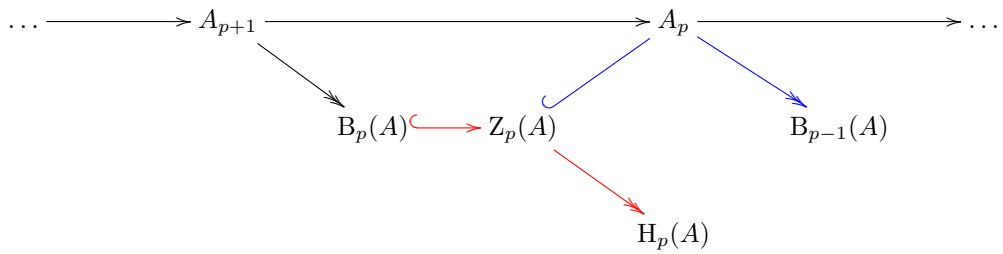
In Worten hat also A *dieselbe Euler-Charakteristik wie seine totale Homologie* $\mathrm{H}(A)$*.*

Insbesondere gilt: Ist A *azyklisch, so gilt* $\chi(A) = 0$*.*

[75] Man könnte eine Familie $A = (A_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Vektorräumen *endlichdimensional* nennen, wenn $\bigoplus_{p\pi\mathbb{Z}} A_p$ endliche Dimension hat. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass die Familie beschränkt ist und aus endlichdimensionalen Vektorräumen besteht. Zur Zeit bleibe ich bei der langen Variante...

Beweis. Das rote bzw. blaue Teildiagramm des kommutativen Diagramms

(4.9.4)



ist eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen; alle beteiligten Vektorräume sind endlichdimensional. Da die k-Dimension $\dim = \dim_k$ offensichtlich additiv[76] auf kurzen exakten Sequenzen von endlichdimensionalen Vektorräumen ist, folgt

$$\begin{aligned}\dim(A_p) &= \dim(\mathrm{Z}_p(A)) + \dim(\mathrm{B}_{p-1}(A)),\\ \dim(Z_p(A)) &= \dim(\mathrm{B}_p(A)) + \dim(\mathrm{H}_p(A))\end{aligned}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Für hinreichend großes $|p|$ verschwinden alle A_p, $\mathrm{Z}_p(A)$, $\mathrm{B}_p(A)$, $\mathrm{H}_p(A)$, so dass die folgenden unendlichen Summen nur endlich viele Summanden ungleich Null haben.

(4.9.5)

$$\begin{aligned}\chi(A) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \dim(A_p) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \dim(\mathrm{Z}_p(A)) + \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \dim(\mathrm{B}_{p-1}(A))\\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \dim(\mathrm{B}_p(A)) + \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \dim(\mathrm{H}_p(A)) + \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \dim(\mathrm{B}_{p-1}(A))\\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \dim(\mathrm{H}_p(A)) = \chi(\mathrm{H}(A)).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.9.14 (Additivität der topologischen Euler-Charakteristik)**.** Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raums. Seien die Euler-Charakteristiken $\chi(U)$, $\chi(V)$ und $\chi(U \cap V)$ wohldefiniert. Dann ist auch die Euler-Charakteristik $\chi(X)$ wohldefiniert und es gilt

(4.9.6)
$$\chi(X) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V).$$

Hinweis: Mayer-Vietoris und Lemma 4.9.13.

Bemerkung: Für endliche topologische Räume D mit der diskreten Topologie gilt $\chi(D) = |D|$, weswegen man die Euler-Charakteristik als Verallgemeinerung der „Zahl der Punkte“ auffassen kann. Ist eine endliche Menge X die Vereinigung zweier Teilmengen U und V, so gilt die Formel $|X| + |U \cap V| = |U| + |V|$. Die verallgemeinerte „Zahl der Punkte“ χ hat nach (4.9.6) die analoge Additivitätseigenschat.

Aufgabe 4.9.15 (Additivität der Euler-Charakteristik für Komplexe)**.** Sei $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz von beschränkten Komplexen (oder Familien) endlichdimensionaler Vektorräume. Dann gilt $\chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$.

Korollar 4.9.16. *Sei $\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} M$ eine Triangulierung einer kompakten topologische Mannigfaltigkeit der Dimension m. Dann gilt*[77]

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q |\mathcal{K}_q|.$$

Beweis. Nach Korollar 2.2.16 muss $\mathcal{K}$ endlich sein. Somit zeigen 4.9.5 und Korollar 4.9.9

$$\chi(M) = \chi(\Delta(\mathcal{K})) = \chi(\mathcal{K}) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q |\mathcal{K}_q| = \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q |\mathcal{K}_q|.$$

[76] Eine Funktion $f\colon \mathrm{Mod}(k) = \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}(k)) \to \mathbb{Z}$ heißt **additiv**, wenn $f(M) = f(M') + f(M'')$ für jede kurze exakte Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ von Vektorräumen gilt (das geht natürlich allgemeiner für $\mathrm{Mod}(R)$).

[77] Wegen (4.9.2) kann man $\chi(M) = \chi(M;\mathbb{Q})$ durch $\chi(M;k)$ für einen beliebigen Körper k ersetzen.

Es bleibt also $\mathcal{K}_q = \varnothing$ für alle $q > m$ zu zeigen. Dies stimmt nach Aufgabe 4.7.12.(d) (die dortige Zusatzannahme ist hier erfüllt). Alternativ folgt dies aus dem späteren, unabhängig bewiesenen Korollar 5.2.11. □

Beispiel 4.9.17. Besonders anschaulich ist der Fall $m = 2$ von Korollar 4.9.16: Ist F eine triangulierte kompakte Fläche, so gilt

$$\chi(F) = |\text{Ecken}| - |\text{Kanten}| + |\text{Flächen}|.$$

Der Leser mag sich dies an einigen Triangulierungen der Flächen in Beispiele 4.9.7 veranschaulichen (vgl. Satz 4.6.3 und 4.6.2). Beispielsweise gelten:

- Eulerscher Polyedersatz[78]: Für jede Triangulierung der Kugelschale $\mathbb{S}^2$ gilt

  $$2 = |\text{Ecken}| - |\text{Kanten}| + |\text{Flächen}|.$$

  Oft schreibt man dies kurz als $E + F = K + 2$.
- Für jede Triangulierung des 2-Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gilt

  $$|\text{Ecken}| + |\text{Flächen}| = |\text{Kanten}|.$$

Aufgabe 4.9.18. Zunächst eine etwas vage[79] Definition: Ein konvexer regulärer Polyeder ist eine kompakte Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$, die durch reguläre n-Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt je zweier verschiedener regulärer begrenzender n-Ecke leer ist oder aus genau einem gemeinsamen Eckpunkt oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht; außerdem sollen an jeder Ecke genau m Kanten zusammenstoßen; hier sind $m, n \geq 3$ geeignete natürliche Zahlen.

(a) Gib für die fünf platonischen Körper (welche reguläre konvexe Polyeder sind) in einer Tabelle die Werte von m, n, E (= Anzahl der Ecken), K (= Anzahl der Kanten), F (= Anzahl der Flächen) an und bestätige den klassischen Eulerschen Polyedersatz $E + F = K + 2$.

(b) Verwende den klassischen Eulerschen Polyedersatz $E + F = K + 2$ um zu zeigen, dass es keine weiteren regulären konvexen Polyeder gibt (bis auf den offensichtlichen[80] Isomorphiebegriff).
Hinweis: Finde zwei weitere Abhängigkeiten zwischen m, n, E, F, K.

4.10. **Super-Spur.**

4.10.1. Sei R ein Ring. Dann können wir die Kategorie $\mathrm{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$ aller Funktoren $A\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Mod}(R)$ betrachten (siehe Definition A.0.4), wobei wir $\mathbb{Z}$ als diskrete Kategorie auffassen (siehe [Sch20, Beispiel A.1.5.(f)]). Dies klingt vielleicht kompliziert, ist aber eigentlich ganz einfach: Ein Objekt $A \in \mathrm{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$ ist nichts anderes als eine (durch $\mathbb{Z}$ indizierte) Familie $A = (A_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von R-Moduln A_p. Ein Morphismus $f\colon A \to B$ ist eine Familie $f = (f_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von R-Modulmorphismen $f_p\colon A_p \to B_p$. Die Verknüpfung von Morphismen ist die offensichtliche.

Die Kategorie $\mathrm{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$ mag man als **Kategorie $\mathbb{Z}$-indizierter R-Moduln** bezeichnen.

4.10.2. Der offensichtliche Vergiss-Funktor $\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$ bildet einen Komplex $((A_p)_p, (d_p)_p)$ auf die unterliegende Familie $(A_p)_p$ von R-Moduln ab. Ein solcher Komplex ist genau dann beschränkt, wenn seine unterliegende Familie beschränkt ist (siehe Definition 4.9.10).

4.10.3. Wenn wir im Folgenden von Vektorräumen und Morphismen (= linearen Abbildungen) von Vektorräumen und Dimensionen von Vektorräumen sprechen, fixieren wir implizit einen Körper.

---

[78] Klassisch wird der Eulersche Polyedersatz für konvexe Polyeder formuliert, siehe [Wik20, Eulerscher Polyedersatz].
– Unsere Version impliziert die klassische Version: Zerlege die (konvexen) Seitenflächen eines gegebenen konvexen Polyeders durch geeignete Diagonalen in Dreiecke (dabei ändert sich die Größe $E - K + F$ nicht); außerdem liefert dies eine Triangulierung der Polyederoberfläche nach Proposition 2.2.8. Die Polyederoberfläche ist homöomorph zur 2-Sphäre (stereographische Projektion).
– Die klassische Version sollte auch unsere implizieren: Eine Triangulierung der $\mathbb{S}^2$ liefert wie folgt einen konvexen Polyeder. Behalte die Ecken, plätte alle gebogenen Kanten bzw. Dreicke auf der Kugelschale zu gerade Segmenten bzw. flachen Dreiecken. Dadurch erhalten wir einen Polyeder, dessen Seitenflächen Dreiecke sind (manche Dreiecke sind eventuell in derselben Ebene – man könnte diese zusammenfassen, wobei sich $E - K + F$ nicht ändert). Leider ist dieser Polyeder im Allgemeinen nicht konvex – man muss also wohl noch ein bisschen basteln, was ich mir jetzt nicht genauer überlege.

[79] Vgl. [Wik20, Polyeder] und [Wik20, Polyhedron, Definition und Regular polyhedron]

[80] Skalierung, Translation, Rotation

4.10.4. Ich erinnere an die Spur (englisch *trace*)

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}_k(f) = \mathrm{tr}(f|V) = \mathrm{tr}(f\colon V \to V)$$

eines Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper k.[81] Ist ist f bezüglich einer Basis von V durch eine Matrix M dargestellt, so ist $\mathrm{tr}(f) = \sum M_{ii}$ die Summe der Diagonalelemente. Abstrakter ist die offensichtlich Abbildung $\varphi\colon V \otimes_k V^* = V \otimes \mathrm{Hom}_k(V,k) \to \mathrm{End}(V)$ ein Isomorphismus, da V endlichdimensional ist, und die Spur ist die Verknüpfung $\mathrm{End}(V) \xrightarrow[\sim]{\varphi^{-1}} V \otimes V^* \xrightarrow{v\otimes\lambda\mapsto\lambda(v)} k$ des Inversen dieser Abbildung mit der Verjüngung.

4.10.5. Es gilt $\dim(V) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_V)$ für endlichdimensionales V.

Definition 4.10.6. Ist $f = (f_p)_{p\in\mathbb{Z}}\colon A \to A$ ein Endomorphismus einer beschränkten Familie $A = (A_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$-indizierter endlichdimensionaler Vektorräume, so heißt die alternierende Summe

$$\mathrm{str}(f) = \mathrm{str}(f|A) = \mathrm{str}(f\colon A \to A) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \mathrm{tr}(f_p)$$

die **Super-Spur von** f[82]. Dieselbe Formel definiert die **Super-Spur** eines Endomorphismus $f\colon A \to A$ eines beschränkten Komplexes endlichdimensionaler k-Vektorräume. (Man könnte auch sagen, dass wir die Definition mit Hilfe des Vergiss-Funktors $\mathrm{Kom}(k) \to \mathrm{Mod}(k)^{\mathbb{Z}}$ auf solche Endomorphismen ausdehnen.)

4.10.7. Ist A ein beschränkter Komplex (oder eine beschränkte Familie) endlichdimensionaler Vektorräume, so gilt[83]

$$\chi(A) = \mathrm{str}(\mathrm{id}_A). \tag{4.10.1}$$

Lemma 4.9.13 besagt also $\mathrm{str}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{str}(\mathrm{id}_{\mathrm{H}(A)}) = \mathrm{str}(\mathrm{H}(\mathrm{id}_A))$. Dies verallgemeinern wir nun in Lemma 4.10.8 zu beliebigen Endomorphismen.

Lemma 4.10.8 (Homologische Berechnung der Super-Spur; Hopfsche Spurformel)**.** *Ist $f\colon A \to A$ ein Endomorphismus eines beschränkten Komplexes endlichdimensionaler Vektorräume, so gilt*

$$\mathrm{str}(f) = \mathrm{str}(\mathrm{H}(f)).$$

Hier ist $\mathrm{H}(f) = (\mathrm{H}_p(f))_{p\in\mathbb{Z}}$ der von f induzierte Endomorphismus der totalen Homologie $\mathrm{H}(A)$, welche offensichtlich ebenfalls beschränkt ist und aus endlichdimensionalen Vektorräumen besteht.

Insbesondere gilt: Ist A azyklisch, so gilt $\mathrm{str}(f) = 0$.

Beweis. Sei $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$ eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen. Sei $g\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $g(U) \subset U$, so dass wir mit den induzierten Abbildungen $g'\colon U \to U$ und $g''\colon W \to W$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} U & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & W \\ \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g''} \\ U & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & W \end{array}$$

von Vektorräumen erhalten; äquivalent sind einfach lineare Abbildungen g, g', g'' gegeben, so dass dieses Diagramm kommutativ ist. Ist V endlichdimensional, so gilt die folgende „Additivität der Spur auf Endomorphismen kurzer exakten Sequenzen“

$$\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(g') + \mathrm{tr}(g'').$$

Dies zeigt man, indem man eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzt und g bezüglich dieser Basis als Matrix darstellt.

---

[81] Bei uns wird wohl immer klar sein, über welchem Körper wir arbeiten, aber genau genommen hängt die Spur vom Körper ab. Beispielsweise hat Multiplikation $i\cdot\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit i über den komplexen Zahlen Spur i, über den reellen Zahlen Spur 0.

[82] In [Lüc05, Definition 4.15] wir diese Zahl *Lefschetz-Zahl von f* genannt, vgl. Definition 4.14.1.

[83] Motiviert durch 4.10.5 könnte man $\chi(A)$ auch als *Super-Dimension* von A bezeichnen (oder die rechte Seite als Euler-Spur?).

In der Situation des Lemmas wenden wir diese Erkenntnis auf die beiden kommutativen Diagramme

(4.10.2)
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Z}_p(A) & \hookrightarrow & A_p & \twoheadrightarrow & \mathrm{B}_{p-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Z}_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle f_p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{B}_{p-1}(f)} \\ \mathrm{Z}_p(A) & \hookrightarrow & A_p & \twoheadrightarrow & \mathrm{B}_{p-1}(A) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{B}_p(A) & \hookrightarrow & \mathrm{Z}_p(A) & \twoheadrightarrow & \mathrm{H}_p(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{B}_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Z}_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p(f)} \\ \mathrm{B}_p(A) & \hookrightarrow & \mathrm{Z}_p(A) & \twoheadrightarrow & \mathrm{H}_p(A) \end{array}$$

(siehe Lemma B.1.13) endlichdimensionaler Vektorräume mit kurzen exakten Zeilen an (vgl. (4.9.4)) und erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(f_p) &= \operatorname{tr}(\mathrm{Z}_p(f)) + \operatorname{tr}(\mathrm{B}_{p-1}(f)), \\ \operatorname{tr}(\mathrm{Z}_p(f)) &= \operatorname{tr}(\mathrm{B}_p(f)) + \operatorname{tr}(\mathrm{H}_p(f)) \end{aligned}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Analog wie in (4.9.5) folgt daraus sofort die behauptete Gleichheit. □

Aufgabe 4.10.9 (Eigenschaften der Super-Spur und Folgerungen)**.** Seien A, B, C beschränkte Komplexe endlichdimensionaler k-Vektorräume.

(a) Invarianz unter (zyklischer[84]) Vertauschung: Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ Morphismen von Komplexen, so gilt $\operatorname{str}(f \circ g) = \operatorname{str}(g \circ f)$.

(b) „Isomorphe Endomorphismen haben dieselbe Super-Spur:“ Sind $f\colon A \to A$ und $g\colon B \to B$ Endomorphismen und existiert ein Isomorphismus $v\colon A \xrightarrow{\sim} B$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle v}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle v}\downarrow{\scriptstyle \sim} \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

kommutiert, so gilt $\operatorname{str}(g) = \operatorname{str}(f)$. (Die „undiagrammatische“ Version benötigt nur f und v und behauptet $\operatorname{str}(v \circ f \circ v^{-1}) = \operatorname{str}(f)$.)

(c) Linearität: $\operatorname{str}\colon \operatorname{Kom}(A, A) \to k$ ist eine k-lineare Abbildung.

(d) Additivität: Seien $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz und

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Komplexen (also ein Endomorphismus unserer kurzen exakten Sequenz). Dann gilt $\operatorname{str}(g) = \operatorname{str}(f) + \operatorname{str}(h)$.

(e) Folgere Aufgabe 4.9.15 aus (d).

(f) Sei $f\colon A \to A$ ein Endomorphismus von Komplexen und $f'\colon A' \to A'$ seine „Verschiebung um eins gegen die Pfeilrichtung“, d. h. $A'_p := A_{p-1}$ und $f'_p := f_{p-1}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$[85]. Dann gilt $\operatorname{str}(f') = -\operatorname{str}(f)$.

(g) Homologische Berechnung; Hopfsche Spurformel: Folgere Lemma 4.10.8 aus (d) und (f).
Hinweis: Verwende die Diagramme in (4.10.2).

(h) Invarianz unter Homotop-Sein: Sind $A \underset{f}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A$ homotope Morphismen von Komplexen, so gilt $\operatorname{str}(f) = \operatorname{str}(g)$.
Bemerkung: Somit ist $\operatorname{str}\colon \operatorname{Hot}_k(A, A) \to k$ wohldefiniert (und k-linear).

Bemerkung: Bis auf die beiden Punkte (g) und (h) (die sinnlos würden) gelten alle Aussagen analog für beschränkte Familien A, B, C endlichdimensionaler Vektorräume und Morphismen solcher Familien.

Ende der 16. Vorlesung am 18.12.2020.
Hausaufgaben:

[84] Weil beispielsweise $\operatorname{str}(e \circ f \circ g \circ h \circ j) = \operatorname{str}(f \circ g \circ h \circ j \circ e)$ folgt.

[85] und üblicherweise dem Differential $d_p^{A'} := -d_{p-1}^{A}$, was aber in dieser Aufgabe keine Rolle spielt.

(1) Aufgabe 4.9.14 (Additivität der topologischen Euler-Charakteristik)
(2) Aufgabe 4.9.18 (platonische Körper)
(3) 8 Punkte: Aufgabe 4.10.9 (Eigenschaften der Super-Spur)
(4) Wiederhole den Stoff! Melde jeden noch so kleinen Fehler im Skript!
(5) Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr und gute Gesundheit!

4.11. **Simplizialer Fixpunktsatz.**

4.11.1. Als erste Anwendung der Super-Spur zeigen wir den simplizialen Fixpunktsatz 4.11.2.[86] Meist wird nur seine Teilaussage (b) als simplizialer Fixpunktsatz bezeichnet.

Satz 4.11.2 (Simplizialer Fixpunktsatz - rein kombinatorische Aussage!)**.** *Sei $\varphi\colon (E,\mathcal{K}) \to (E,\mathcal{K})$ ein Endomorphismus (= eine simpliziale Selbstabbildung) eines endlichen Simplizialkomplexes. Seien k ein Körper und*

$$\mathrm{H}(\varphi;k) = \mathrm{H}(\varphi) = (\mathrm{H}_q(\varphi))_{q\in\mathbb{Z}}\colon \mathrm{H}(\mathcal{K};k) \to \mathrm{H}(\mathcal{K};k)$$

die induzierte Abbildung auf der (totalen) simplizialen Homologie von $\mathcal{K}$ mit Koeffizienten in k (siehe Aufgabe 2.4.27).

(a) In k gilt

$$\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi;k)) = \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{K}_q\\ \varphi(\sigma)=\sigma}} \mathrm{sgn}(\varphi\colon \sigma\to\sigma), \tag{4.11.1}$$

wobei $\mathrm{sgn}(\varphi\colon \sigma\to\sigma)$ die Signatur der Permutation (= bijektiven Selbstabbildung) der endlichen Menge $\sigma = \varphi(\sigma)$ meint.

Insbesondere gilt $\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi;\mathbb{Q})) \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ und für jeden Körper k ist $\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi;k))$ das Bild dieser ganzen Zahl unter dem eindeutigen Ringmorphismus $\mathbb{Z}\to k$. Insbesondere folgt aus $\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi;k)) \neq 0$ bereits $\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi;\mathbb{Q})) \neq 0$.

(b) Fixiert φ keinen Simplex der Dimension ≥ 1 fixiert, in Formeln $\varphi(\sigma)\neq\sigma$ für alle $\sigma\in\mathcal{K}_{\geq 1}$, so gilt

$$\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi;k)) = |E^\varphi|$$

wobei $E^\varphi = \{e\in E \mid \varphi(e)=e\}$ die Menge der Fixpunkte von φ ist.

Ist insbesondere die Super-Spur von $\mathrm{H}(\varphi;\mathbb{Q})$ von Null verschieden, in Formeln $\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi;\mathbb{Q})) \neq 0$, so hat $\varphi\colon E\to E$ einen Fixpunkt, d. h. φ fixiert eine Ecke.

Beweis. Da $\mathcal{K}$ endlich ist, ist $\mathrm{S}(\mathcal{K};k)$ nach 2.4.22 ein beschränkter Komplex endlichdimensionaler Vektorräume. Die Hopfsche Spurformel aus Lemma 4.10.8 ist also anwendbar und zeigt

$$\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi)) = \mathrm{str}(\mathrm{H}(\mathrm{S}(\varphi))) = \mathrm{str}(\mathrm{S}(\varphi)) = \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q \mathrm{tr}(\mathrm{S}_q(\varphi)|\mathrm{S}_q(\mathcal{K};k)).$$

(a) Sei $\leq$ eine Ordnung auf E und sei $q\in\mathbb{N}$ fixiert. Nach 2.4.22 ist $\big((s_0,\dots,s_q)\big)_{(s_0,\dots,s_q)\in\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}}$ eine k-Basis von $\mathrm{S}_q(\mathcal{K};k)$. Die lineare Abbildung $\mathrm{S}_q(\varphi)$ ist bezüglich dieser Basis nach (2.4.15) durch eine Matrix dargestellt, die in jeder Spalte maximal einen von Null verschiedenen Eintrag hat, welcher ± 1. Wir erhalten

$$\mathrm{tr}(\mathrm{S}_q(\varphi)) = \sum_{\substack{(s_0,\dots,s_q)\in\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}\\ (\{\varphi(s_0),\dots,\varphi(s_q)\}=\{s_0,\dots,s_q\}}} \mathrm{sgn}(\varphi\colon \{s_0,\dots,s_q\}\to\{s_0,\dots,s_q\}).$$

Daraus folgt sofort (4.11.1).

(b) Die Annahme, dass kein Simplex der Dimension ≥ 1 von φ fixiert wird, zeigt, dass auf der rechten Seite von (4.11.1) alle Summanden für $q>0$ verschwinden. Der Summand für $q=0$ ist aber $|E^\varphi|$, denn jede Permutation einer einelementigen Menge hat Signatur Eins. □

[86] Wenn ich es recht sehe, wird dieser Satz im weiteren Verlauf dieses Skripts nicht verwendet.

Beispiel 4.11.3. Sei $\mathcal{K}$ der maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge $E = \{a, b, c\}$. Sei $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ die durch zyklische Vertauschung $a \overset{\varphi}{\mapsto} b \overset{\varphi}{\mapsto} c \overset{\varphi}{\mapsto} a$ gegebene simpliziale Abbildung. Dann lebt $\mathrm{H}(\mathcal{K};\mathbb{Q})$ nur im Grad Null (per Rechnung oder kombinatorisch wegen Korollar 2.4.31.(a) oder topologisch wegen Satz 4.8.11) und es gilt $\mathrm{H}_0(\mathcal{K};\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a]$ und $\mathrm{H}_0(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}_0(\mathcal{K};\mathbb{Q})}$ (wegen $[b] = [a]$ in $\mathrm{H}_0(\mathcal{K};\mathbb{Q})$ oder Natürlichkeit in Satz 4.8.11). Dies zeigt $\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi)) = 1 \neq 0 = |E^\varphi|$. Dies widerspricht aber nicht dem simplizialen Fixpunktsatz 4.11.2.(b), denn φ fixiert den 3-Simplex $\{a, b, c\}$ (Teilaussage (a) gilt aber, wie man leicht prüft). Wir entfernen diesen nun.

Betrachte den Unterkomplex $\mathcal{U} := \mathcal{K} \setminus \{\{a, b, c\}\}$ und die induzierte simpliziale Abbildung $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, auf die der simpliziale Fixpunktsatz 4.11.2.(b) anwendbar ist. Mit Korollar 2.4.31.(b) berechnen wir $\mathrm{H}_0(\mathcal{U};\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a]$ und $\mathrm{H}_1(\mathcal{U};\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\partial(a, b, c)] = \mathbb{Q}[(ab) + (bc) + (ca)]$ und $\mathrm{str}(\mathrm{H}(\varphi)) = 1 - 1 = 0 = |E^\varphi|$ wie vom Fixpunktsatz vorausgesagt.

Beispiel 4.11.4. Überprüfe den simplizialen Fixpunktsatz 4.11.2.(b) für diverse simpliziale Selbstabbildungen des „simplizialen Quadrat(rand)s“ aus Aufgabe 2.4.24, etwa die „Spiegelung an der Diagonalen“.

Wer mag kann, kann analoges für das das volle Quadrat oder den Tetraeder (ohne topdimensionalen Simplex, ohne 2-Simplizes, ...) tun.

Aufgabe 4.11.5. Sei $\mathcal{K}$ ein endlicher Simplizialkomplex, dessen simpliziale Homologie $\mathrm{H}(\mathcal{K};\mathbb{Q})$ nur in Grad Null lebt und dort isomorph zu $\mathbb{Q}$ ist (beispielsweise weil seine geometrische Realisierung $\Delta(\mathcal{K})$ zusammenziehbar ist). Sei $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ eine simpliziale Abbildung. Dann gelten:

(a) Die Abbildung φ hat einen Fix-Simplex: Es gibt einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $\varphi(\sigma) = \sigma$.
(b) Folgere: Die Abbildung $\Delta(\varphi)\colon \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{K})$ hat einen Fixpunkt.
Bemerkung: Ist $\Delta(\mathcal{K}) \cong D_n$ eine Triangulierung, so zeigt dies den Brouwerschen Fixpunktsatz 4.5.8 für stetige Abbildungen $D_n \to D_n$ der Form $\Delta(\varphi)$.
(c) Teilaussage (a) folgt im Fall $\Delta(\mathcal{K}) \cong D_n$ aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz 4.5.8.

4.12. Baryzentrische Unterteilung für Simplizialkomplexe.

Definition 4.12.1. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Wir definieren einen neuen Simplizialkomplex

$$\mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}}),$$

seine **baryzentrische Unterteilung**, wie folgt. Seine Ecken sind die Simplizes von $\mathcal{K}$, in Formeln

$$\check{E} := \mathcal{K}.$$

Seine q-Simplizes sind alle $(q+1)$-elementigen Teilmengen der durch die Inklusionsrelation $\subset$ partiell geordneten Menge $\mathcal{K}$, die (total)geordnet sind, in Formeln

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}\mathcal{K})_q = \check{\mathcal{K}}_q &:= \{\kappa \subset \check{E} = \mathcal{K} \mid |\kappa| = q+1 \text{ und die Inklusionsrelation } \subset \text{ definiert eine (totale) Ordnung auf } \kappa\} \\ &= \{(\sigma_0, \ldots, \sigma_q) \in \mathcal{K}^{q+1} \mid \sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q\} \\ &= \{\text{Ketten } \sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q \text{ der Länge } q \text{ in } \mathcal{K}\},\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen genauer die durch $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_q\} \leftarrow\!\shortmid (\sigma_0, \ldots, \sigma_q)$ gegebene Bijektion ist. Wir schreiben Elemente von $\check{\mathcal{K}}_q$ meist als $(\sigma_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q)$.

Beispiel 4.12.2. Ist $\mathcal{K}$ der maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge $\{a, b, c\}$, so hat seine baryzentrische Unterteilung 7 Ecken

$$\overline{a} := \{a\}, \quad \overline{b} := \{b\}, \quad \overline{c} := \{c\}, \quad \overline{ab} := \{a, b\}, \quad \overline{ac} := \{a, c\}, \quad \overline{bc} := \{b, c\}, \quad \overline{abc} := \{a, b, c\},$$

7 Null-Simplizes

$$(\overline{a}), (\overline{b}), (\overline{c}), (\overline{ab}), (\overline{ac}), (\overline{bc}), (\overline{abc}),$$

12 Eins-Simplizes[87]

$$(\overline{a} \subsetneq \overline{ab}), (\overline{a} \subsetneq \overline{ac}), (\overline{a} \subsetneq \overline{abc}),$$
$$(\overline{b} \subsetneq \overline{ab}), (\overline{b} \subsetneq \overline{bc}), (\overline{b} \subsetneq \overline{abc}),$$
$$(\overline{c} \subsetneq \overline{ac}), (\overline{c} \subsetneq \overline{bc}), (\overline{c} \subsetneq \overline{abc}),$$
$$(\overline{ab} \subsetneq \overline{abc}), (\overline{ac} \subsetneq \overline{abc}), (\overline{bc} \subsetneq \overline{abc}),$$

und 6 Zwei-Simplizes

$$(\overline{a} \subsetneq \overline{ab} \subsetneq \overline{abc}), (\overline{a} \subsetneq \overline{ac} \subsetneq \overline{abc}),$$
$$(\overline{b} \subsetneq \overline{ab} \subsetneq \overline{abc}), (\overline{b} \subsetneq \overline{bc} \subsetneq \overline{abc}),$$
$$(\overline{c} \subsetneq \overline{ac} \subsetneq \overline{abc}), (\overline{c} \subsetneq \overline{bc} \subsetneq \overline{abc}).$$

Vergleiche mit „geometrischer“ baryzentrischer Unterteilung eines singulären 2-Simplex (6 Dreiecke, 12 Kanten, 7 Ecken), siehe Abbildung 3. Male Bild von B$\mathcal{K}$. Male auch Bild von $\Delta(\mathcal{K})$ und „schlechtes“ Bild von $\Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$, in dem die sechs Dreiecke wir ein Sechseck bilden. Dies illustriert dann gleich die folgende Definition von u.

4.12.3. Seien $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex und $\mathrm{B}\mathcal{K} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}})$ seine baryzentrische Unterteilung. Sei

$$u = u_{\mathcal{K}} \colon \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{K})$$

die von der linearen Abbildung $\mathbb{R}\check{E} \to \mathbb{R}E$ mit

$$u(\sigma) = \underbrace{\tfrac{1}{|\sigma|} \sum_{e \in \sigma} e}_{\text{Schwerpunkt von } \Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})} \qquad \text{für alle Ecken } \sigma \in \check{E} = \mathcal{K} \text{ von } \mathrm{B}\mathcal{K},$$

induzierte Abbildung (dies ist wohldefiniert, vgl. (4.12.1)).

Beispiel 4.12.4 (Fortsetzung von Beispiel 4.12.2)**.** Wir wollen das unten angegebene Lemma 4.12.5 in diesem Beispiel plausibel machen. Die Einschänkung der Abbildung $u \colon \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{K})$ auf $\Delta((\overline{c} \subsetneq \overline{ac} \subsetneq \overline{abc}))$ ist durch

$$x = t_{\overline{c}}\overline{c} + t_{\overline{ac}}\overline{ac} + t_{\overline{abc}}\overline{abc} \mapsto u(x) = t_{\overline{c}}c + t_{\overline{ac}}\tfrac{a+c}{2} + t_{\overline{abc}}\tfrac{a+b+c}{3}$$

gegeben und landet also in Abbildung 3 im abgeschlossenen grauen Dreieck. Man beachte, dass mit a, b, c

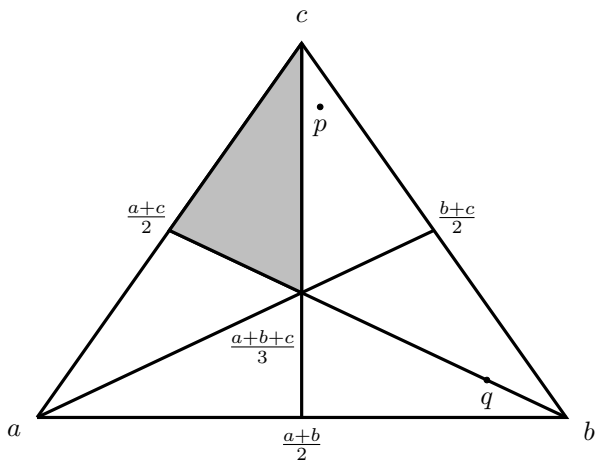


Abbildung 3. Illustration zur baryzentrischen Unterteilung und zum Beweis von Lemma 4.12.5

[87] Der 1-Simplex $(\overline{a} \subsetneq \overline{ab})$ ist $(\overline{a}, \overline{ab}) = (\{a\}, \{a, b\})$ in Tupelschreibweise und $\{\overline{a}, \overline{ab}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a, b\}, \{a\}\}$ in Teilmengenschreibweise.

auch a, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b+c}{3}$ linear unabhängig sind. Unsere Einschränkung ist also eine injektive Abbildung

$$\Delta\big(\{\overline{c} \subsetneq \overline{ac} \subsetneq \overline{abc}\}\big) \hookrightarrow \Delta(\{a,b,c\}) = \Delta(\mathcal{K}).$$

Die beiden folgenden Rechnungen zeigen, dass die wie folgt definierten und in Abbildung 3 angedeuteten „beliebigen“ Punkte $p, q \in \Delta(\mathcal{K})$ im Bild unserer Abbildung u liegen:

$$\begin{aligned}
p &= \tfrac{5}{100}a + \tfrac{12}{100}b + \tfrac{83}{100}c \\
&= \tfrac{5}{100}(a+b+c) + \tfrac{7}{100}b + \tfrac{78}{100}c \\
&= \tfrac{15}{100}\tfrac{a+b+c}{3} + \tfrac{7}{100}(b+c) + \tfrac{71}{100}c \\
&= \tfrac{15}{100}\tfrac{a+b+c}{3} + \tfrac{14}{100}\tfrac{b+c}{2} + \tfrac{71}{100}c \\
q &= \tfrac{1}{10}a + \tfrac{8}{10}b + \tfrac{1}{10}c \\
&= \tfrac{1}{10}(a+b+c) + \tfrac{7}{10}b \\
&= \tfrac{3}{10}\tfrac{a+b+c}{3} + \tfrac{7}{10}b
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den folgenden Algorithmus verwendet, den wir am Beispiel des Punktes p erklären: Bestimme den Träger von p, hier $\{a,b,c\}$. Sei m der minimale vorkommende (positive) Koeffizient, hier $\frac{5}{10}$. Schreibe p als Summe des m-fachen der Summe der Elemente des Trägers (hier der Summand $\frac{5}{10}(a+b+c)$) und des Restes. Der Rest hat kleineren Träger und kann mit demselben Verfahren behandelt werden.

Lemma 4.12.5. *Ist $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex, so ist $u\colon \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{K})$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. (1) Sei $\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q) \in \mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}}$ ein q-Simplex. Dann ist u auf $\Delta(\kappa) \subset \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$ durch die Verknüpfung

$$\begin{aligned}
\Delta(\kappa) &\to \Delta(\sigma_q) \subset \Delta(\mathcal{K}), \\
\sum_{i=0}^{q} t_i \sigma_i &\mapsto \sum_{i=0}^{q} t_i b_{\sigma_i},
\end{aligned} \tag{4.12.1}$$

gegeben, wobei b_{σ_i} der Schwerpunkt von $\Delta(\sigma_i)$ ist; da all diese Schwerpunkte in $\Delta(\sigma_q)$ liegen (= Konvexkombinationen der Elemente von σ_q sind), liegt auch die Konvexkombination $\sum t_i b_{\sigma_i}$ dieser Schwerpunkte wie behauptet in $\Delta(\sigma_q)$.

Da die Einschränkung von u auf $\Delta(\kappa)$ offensichtlich stetig ist und κ beliebig war, ist u stetig.

(2) Sei $\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q) \in \mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}}$ wie eben ein q-Simplex. Sei $x \in \Delta(\kappa)'$ (äquivalent: $x \in \Delta(\kappa)$ und $\mathrm{Supp}(x) = \kappa$, siehe (2.2.3)). Schreiben wir $x = \sum_{i=0}^{q} t_i \sigma_i$, so sind also alle t_i positiv. Wir berechnen

(mit der Konvention $\sigma_{-1} = \varnothing$)

(4.12.2)

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=0}^{q} t_i b_{\sigma_i} \\
&= \sum_{i=0}^{q} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \Big(\sum_{e \in \sigma_i} e \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{q} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \Big(\sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}} e + \sum_{e \in \sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}} e + \cdots + \sum_{e \in \sigma_1 \setminus \sigma_0} e + \sum_{e \in \sigma_0} e \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{q} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \Big(\sum_{j=0}^{i} \sum_{e \in \sigma_j \setminus \sigma_{j-1}} e \Big) \\
&= \sum_{\substack{0 \le i \le q \\ 0 \le j \le q \\ j \le i}} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \sum_{e \in \sigma_j \setminus \sigma_{j-1}} e \\
&= \sum_{j=0}^{q} \Big(\sum_{i=j}^{q} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \Big) \sum_{e \in \sigma_j \setminus \sigma_{j-1}} e \\
&= \underbrace{\Big(\frac{t_q}{|\sigma_q|} \Big)}_{:= s_q} \sum_{e \in \sigma_q \setminus \sigma_{q-1}} e + \underbrace{\Big(\sum_{i=q-1}^{q} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \Big)}_{:= s_{q-1}} \sum_{e \in \sigma_{q-1} \setminus \sigma_{q-2}} e + \cdots + \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{q} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \Big)}_{:= s_1} \sum_{e \in \sigma_1 \setminus \sigma_0} e + \underbrace{\Big(\sum_{i=0}^{q} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \Big)}_{:= s_0} \sum_{e \in \sigma_0} e.
\end{aligned}
$$

Beachte $0 < s_q < s_{q-1} < \cdots < s_1 < s_0$. Fassen wir $u(x)$ als Funktion $E \to [0,1]$ mit endlichem Träger auf, so sind die $s_0, \ldots, s_q$ genau die positiven Werte von $u(x)$, die Zahl $q+1$ ist die Anzahl der positiven Werte und es gilt

$$u(x)^{-1}(s_i) = \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}.$$

Also bestimmt $u(x)$ zuerst q, dann alle $0 < s_q < s_{q-1} < \cdots < s_1 < s_0$ und dann alle σ_i (und damit κ). Daraus können wir zuerst t_q, dann t_{q-1}, usw. und schließlich t_0 berechnen. Also ist $x = \sum_{i=0}^{q} t_i \sigma_i$ vollständig durch $u(x)$ bestimmt.

Aus der obigen Rechnung ist klar, dass σ_q der Träger von $u(x)$ ist, in Formeln $u(x) \in \Delta(\sigma_q)'$.

Insgesamt zeigt dies, dass die Einschränkung $u\colon \Delta(\kappa)' \hookrightarrow \Delta(\sigma_q)'$ injektiv ist.

(3) Injektivität von u: Sei $x \in \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$ beliebig. Dann gibt es genau ein $\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q) \in \mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}}$ mit $x \in \Delta(\kappa)'$, nämlich den Träger von x. Wir haben gerade gesehen, wie man alle σ_i und damit κ aus $u(x)$ berechnet.

Gilt also $u(x) = u(y)$ für zwei beliebige Elemente $x, y \in \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$, so haben x und y also denselben Träger κ, d. h. $x, y \in \Delta(\kappa)'$. Da $u\colon \Delta(\kappa)' \hookrightarrow \Delta(\sigma_q)'$ injektiv ist, folgt $x = y$.

(4) Surjektivität von u (in gewisser Weise klar durch Beispiel 4.12.4): Wir lesen den Beweis der Injektivität rückwärts. Sei $v \in \Delta(\mathcal{K})$ gegeben. Sei q so gewählt, dass $q+1$ die Anzahl positiver Werte von $v\colon E \to [0,1]$ ist und seien $0 < s_q < s_{q-1} < \cdots < s_1 < s_0$ die positiven Werte. Definiere Teilmengen $\sigma_0, \ldots, \sigma_q \subset E$ durch $v^{-1}(s_0) = \sigma_0$, $v^{-1}(s_1) = \sigma_1 \setminus \sigma_0$, …, $v^{-1}(s_q) = \sigma_q - \sigma_{q-1}$ (äquivalent: $\sigma_i := v^{-1}([s_i, 1])$). Da σ_q der Träger von v ist und $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_q$ gilt, sind alle σ_i in $\mathcal{K}$ und damit ist $\kappa := (s_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_q) \in \mathrm{B}\mathcal{K}$ ein Simplex von $\mathrm{B}\mathcal{K}$. Es gilt $v = s_q \sum_{e \in \sigma_q \setminus \sigma_{q-1}} e + \cdots + s_0 \sum_{e \in \sigma_0} e$. Definiere $t_0, \ldots, t_q \in \mathbb{R}_{>0}$ (bei t_q beginnend) durch $s_i = \sum_{j=i}^{q} \frac{t_j}{|\sigma_j|}$.

Wir behaupten, dass dann $x := \sum_{i=0}^{q} t_i \sigma_i$ das gesuchte Urbild von v ist. Dies scheint klar nach der obigen Rechnung (4.12.2), jedoch sollte man sich überzeugen dass $x \in \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$ gilt (und nicht nur $x \in \mathbb{R}\check{E}$). Zu zeigen ist also $\sum_{i=0}^{q} t_i = 1$. Wir führen diese Rechnung exemplarisch im Fall $q = 2$

durch; die folgende erste Gleichung besagt schlicht, dass die Summe der Koeffizienten von v Eins ist.

$$\begin{aligned}1 &= s_2 \cdot |\sigma_2 \setminus \sigma_1| + s_1 \cdot |\sigma_1 \setminus \sigma_0| + s_0 \cdot |\sigma_0| \\ &= \frac{t_2}{|\sigma_2|} \cdot |\sigma_2 \setminus \sigma_1| + \Big(\frac{t_2}{|\sigma_2|} + \frac{t_1}{|\sigma_1|}\Big) \cdot |\sigma_1 \setminus \sigma_0| + \Big(\frac{t_2}{|\sigma_2|} + \frac{t_1}{|\sigma_1|} + \frac{t_0}{|\sigma_0|}\Big) \cdot |\sigma_0| \\ &= \frac{t_2}{|\sigma_2|} \cdot |\sigma_2| + \frac{t_1}{|\sigma_1|} \cdot |\sigma_1| + \frac{t_0}{|\sigma_0|} \cdot |\sigma_0| \\ &= t_2 + t_1 + t_0.\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall geht vollkommen analog.

(5) Nun ist klar, dass für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$ die Bijektion u die Abbildung

$$\bigsqcup_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ \kappa = (\sigma_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q) \in \mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}} \\ \sigma_q = \sigma}} \Delta(\kappa)' \to \Delta(\sigma)'$$

induziert und dass diese bijektiv ist. Wegen $\Delta(\sigma) = \bigsqcup_{\tau \subset \sigma} \Delta(\tau)'$ ist auch

$$L(\sigma) := \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ \kappa = (\sigma_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q) \in \mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}} \\ \sigma_q \subset \sigma}} \Delta(\kappa) = \bigsqcup_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ \kappa = (\sigma_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \sigma_q) \in \mathrm{B}\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}} \\ \sigma_q \subset \sigma}} \Delta(\kappa)' \to \Delta(\sigma) \tag{4.12.3}$$

bijektiv. Beiden Seiten sind Hausdorff (nach Proposition 2.2.11) und kompakt (die linke Seite als endliche Vereinigung der Kompakta $\Delta(\kappa)$). Als bijektive stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ist unsere Abbildung automatisch ein Homöomorphismus ([Sch20, Satz 2.7.15]).

(6) Offensichtlich ist $\Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$ die Vereinigung aller Teilmengen $\Delta(\kappa)$, für $\kappa \in \mathrm{B}\mathcal{K}$, und auch die Vereinigung aller Teilmengen $L(\sigma)$, für $\sigma \in \mathcal{K}$. Für eine beliebige Teilmenge $U \subset \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$ gelten die folgenden Implikationen (die letzte gilt auf Grund der Definition der Topologie von $\Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$

$$\begin{aligned}U \subseteq \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K}) &\implies U \cap L(\sigma) \subseteq L(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{K} \\ &\implies U \cap \Delta(\kappa) \subseteq \Delta(\kappa) \quad \forall \kappa \in \mathrm{B}\mathcal{K} \\ &\implies U \subseteq \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K}).\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$ die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $L(\sigma) \subset \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})$ trägt, für $\sigma \in \mathcal{K}$. Da $\Delta(\mathcal{K})$ per Definition die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ trägt, da alle Abbildungen (4.12.3) Homöomorphismen sind und da $u\colon \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{K})$ bijektiv ist, ist u ein Homöomorphismus. □

Aufgabe 4.12.6.

(a) Sei $\varphi\colon \mathcal{K} = (E, \mathcal{K}) \to \mathcal{L} = (F, \mathcal{L})$ eine simpliziale Abbildung (= ein Morphismus in SimpKomp), also eine Abbildung $\varphi\colon E \to F$, so dass die induzierte Abbildung $\mathcal{P}(\varphi)\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$, $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$, zwischen den Potenzmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ nach $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(F)$ abbildet. Dann definiert $\mathcal{P}(\varphi)$ eine simpliziale Abbildung $\mathrm{B}\mathcal{K} \to \mathrm{B}\mathcal{L}$, die wir als $\mathrm{B}\varphi$ notieren.

(b) Die Zuordnungen $\mathcal{K} \mapsto \mathrm{B}\mathcal{K}$ und $\varphi \mapsto \mathrm{B}\varphi$ definieren einen Endofunktor

$$\mathrm{B}\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{SimpKomp}$$

der Kategorie der Simplizialkomplexe.

(c) Die Familie der Homöomorphismen $u_{\mathcal{K}}\colon \Delta(\mathrm{B}\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$ ist KEINE Isotransformation

$$u := (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathrm{SimpKomp}}\colon \Delta \circ \mathrm{B} \xRightarrow{\sim} \Delta\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Top}\,.$$

Ende der 17. Vorlesung am 07.01.2021.

4.13. **Simpliziale Approximation.**

4.13.1. Die n-fache baryzentrische Unterteilung von $\mathcal{K}$ wird als $\mathrm{B}^n\mathcal{K} = \mathrm{B}\cdots\mathrm{B}\mathcal{K}$ notiert. Die Verknüpfung der Homöomorphismen $u = u_{\mathrm{B}^i\mathcal{K}}\colon \Delta(\mathrm{B}^{i+1}\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathrm{B}^i\mathcal{K})$ (aus Lemma 4.12.5) wird als

$$u^n := u \circ \cdots \circ u\colon \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$$

notiert.

Definition 4.13.2. Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ Simplizialkomplexe und sei $f\colon \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{L})$ eine stetige Abbildung zwischen ihren geometrischen Realisierungen. Eine **simpliziale Approximation an** f ist ein Paar (n, φ) bestehend aus einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einer simplizialen Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{B}^n\mathcal{K} \to \mathcal{L}$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ ein Simplex $\sigma = \sigma_x \in \mathcal{L}$ existiert, dessen voller Simplex $\Delta(\sigma)$ sowohl $f(u^n(x))$ als auch $(\Delta(\varphi))(x)$ enthält,[88] wie im folgenden Diagramm illustriert.

$$\begin{array}{ccccccccc}
u^n(x) & \in & \Delta(\mathcal{K}) & \xrightarrow{f} & \Delta(\mathcal{L}) & \supset & \Delta(\sigma) & \ni & f(u^n(x)) \\
\uparrow & & {\scriptstyle u^n}\uparrow{\scriptstyle \sim} & \nearrow_{\Delta(\varphi)} & & & \cup & & \\
x & \in & \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) & & & & (\Delta(\varphi))(x) & &
\end{array}$$

Dieses Diagramm ist im Allgemeinen *nicht* kommutativ in Top[89] – der Punkt ist ja gerade, dass man die (im Allgemeinen nicht kombinatorisch gegebene) Abbildung f kombinatorisch durch φ *approximieren* kann.

Aufgabe 4.13.3. Finde simpliziale Approximationen der Identitätsabbildung $f = \mathrm{id}\colon [0,1] \to [0,1]$ in den vier Situationen aus Abbildung 4, die die jeweilige Triangulierung von Ausgangs- bzw. Zielintervall beschreiben. Wie oft muss man jeweils mindestens baryzentrisch unterteilen.

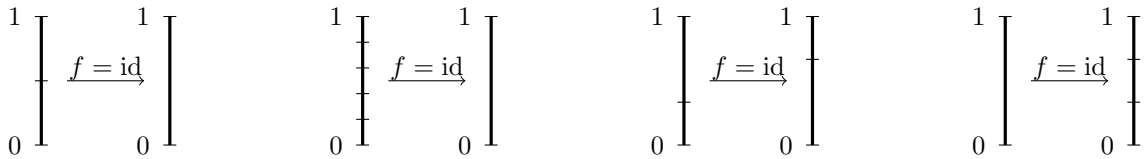


Abbildung 4. Bilder zu Aufgabe 4.13.3

Bemerkung: Eine Lehre aus dieser Aufgabe ist, dass die geometrische Realisierung $\Delta(\varphi)$ einer simplizialen Approximation φ an einen Homöomorphismus im Allgemeinen kein Homöomorphismus ist.

Proposition 4.13.4. *Sei $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ eine simpliziale Approximation an $f\colon \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{L})$. Dann sind $f \circ u^n$ und $\Delta(\varphi)$ homotop vermöge der (stetigen!) Homotopie*

$$\begin{aligned} H\colon \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) \times [0,1] &\to \Delta(\mathcal{L}), \\ (x,t) &\mapsto t(\Delta(\varphi))(x) + (1-t)f(u^n(x)), \end{aligned}$$

homotop.

Beweis. Zunächst ist zu beachten, dass H als Abbildung von Mengen wohldefiniert ist: Für jedes $x \in \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ gibt es einen Simplex $\sigma_x \in \mathcal{L}$ mit $f(u^n(x)), (\Delta(\varphi))(x) \in \Delta(\sigma_x)$. Damit liegt auch für jedes $t \in [0,1]$ die Konvexkombination $t(\Delta(\varphi))(x) + (1-t)f(u^n(x))$ in $\Delta(\sigma_x) \subset \Delta(\mathcal{L})$.

Wir zeigen nun, dass H stetig ist, falls $\mathcal{L} = (F, \mathcal{L})$ endlich ist (vermutlich brauchen wir eh nur diesen Fall in der Vorlesung). Dann trägt $\Delta(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}F$ als geometrische Realisierung eines endlichen Simplizialkomplexes die induzierte Topologie (siehe 2.2.5). Es genügt also zu zeigen, dass H, aufgefasst als Abbildung nach $\mathbb{R}F$,

[88] Oft wird die stärkere Bedingung $(\Delta(\varphi))(x) \in \Delta(\mathrm{Supp}(f(u^n(x))))$ gefordert, siehe etwa [Spa81, Kapitel 3, Abschnitt 4] oder [Wik20, Simplicial approximation theorem; Achtung, vermutlich fehlen da gewisse Endlichkeitsannahmen!]. Die simpliziale Approximation, die wir in Satz 4.13.8 konstruieren, erfüllt diese Bedingung wegen (4.13.3).

[89] Aber es wird kommutativ in hTop nach Proposition 4.13.4!

stetig ist. Dies ist aber trivial, denn $\Delta(\varphi)$ und $f \circ u^n$ sind stetig als Abbildungen $\Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) \to \mathbb{R}F$, und H ist dann die Verknüpfung stetiger Abbildungen

$$\Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) \times [0,1] \xrightarrow{(x,t)\mapsto((\Delta(\varphi))(x),f(u^n(x)),t)} \mathbb{R}F \times \mathbb{R}F \times [0,1] \xrightarrow{(x,y,t)\mapsto tx+(1-t)y} \mathbb{R}F.$$

Nun sei $\mathcal{L}$ beliebig. Wie in 4.8.9 sehen wir, dass

$$\bigsqcup_{\tau\in\mathrm{B}^n\mathcal{K}} (\Delta(\tau) \times [0,1]) \to \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) \times [0,1]$$

final und surjektiv ist. Es genügt also zu zeigen, dass alle Restriktionen $\Delta(\tau) \times [0,1] \to \Delta(\mathcal{L})$ von H stetig sind. Da die Bilder des Kompaktums $\Delta(\tau)$ unter den stetigen Abbildungen $f \circ u^n$ und $\Delta(\varphi)$ kompakt sind, sind diese Bilder nach Proposition 2.2.15 für einen geeigneten endlichen Unterkomplex $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ in $\Delta(\mathcal{L}')$ enthalten. Es genügt also zu zeigen, dass die induzierte Abbildung $\Delta(\tau) \times [0,1] \to \Delta(\mathcal{L}')$ stetig ist. Dies folgt aber aus dem obigen Argument.[90] □

Definition 4.13.5. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex. Gegeben ein Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ definieren wir seinen **offenen Stern** als

$$\mathrm{St}(\sigma) := \big\{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \sigma \subset \mathrm{Supp}(f)\big\} = \bigcap_{e\in\sigma} \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid f(e) \neq 0\} = \bigsqcup_{\tau\in\mathcal{K}\colon\, \sigma\subset\tau} \Delta(\tau)'$$

wobei die rechte Gleichheit aus (2.2.3) folgt. In Worten ist er die Vereinigung der offenen Simplizes $\Delta(\tau)'$ zu all denjenigen τ, die σ als Seite haben, für die also $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\tau)$ gilt (vgl. 2.2.4).

4.13.6. Der offene Stern $\mathrm{St}(\sigma)$ ist in der Tat offen in $\Delta(\mathcal{K})$, denn für jedes $\mu \in \mathcal{K}$ ist

$$\mathrm{St}(\sigma) \cap \Delta(\mu) = \bigcap_{e\in\sigma} \{f \in \Delta(\mu) \mid f(e) \neq 0\}$$

offen in $\Delta(\mu)$ als endlicher Schnitt offener Teilmengen.

4.13.7. Für jedes $f \in \Delta(\mathcal{K})$ gilt

$$\mathrm{Supp}(f) = \{e \in E \mid f \in \mathrm{St}(\{e\})\}.$$

Dies ist nur eine Umformulierung der offensichtlichen Aussage $e \in \mathrm{Supp}(f) \iff f \in \mathrm{St}(\{e\})$ für jedes $e \in E$. Wegen $\mathrm{Supp}(f) \neq \varnothing$ liegt f im offenen Stern eines geeigneten 0-Simplex. Die offenen Sterne aller 0-Simplizes bilden also bereits eine offene Überdeckung von $\Delta(\mathcal{K})$. Für jede Ecke e gilt offensichtlich $e \in \mathrm{St}(\{e\})$.

Satz 4.13.8 (Simpliziale Approximation)**.** *Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ Simplizialkomplexe und sei $f\colon \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{L})$ eine stetige Abbildung zwischen ihren geometrischen Realisierungen. Ist $\mathcal{K}$ endlich, so hat f eine simpliziale Approximation $(n, \varphi\colon \mathrm{B}^n\mathcal{K} \to \mathcal{L})$.*

Erkläre Beweis durch Bild!

Beweis. Wie in 4.13.7 bemerkt ist $\Delta(\mathcal{L}) = \bigcup_{z \text{ Ecke von } \mathcal{L}} \mathrm{St}(z)$ die Vereinigung der offenen Sterne $\mathrm{St}(z) := \mathrm{St}(\{z\})$ aller Ecken z von $\mathcal{L}$. Da f stetig ist, ist $\Delta(\mathcal{K}) = \bigcup_{z \text{ Ecke von } \mathcal{L}} f^{-1}(\mathrm{St}(z))$ eine offene Überdeckung.

Da $\mathcal{K}$ endlich ist, ist $\Delta(\mathcal{K})$ kompakt. Sei E die endliche Eckenmenge von $\mathcal{K}$. Betrachte $\mathbb{R}E$ wie im Beweis von Proposition 2.2.11 als normierten und dann als metrischen Raum. Nach 2.2.5 trägt $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$ die Teilmengentopologie und ist somit ein kompakter metrischer Raum. Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue [Sch20, Satz 2.7.18] gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $y \in \Delta(\mathcal{K})$ eine Ecke z von $\mathcal{L}$ mit $B_\varepsilon(y) \subset f^{-1}(\mathrm{St}(z))$ existiert.

[90] Allgemeiner zeigt dieser Beweis: Gegeben zwei stetige Abbildungen $f, g\colon \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{L})$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in \Delta(\mathcal{K})$ die Elemente $f(x)$ und $g(x)$ in einem geeigneten $\Delta(\sigma_x)$ liegen, ist das Analogon der obigen Abbildung eine stetige Homotopie.

Nach Lemma 4.3.13[91], und weil $\mathcal{K}$ endlich[92] ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass jeder volle Simplex der n-fachen baryzentrischen Unterteilung $\Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ Durchmesser $< \varepsilon$ hat – wir identifizieren hier und im Folgenden $\Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}) = \Delta(\mathcal{K})$ entlang des Homöomorphismus u^n.

Für jede Ecke e von $\mathrm{B}^n\mathcal{K}$ gibt es dann eine Ecke $\varphi(e)$ von $\mathcal{L}$ mit $\mathrm{St}(e) = \bigsqcup_{\substack{\tau\in\mathrm{B}^n\mathcal{K}\\ e\in\tau}} \Delta(\tau)' \subset B_\varepsilon(e) \subset f^{-1}(\mathrm{St}(\varphi(e)))$ (die erste Inklusion gilt wegen $e \in \Delta(\tau)$ und der Wahl von n, die zweite wegen der Wahl von ε für ein geeignetes $\varphi(e)$), also

$$f(\mathrm{St}(e)) \subset \mathrm{St}(\varphi(e)). \tag{4.13.1}$$

Wir erhalten so eine Abbildung φ von der Eckenmenge von $\mathrm{B}^n\mathcal{K}$ in die Eckenmenge von $\mathcal{L}$.

Wir behaupten, dass diese Abbildung einen Morphismus von Simplizialkomplexen $\mathrm{B}^n\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ definiert und sogar eine simpliziale Approximation ist.

Für jedes $x \in \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ behaupten wir

$$\varphi(\mathrm{Supp}(x)) \subset \mathrm{Supp}(f(x)). \tag{4.13.2}$$

In der Tat, sei e eine Ecke von $\mathrm{B}^n\mathcal{K}$ mit $e \in \mathrm{Supp}(x)$. Nach 4.13.7 ist dies äquivalent zu $x \in \mathrm{St}(e)$. Wegen (4.13.1) folgt daraus $f(x) \in \mathrm{St}(\varphi(e))$, was wieder wegen 4.13.7 zu $\varphi(e) \in \mathrm{Supp}(f(x))$ äquivalent ist. Dies zeigt (4.13.2).

Da jeder Simplex $\sigma \in \mathrm{B}^n\mathcal{K}$ die Gestalt $\sigma = \mathrm{Supp}(x)$ für ein geeignetes $x \in \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$ hat (genauer ist dies der Fall für alle Elemente x des offenen Simplex $\Delta(\sigma)'$), folgt

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\mathrm{Supp}(x)) \overset{(4.13.2)}{\subset} \mathrm{Supp}(f(x)) \in \mathcal{L}.$$

Dies zeigt, dass φ einen Morphismus $\varphi\colon \mathrm{B}^n\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ von Simplizialkomplexen definiert.

Sei nun $x \in \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K})$. Dann gilt $x = \sum_{e\in\mathrm{Supp}(x)} t_e e$ für eindeutige $t_e > 0$ mit $\sum t_e = 1$. Nach Definition von $\Delta(\varphi)$ in Lemma 2.3.6 gilt

$$(\Delta(\varphi))(x) = \sum_{e\in\mathrm{Supp}(x)} t_e\varphi(e) \overset{(4.13.2)}{\in} \Delta(\underbrace{\mathrm{Supp}(f(x))}_{\in\mathcal{L}}) \ni f(x) = f(u^n(x)). \tag{4.13.3}$$

Dies zeigt, dass φ eine simpliziale Approximation ist. (Als σ_x in Definition 4.13.2 kann man also $\mathrm{Supp}(f(x))$ wählen.[93]) □

4.14. **Lefschetzscher Fixpunktsatz.**

Definition 4.14.1. Sei $f\colon X \to X$ eine stetige Selbstabbildung eines topologischen Raums und sei k ein Körper. Ist $\mathrm{H}(X;k)$ eine beschränkte Familie endlichdimensionaler k-Vektorräume, so heißt die Super-Spur

$$\Lambda_{f,k} := \mathrm{str}\big(\mathrm{H}(f)|\mathrm{H}(X;k)\big) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_q(f)|\mathrm{H}_q(X;k)\big) \in k$$

Lefschetz-Zahl von f (bezüglich Koeffizienten in k). Erwähnt man keinen Körper, so ist mit der **Lefschetz-Zahl** $\Lambda_f := \Lambda_{f,\mathbb{Q}}$ gemeint.

Ausblick 4.14.2. Ist für jedes n die abelsche Gruppe $\mathrm{H}_n(X)$ endlich erzeugbar und verschwinden alle bis auf endlich viele der $\mathrm{H}_n(X)$, so hängt die Lefschetz-Zahl fast gar nicht vom Körper ab und „ist über $\mathbb{Z}$ definiert“, siehe Proposition 6.10.4. Diese Voraussetzung wird vermutlich in (fast?) allen unserer Beispiele erfüllt sein. Insofern wäre es didaktisch vielleicht besser, zuerst nur $\Lambda_{f,\mathbb{Q}}$ zu definieren.

---

[91] Anschaulich ist hoffentlich klar, dass das so geht. Ganz zufrieden bin ich mit der Formulierung des Lemmas bzw. der Behandlung all dieser baryzentrischen Unterteilungen aber nicht. Vielleicht wäre es in einer zukünftigen Vorlesung besser, zuerst die kombinatorische baryzentrische Unterteilung für Simplizialkomplexe einzuführen und dann das zitierte Lemma in diesem Kontext zu formulieren (der Beweis sollte im Wesentlichen unverändert bleiben). Wenn man dann die singulären Unterteilungsoperatoren U einführt, sollte man die Diskussion 4.14.10 dort einfügen.

[92] Es reicht wohl aus, dass $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\le m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, denn alle q-Simplizes in $\Delta(\mathcal{K})$ sind metrisch isomorph und haben somit denselben Durchmesser.

[93] Das bedeutet insbesondere: Ist z eine Ecke von $\mathcal{L}$, so werden alle Elemente $x \in f^{-1}(z)$ unter $\Delta(\varphi)$ auf z abgebildet.

Genauer gilt für jede Ecke z von $\mathcal{L}$: Ist $\sigma \in \mathrm{B}^n\mathcal{K}$ ein Simplex mit $\Delta(\sigma)' \cap f^{-1}(z) \neq \varnothing$, so wird ganz $\Delta(\sigma)$ auf z abgebildet.

Beweis: Sei $x \in \Delta(\sigma)' \cap f^{-1}(z)$, d. h. $\mathrm{Supp}(x) = \sigma$ und $f(x) = z$. Nach (4.13.2) folgt $\varphi(\sigma) = \{z\}$. Somit bildet $\Delta(\varphi)$ den vollen Simplex $\Delta(\sigma)$ auf z ab.

4.14.3. Homotope stetige Selbstabbildungen $X \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} X$ haben dieselbe Lefschetz-Zahl bezüglich jedem Körper k, in Formeln $\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}$, falls eine dieser Zahlen wohldefiniert ist; dies ist eine offensichtliche Konsequenz der Homotopie-Invarianz der singulären Homologie 3.3.1.

4.14.4. Die Lefschetz-Zahl der Identität ist die Euler-Charakteristik, in Formeln $\Lambda_{\mathrm{id}_X,k} = \chi(X;k)$, falls letztere wohldefiniert ist, denn

$$\Lambda_{\mathrm{id}_X,k} = \mathrm{str}(\mathrm{H}(\mathrm{id}_X)) = \mathrm{str}(\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X;k)}) \overset{(4.10.1)}{=} \chi(\mathrm{H}(X;k)) \overset{(4.9.3)}{=} \chi(X).$$

4.14.5. Ist X ein kompakter, triangulierbarer topologischer Raum (oder homotopieäquivalent zu einem solchen), so ist die Lefschetz-Zahl $\Lambda_{f,k}$ für jede stetige Selbstabbildung $f\colon X \to X$ und jeden Körper k nach 4.9.3 wohldefiniert (und hängt nach Proposition 6.10.4 fast gar nicht vom Körper ab – diese Proposition ist wegen Korollar 4.8.16 anwendbar).

4.14.6. Sei k ein Körper. Sei ein kommutatives Diagramm

(4.14.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

topologischer Räume gegeben. Wir nehmen an, dass v ein Homöomorphismus ist (oder dass allgemeiner v eine Homotopieäquivalenz ist oder dass noch allgemeiner alle $\mathrm{H}_q(v)\colon \mathrm{H}_q(X;k) \to \mathrm{H}_q(Y;k)$ Isomorphismen sind). Ist eine der Lefschetz-Zahlen $\Lambda_{f,k}$, $\Lambda_{g,k}$ wohldefiniert, so ist auch die andere wohldefiniert und diese beiden Lefschetz-Zahlen stimmen überein, in Formeln

$$\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}.$$

Der Beweis ist offensichtlich: Nach Voraussetzung sind alle $\mathrm{H}_q(v)$ Isomorphismen (Homotopie-Invarianz der singulären Homologie, Satz 3.3.1), so dass mit $\mathrm{H}(X;k)$ bzw. $\mathrm{H}(Y;k)$ auch $\mathrm{H}(Y;k)$ bzw. $\mathrm{H}(X;k)$ beschränkt ist und endlichdimensionale Komponenten hat. Also ist mit einer auch die andere Lefschetz-Zahl wohldefiniert. Da die Spur „invariant unter zyklischen Vertauschungen ist“ gilt $\mathrm{tr}(\mathrm{H}_q(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{H}_q(v)^{-1} \circ \mathrm{H}_q(g) \circ \mathrm{H}_q(v)) = \mathrm{tr}(\mathrm{H}_q(g))$, was sofort $\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}$ liefert. (Wer will, kann auch direkt Aufgabe 4.10.9.(b) verwenden.)

Satz 4.14.7 (Fixpunktsatz von Lefschetz[94])**.** *Sei $f\colon X \to X$ eine stetige Selbstabbildung eines kompakten, triangulierbaren topologischer Raums X. Ist die (nach 4.14.5 wohldefinierte) Lefschetz-Zahl von f bezüglich Koeffizienten in einem Körper k von Null verschieden, in Formeln $\Lambda_{f,k} \neq 0$,[95] so hat f einen Fixpunkt.*

4.14.8. Ich finde es sehr bemerkenswert, dass die Theorie der singulären Homologie manchmal (= wenn die Lefschetz-Zahl nicht verschwindet) eine so naheliegende Frage wie die nach der Existenz eines Fixpunktes beantworten kann. Allgemein ist es immer eine gute Eigenschaft einer mathematischen Theorie, wenn sie interessante Fragen beantworten kann, die man zuvor hatte (deren Formulierung also nicht das neue Vokabular benötigt).

4.14.9. Die umgekehrte Implikation in Satz 4.14.7 ist nicht richtig: Ist X ein nicht-leerer, kompakter, triangulierbarer topologischer Raum mit (wohldefinierter) Euler-Charakteristik $\chi(X;k) = 0$ für alle Körper k, etwa $X = \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^5, \ldots$ oder $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (Beispiele 4.9.7 und Ausblick 4.9.6), so verschwindet die Lefschetz-Zahl $\Lambda_{\mathrm{id}_X,k} = \chi(X;k)$ der Identität id_X (siehe 4.14.4), aber alle Elemente von X sind Fixpunkte.

Auch die Voraussetzung, dass X kompakt ist, ist unverzichtbar: Beispielsweise ist $X = \mathbb{R}^2$ triangulierbar (Beispiel 2.2.19.(a)), aber für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat die Translation $f = (+v)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x + v$, keinen Fixpunkt, obwohl $\Lambda_{f,k} = \mathrm{str}(\mathrm{H}(f)|\mathrm{H}(\mathbb{R}^2;k)) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}|k) = 1 \neq 0$ gilt.

---

[94] Die hier gegebene Version wird in der Literatur manchmal als Fixpunktsatz von Lefschetz bezeichnet (etwa Hatcher, deutsche Wikipedia), manchmal als eine einfache Version (englische Wikipedia) oder als eine erste Annäherung (Soergel) an diesen.

[95] Nach Proposition 6.10.4 ist dies genau dann der Fall, wenn $\Lambda_{f,\mathbb{Q}} \neq 0$ gilt.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung[96] annehmen, dass $X = \Delta(\mathcal{K})$ gilt, wobei $\mathcal{K}$ ein endlicher Simplizialkomplex ist (vgl. 2.2.18).

Wir nehmen an, dass f keinen Fixpunkt hat, und zeigen $\Lambda_{f,k} = 0$, wobei k ein beliebiger Körper ist. Sei E die endliche Eckenmenge von $\mathcal{K}$. Betrachte $\mathbb{R}E$ wie im Beweis von Proposition 2.2.11 als normierten und dann als metrischen Raum mit Metrix d; dort haben wir gesehen, dass die Inklusion $X \subset \mathbb{R}E$ stetig ist (nach 2.2.5 trägt $X \subset \mathbb{R}E$ sogar die Teilmengentopologie). Insbesondere ist die Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Somit ist $X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto d(x, f(x))$, eine stetige Funktion auf einem Kompaktum und nimmt somit ihr Minimum a an. Da f keinen Fixpunkt hat, gilt $a > 0$.

Weil $\mathcal{K}$ endlich ist, zeigt Lemma 4.3.13, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Simplizes μ der m-fachen baryzentrischen Unterteilung $\mathcal{K}' := \mathrm{B}^m\mathcal{K}$

$$\operatorname{diam}(\Delta(\mu)) < \frac{a}{2}$$

gilt; hier identifizieren wir $\Delta(\mathcal{K}') = \Delta(\mathcal{K}) = X$ entlang $u^m\colon \Delta(\mathcal{K}') \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$ und verwenden die oben eingeführte Metrik d für die Definition des Durchmessers. Natürlich ist auch $\mathcal{K}'$ endlich. Im folgenden identifizieren wir weiterhin $X = \Delta(\mathcal{K}')$ (der Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ wird nicht weiter benötigt).

Sei nun $\varphi\colon \mathrm{B}^n\mathcal{K}' \to \mathcal{K}'$ eine simpliziale Approximation an $f\colon X = \Delta(\mathcal{K}') \to X = \Delta(\mathcal{K}')$, für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ (sie existiert nach Satz 4.13.8).

Behauptung A: Für alle Simplizes $\sigma \in \mathcal{K}'$ und alle Simplizes $\tau \in \mathrm{B}^n\sigma \subset \mathrm{B}^n\mathcal{K}'$ der n-fachen baryzentrischen Unterteilung von σ gilt $\varphi(\tau) \not\subset \sigma$.

Sei $x \in \Delta(\tau)'$, also $\operatorname{Supp}(x) = \tau$. Daraus folgt $\operatorname{Supp}\big((\Delta(\varphi))(x)\big) = \varphi(\tau)$ nach Definition von $\Delta(\varphi)$ in Lemma 2.3.6, d. h. $\Delta(\varphi)(x) \in \Delta(\varphi(\tau))$. Da φ eine simpliziale Approximation an f ist, gibt es einen Simplex $\mu \in \mathcal{K}'$ mit $(\Delta(\varphi))(x), f(x) \in \Delta(\mu)$. Insbesondere gilt $\varphi(\tau) = \operatorname{Supp}\big((\Delta(\varphi))(x)\big) \subset \mu$, also $\Delta(\varphi(\tau)) \subset \Delta(\mu)$. Da τ in der baryzentrischen Unterteilung von σ liegt, gilt $x \in \Delta(\tau)' \subset \Delta(\tau) \subset \Delta(\sigma)$ (wobei bei der letzten Inklusion der Homöomorphismus $\Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}') \underset{\sim}{\xrightarrow{u^n}} \Delta(\mathcal{K}')$ als Gleichheit aufgefasst wird). Nehmen wir nun $\varphi(\tau) \subset \sigma$ an, so folgt

- $x, \Delta(\varphi)(x) \in \Delta(\sigma)$ und es gilt eh
- $\Delta(\varphi)(x), f(x) \in \Delta(\mu)$.

Somit erhalten wir (wegen $\sigma, \mu \in \mathcal{K}'$)

$$d(x, f(x)) \leq d(x, \Delta(\varphi)(x)) + d(\Delta(\varphi)(x), f(x)) \leq \operatorname{diam}(\Delta(\sigma)) + \operatorname{diam}(\Delta(\mu) < a$$

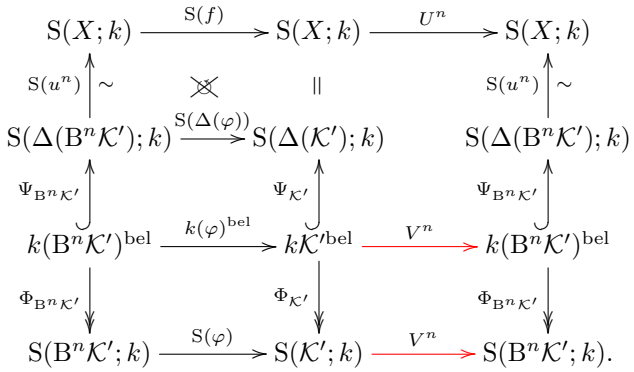
im Widerspruch zur Definition von a. Dies zeigt Behauptung A.

[96] Sei $v\colon X \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$ ein Isomorphismus. Setze $g := v \circ f \circ v^{-1}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle v}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle v}\downarrow{\scriptstyle \sim} \\ \Delta(\mathcal{K}) & \xrightarrow{g} & \Delta(\mathcal{K}) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Nach 4.14.6 gilt $\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}$. Außerdem induziert v eine Bijektion zwischen der Menge $X^f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ der Fixpunkte von f und der Menge Y^g der Fixpunkte von g (dies ist eine rein mengentheoretische Aussage). Somit ist die Aussage $\Lambda_{f,k} \neq 0 \implies X^f \neq \varnothing$ äquivalent zur Aussage $\Lambda_{g,k} \neq 0 \implies Y^g \neq \varnothing$.

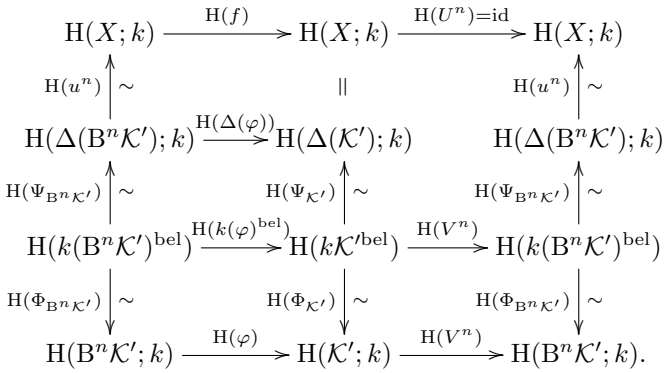
Betrachte das Diagramm (die roten Pfeile sind zunächst zu ignorieren)



Der zweimal auftauchende Isomorphismus $\mathrm{S}(u^n)$ kommt vom Homöomorphismus $u^n\colon \Delta(\mathrm{B}^n\mathcal{K}') \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K}')$ aus Lemma 4.12.5. Die die unteren drei Zeilen verbindenden vertikalen Morphismen sind die Quasi-Isomorphismen aus Satz 4.8.11 (oder genauer aus Proposition 4.8.5 und Proposition 4.8.8), wobei wir hier Koeffizienten in k statt in $\mathbb{Z}$ verwenden (wofür diese Resultate analog gelten). Links sind die beiden unteren Quadrate kommutativ, da Ψ und Φ natürlich sind (siehe Aufgabe 4.8.6 und 4.8.10). Das mit ⊠ markierte Quadrat kommutiert im Allgemeinen nicht. Die horizontale Abbildung U^n rechts oben ist die n-fache Iteration des Unterteilungsoperators U (4.3.3).

Die roten Abbildungen V^n sind n-fache Iterationen des „kombinatorischen Unterteilungsoperators“ V, der in 4.14.10 erklärt werden; dort erklären wir auch, warum der rechte Teil des obigen Diagramms kommutativ ist. Vielleicht ist dem Leser zumindest anschaulich klar/plausibel, dass U^n die obere der beiden Abbildungen V^n eindeutig induziert, so dass das rechte obere Quadrat kommutativ ist. Weiter mag es zumindest plausibel sein, dass dieses V^n das untere V^n induziert.

Anwenden des Funktors totale Homologie $\mathrm{H}(-)\colon \mathrm{Kom}(k) \to \mathrm{Mod}(k)$ liefert das Diagramm



Dieses Diagramm, also insbesondere sein Quadrat links oben, ist kommutativ, da $f \circ u^n$ und $\Delta(\varphi)$ homotop sind (Proposition 4.13.4) und somit dieselbe Abbildung auf der Homologie induzieren (Homotopie-Invarianz der singulären Homologie, Satz 3.3.1). Die Gleichheit $\mathrm{H}(U^n) = \mathrm{id}$ am horizontalen Pfeil rechts oben gilt nach Lemma 4.3.8. Da alle Vertikalen Pfeile Isomorphismen sind und $\mathrm{H}(X;k)$ eine beschränkte Familie endlichdimensionaler Vektorräume ist, sind auch alle anderen Objekte in diesem Diagramm beschränkte Familien endlichdimensionaler Vektorräume. Wir behaupten die Gleichheiten

$$\Lambda_{f,k} = \mathrm{str}\big(\mathrm{H}(f)\big) = \mathrm{str}\big(\mathrm{H}(V^n) \circ \mathrm{H}(\varphi)\big) = \mathrm{str}\big(\mathrm{H}(V^n \circ \mathrm{S}(\varphi))\big) = \mathrm{str}\big(V^n \circ \mathrm{S}(\varphi)\big).$$

Die zweite Gleichheit folgt aus Aufgabe 4.10.9.(b), die letzte ist die Hopfsche Spurformel (Lemma 4.10.8) – diese ist anwendbar, denn $\mathrm{S}(\mathrm{B}^n\mathcal{K};k)$ ist [97] ein beschränkter Komplex endlichdimensionaler Vektorräume nach 2.4.22), da mit $\mathcal{K}'$ auch $\mathrm{B}^n\mathcal{K}'$ endlich ist. Die anderen Gleichheiten sind offensichtlich.

[97] im Gegensatz zu $k(\mathrm{B}^n\mathcal{K}')^{\mathrm{bel}}$)

Wir erinnern daran, dass $\Lambda_{f,k} = 0$ zu zeigen ist, oder nun äquivalent $\operatorname{str}\big(V^n \circ \mathrm{S}(\varphi)\big) = 0$. Wir zeigen nun genauer sogar, dass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ die Spur von

$$(V^n \circ \mathrm{S}(\varphi))_q \colon \mathrm{S}_q(\mathrm{B}^n\mathcal{K}'; k) \to \mathrm{S}_q(\mathrm{B}^n\mathcal{K}'; k)$$

verschwindet.

Fixiere wie in 2.4.22 für jeden q-Simplex $\tau \in (\mathrm{B}^n\mathcal{K}')_q$ ein $(q+1)$-Tupel $\overrightarrow{\tau} = (\tau_0, \dots, \tau_q)$ von Ecken von $\mathrm{B}^n\mathcal{K}'$ mit $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_q\}$. Dann ist $(\overrightarrow{\tau})_{\tau \in (\mathrm{B}^n\mathcal{K})_q}$ eine k-Basis von $\mathrm{S}_q(\mathrm{B}^n\mathcal{K}')_q$.

Sei $\tau \in (\mathrm{B}^n\mathcal{K}')_q$ ein q-Simplex. Es genügt zu zeigen, dass der Koeffizient bei $\overrightarrow{\tau}$ in $V^n\big(\mathrm{S}(\varphi)(\overrightarrow{\tau})\big)$ Null ist. Es gibt einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}'$ mit $\tau \in \mathrm{B}^n\sigma \subset \mathrm{B}^n\mathcal{K}'$.[98] Nach Definition von $\mathrm{S}(\varphi)$ in Aufgabe 2.4.27 gilt bei analoger Wahl einer „Überpfeil-Notation“ für q-Simplizes in $\mathcal{K}'$

$$\mathrm{S}(\varphi)(\overrightarrow{\tau}) = \begin{cases} \pm\overrightarrow{\varphi(\tau)} & \text{falls } \varphi(\tau) \in \mathcal{K}'_q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was unsere Koeffizientenbestimmung angeht, reicht es also, den Fall $\varphi(\tau) \in \mathcal{K}'_q$ zu betrachten. Dann ist $V^n(\mathrm{S}(\varphi)(\overrightarrow{\tau})) = \pm V^n(\overrightarrow{\varphi(\tau)})$ eine $\{\pm 1\}$-Linearkombination mit Pfeilen versehener q-Simplizes von $\mathrm{B}^n\varphi(\tau) = (\mathrm{B}^n\varphi(\tau))_{\leq q}$. Wenn dabei $\pm\overrightarrow{\tau}$ vorkommt, so gilt $\tau \in \mathrm{B}^n\varphi(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ ist das kleinste aller Elemente $\kappa \in \mathcal{K}'$ mit $\tau \in \mathrm{B}^n\kappa$.[99] Wegen $\tau \in \mathrm{B}^n\sigma$ folgt $\varphi(\tau) \subset \sigma$ im Widerspruch zu Behauptung A. Dies zeigt wie gewünscht, dass der Koeffizient bei $\overrightarrow{\tau}$ verschwindet. □

Ende der 18. Vorlesung am 08.01.2021.

Hausaufgaben:

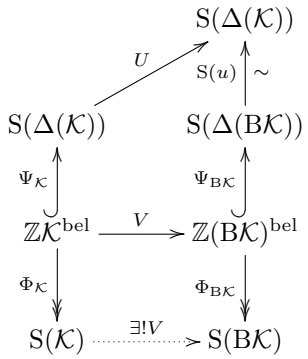
(1) Aufgabe 4.11.5 (Anwendung des simplizialen Fixpunktsatzes)
(2) Aufgabe 4.12.6 (baryzentrische Unterteilung als Funktor; die $u_{\mathcal{K}}$ definieren keine Isotransformation $u \colon \Delta\mathrm{B} = \Delta \circ \mathrm{B} \mathrel{\tilde{\Rightarrow}} \Delta$)
(3) Aufgabe 4.13.3 (finde simpliziale Approximationen)
(4) Aufgabe 4.14.12 (Fixpunktsatz von Lefschetz impliziert den von Brouwer)

4.14.10. Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Unser Ziel ist einerseits die Definition eines Morphismus **kombinatorischer Unterteilungsoperator**

$$V = V_{\mathcal{K}} \colon \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}} \to \mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})^{\mathrm{bel}},$$

von Komplexen abelscher Gruppen; andererseits wollen wir ein kommutatives Diagramm

(4.14.2)



[98] Das scheint mir klar; im Fall $n = 1$ mag man sich davon in Beispiel 4.12.2 überzeugen: Gilt etwa $\tau = (\overline{a} \subsetneq \overline{ab}) = (\{a\}, \{a, b\}) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, so kann man $\sigma = \{a, b\}$ oder $\sigma = \{a, b, c\}$ nehmen. Gilt etwa $\tau = (\overline{a} \subsetneq \overline{abc}) = (\{a\}, \{a, b, c\}) = \{\{a\}, \{a, b, c\}\}$, so muss man $\sigma = \{a, b, c\}$ nehmen. Ein mögliches (und wohl das kleinstmögliche, vgl. nächste Fussnote) σ ist also die Vereinigung über die Elemente von τ. Im Fall $n > 1$ muss man eben n-fach vereinigen...

[99] Das scheint mir wieder ziemlich klar: Sicherlich gibt es so ein kleinstes Element (Schnitt über alle, die die gesuchte Bedingung erfüllen). Andererseits muss dieses kleinste Element im Fall $n = 1$ die Vereinigung aller Elemente von τ enthalten, vgl. vorige Fussnote; da τ aus $q+1$ Elementen besteht, muss diese Vereinigung ganz $\varphi(\tau)$ sein. Im Fall $n > 1$ muss man wieder n-fach vereinigen.

etablieren (das die Kompatibilität von V und dem „singuären Unterteilungsoperator“ U erklärt); der untere horizontale Morphismus V ist dabei eindeutig durch den mittleren Morphismus V induziert. All diese Konstruktionen werden natürlich in $\mathcal{K}$ sein. Wir arbeiten hier mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ (alles geht aber genauso mit Koeffizienten in einem Körper k oder gar einem beliebigen R-Modul M).

Wir folgen im Wesentlichen der Definition 4.3.5 der Unterteilungsoperatoren U_q, jedoch ersetzen wir die Kategorie Top durch die Kategorie SimpKomp der Simplizialkomplexe. Als Analogen zum Standardsimplex $\Delta_q \in \mathrm{Top}$ sei $\blacktriangle_q \in \mathrm{SimpKomp}$ der maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge $\{0,1,\dots,q\}$. Ist $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex, so gilt

$$\mathrm{SimpKomp}(\blacktriangle_q, \mathcal{K}) = \mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}}$$

und somit

$$\mathbb{Z}\,\mathrm{SimpKomp}(\blacktriangle_q, \mathcal{K}) = \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}}$$

(vgl. $\mathrm{S}_q X = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X)$ in Definition 3.1.4) oder als Gleichheit von Funktoren

$$\mathbb{Z}(-)_q^{\mathrm{bel}} = \mathbb{Z}\,\mathrm{SimpKomp}(\blacktriangle_q, -)\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Ab}\,.$$

Wir können somit (den Beweis von) Lemma 4.3.3 anpassen (ersetze etwa Top und Δ_q in Diagramm (4.3.1) durch SimpKomp und $\blacktriangle_q$) und erhalten: Für alle $q \in \mathbb{N}$ und alle Funktoren $G\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ (alias Objekte $G \in \mathrm{Ab}^{\mathrm{SimpKomp}}$) ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ab}^{\mathrm{SimpKomp}}(\mathbb{Z}(-)_q^{\mathrm{bel}}, G) &\xrightarrow{\sim} G(\blacktriangle_q), \\ \tau &\mapsto \tau_{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) = \tau(\mathrm{id}_{\blacktriangle_q}), \end{aligned} \tag{4.14.3}$$

eine Bijektion.

Wir passen nun Definition 4.3.5 an und definieren natürliche Transformationen

$$V_q\colon \mathbb{Z}(-)_q^{\mathrm{bel}} \Rightarrow \mathbb{Z}(\mathrm{B}-)_q^{\mathrm{bel}}\colon \mathrm{SimpKomp} \to \mathrm{Ab}$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ und nennen diese **(kombinatorische baryzentrische) Unterteilungsoperatoren**. Für $q < 0$ setze $V_q := 0$ (einzige Möglichkeit). Um die Transformationen V_q für $q \geq 0$ zu definieren, genügt es nach der „Yoneda-Bijektion“ (4.14.3), die Werte $(V_q)_{\blacktriangle_q}(\mathrm{id}_{\blacktriangle_q}) \in \mathbb{Z}(\mathrm{B}\blacktriangle_q)_q^{\mathrm{bel}}$ auf $\mathrm{id}_{\blacktriangle_q} = (0,1,\dots,q) \in \mathbb{Z}(\blacktriangle)_q^{\mathrm{bel}}$ vorzugeben. Wir definieren V_0 durch[100]

$$(V_0)_{\blacktriangle_0}(\mathrm{id}_{\blacktriangle_0}) = (V_0)_{\blacktriangle_0}((0)) := (\{0\}) \in \mathbb{Z}(\mathrm{B}\blacktriangle_0)_0^{\mathrm{bel}}$$

Induktiv definieren wir V_q durch

$$(V_q)_{\blacktriangle_q}(\mathrm{id}_{\blacktriangle_q}) := P_{q-1}\Big(\underbrace{(V_{q-1})_{\blacktriangle_q}\big(\overbrace{\partial(\mathrm{id}_{\blacktriangle_q})}^{=\sum(-1)^i(0,\dots,\widehat{i},\dots,q)\in\mathbb{Z}(\blacktriangle_q)_{q-1}^{\mathrm{bel}}} \big)}_{=\sum(-1)^i\mathbb{Z}(k_i^q)_q^{\mathrm{bel}}\left((V_{q-1})_{\blacktriangle_{q-1}}(\mathrm{id}_{\blacktriangle_{q-1}})\right)\in\mathbb{Z}(\mathrm{B}\blacktriangle_q)_{q-1}^{\mathrm{bel}}} \Big) \in \mathbb{Z}(\mathrm{B}\blacktriangle_q)_q^{\mathrm{bel}}, \tag{4.14.4}$$

wobei der „kombinatorische Prismenoperator“ P_{q-1} wie folgt durch „Vornedranschreiben der (den Schwerpunkt repräsentierenden) Ecke $\{0,1,\dots,q\}$ von $\mathrm{B}\blacktriangle_q$“ definiert ist:

$$\begin{aligned} P_{q-1}\colon \mathbb{Z}(\mathrm{B}\blacktriangle_q)_{q-1}^{\mathrm{bel}} &\to \mathbb{Z}(\mathrm{B}\blacktriangle_q)_q^{\mathrm{bel}}, \\ (s_0,\dots,s_{q-1}) &\mapsto (\{0,1,\dots,q\}, s_0,\dots,s_{q-1}). \end{aligned}$$

[100] Das sieht seltsam aus, aber meiner Meinung nach hat $\blacktriangle_0 = (\{0\},\{\{0\}\})$ als baryzentrische Unterteilung $\mathrm{B}\blacktriangle_0 = (\{\{0\}\},\{\{\{0\}\}\})$. Konkret bedeutet diese Definition, dass V_0 auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K} = (E,\mathcal{K})$ ausgewertet die Abbildung

$$\begin{aligned} (V_0)_{\mathcal{K}}\colon \mathbb{Z}(\mathcal{K})_0^{\mathrm{bel}} &\to \mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})_0^{\mathrm{bel}}, \\ (e) &\mapsto (\{e\}), \end{aligned}$$

ist.

Zum besseren Verständnis einige Beispiele, vgl. auch Abbildung 3 (wo $\frac{a+c}{2}$ kombinatorisch als $\{a,c\}$ zu lesen ist etc.) und 4.3.6. Der Unterteilungsoperator V_0 wurde bereits in der Fußnote erläutert. Der Unterteilungsoperator V_1 ist durch

$$(V_1)_{\mathcal{K}}\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\mathrm{bel}} \to \mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})_1^{\mathrm{bel}}, \quad (a,b) \mapsto (\{a,b\},\{b\}) - (\{a,b\},\{a\}), \tag{4.14.5}$$

gegeben, V_2 ist wie folgt gegeben.

$$\begin{aligned}(V_2)_{\mathcal{K}}\colon \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\mathrm{bel}} &\to \mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})_2^{\mathrm{bel}},\\ (a,b,c) &\mapsto (\{a,b,c\},\{b,c\},\{c\}) - (\{a,b,c\},\{b,c\},\{b\})\\ &\quad - (\{a,b,c\},\{a,c\},\{c\}) + (\{a,b,c\},\{a,c\},\{a\})\\ &\quad + (\{a,b,c\},\{a,b\},\{b\}) - (\{a,b,c\},\{a,b\},\{a\}).\end{aligned} \tag{4.14.6}$$

Der allgemeine Unterteilungsoperator V_q bildet ein $\mathbb{Z}$-Basiselement $s = (s_0,\dots,s_q) \in \mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}}$ wie folgt ab (die Zwischenschritte gehören eigentlich nicht dazu):

$$\begin{aligned}s = (s_0,\dots,s_q) &\mapsto \partial(s) = \sum (-1)^i (s_0,\dots,\widehat{s_i},\dots,s_q)\\ &\mapsto V_{q-1}(\partial(s)) = \sum (-1)^i V_{q-1}(s_0,\dots,\widehat{s_i},\dots,s_q)\\ &\mapsto V_q(s) = \Big(S, V_{q-1}(\partial(s))\Big) = \sum (-1)^i \Big(S, V_{q-1}(s_0,\dots,\widehat{s_i},\dots,s_q)\Big),\end{aligned} \tag{4.14.7}$$

wobei bei der letzten Abbildung unsere ad hoc Notation andeuten soll, dass das Element $S := \{s_0,\dots,s_q\}$ an jeden Summanden von $V_{q-1}(\partial(s))$ vorne drangeschrieben wird – dies ist sozusagen der Prismenoperator zu S, der aber von s abhängt (formal verwendet das die Umkehrabbildung von (4.14.3)).

Als nächster Schritt wäre eigentlich das Analogon zu Lemma 4.3.7 zu zeigen, dass also die $(V_q)_{\mathcal{K}}$ mit den Differentialen kommutieren und somit einen Morphismus von Komplexen $V_{\mathcal{K}}$ definieren[101]. Wir zeigen dies später indirekt.

Als Einschub, den wir gleich benötigen, erkläre ich ein Analogon von (4.14.7) für den „geometrischen Unterteilungsoperator“ U_q auf gewissen singulären Simplizes. Wir nehmen dazu an, dass X ein topologischer Raum ist, der in einem reellen Vektorraum V als Teilmenge enthalten ist. Seien $v_0,\dots,v_q \in X$ Punkte, so dass die in (3.3.1) definierte Abbildung

$$\underset{\sim}{v} := \underset{\sim}{(v_0,\dots,v_q)}\colon \Delta_q \to V$$

in X landet und als Abbildung nach X stetig ist und somit einen q-Simplex

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{(v_0,\dots,v_q)} \in \mathrm{S}_q X$$

definiert. Dann gilt die Formel

$$U_q(\underset{\sim}{v}) = U_q(\underset{\sim}{(v_0,\dots,v_q)}) = \underset{\sim}{\Big(\frac{1}{q+1}(v_0+\dots+v_q), U_{q-1}(\partial(\underset{\sim}{v})\Big)}, \tag{4.14.8}$$

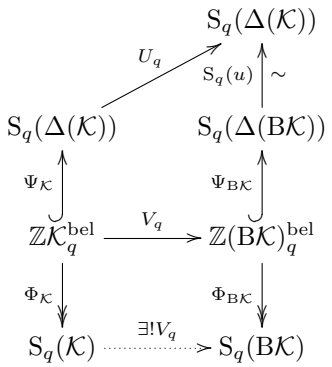
wobei die Notation rechts das „Davorschreiben von $\frac{1}{q+1}(v_0+\dots+v_q)$ samt Unterschlängeln“ andeuten soll: Das Element $U_{q-1}(\partial(\underset{\sim}{v}))$ ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von singulären $(q-1)$-Simplizes der Form $\underset{\sim}{(w_0,\dots,w_{q-1})}$, und jeder solche ist durch $\underset{\sim}{\big(\frac{1}{q+1}(v_0+\dots+v_q), w_0,\dots,w_{q-1}\big)}$ zu ersetzen.

Man beweist die Formel (4.14.8) per Induktion über q (mit Hilfe der induktiven Definition der U_q und der Umkehrabbildung der in Lemma 4.3.3 beschriebenen Bijektion) und beweist dabei simultan mit, dass alle U_q singuläre Simplizes der Form $\underset{\sim}{(w_0,\dots,w_q)}$ auf $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen ebensolcher abbilden. Dies ist das Ende des Einschubs.

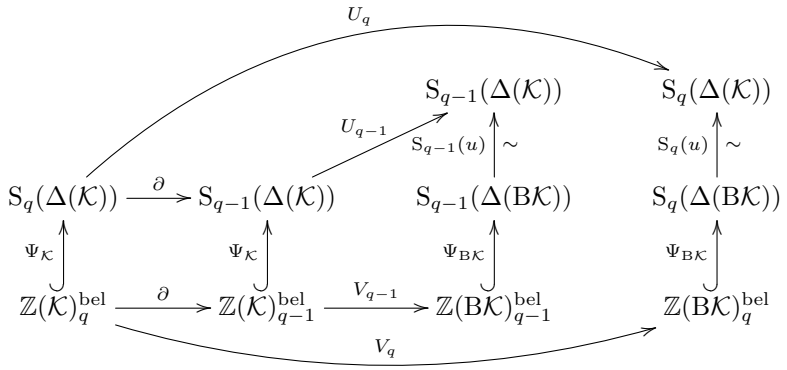
[101] Das sollte analog gehen, sobald man ein Analogon von (3.1.11) für den kombinatorischen Prismenoperator gezeigt hat.

Um das kommutative Diagramm (4.14.2) zu etablieren, kümmern wir uns zuerst um seine q-te Komponente. Wir wollen also zeigen, dass der obere Teil des folgenden Diagramms

(4.14.9)



kommutativ ist und dass der horizontale Pfeil V_q den unteren horizontalen Pfeil (automatisch eindeutig) induziert. Zuerst kümmern wir uns um Kommutativität des oberen Teildiagramms und zeigen diese per Induktion über q. Für $q < 0$ ist dies trivial, für $q = 0$ folgt es direkt aus den Definitionen. Sei nun $q > 0$. Betrachte das Diagramm



Wir wollen zeigen, dass das „äußere Rechteck“ kommutativ ist. Per Induktion ist das „innere Rechteck“ kommutativ. Außerdem ist das linke Quadrat nach 4.8.10 kommutativ. Für beliebiges $s = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}}$ berechnen wir einerseits

$$\begin{aligned} U_q(\Psi_{\mathcal{K}}(s)) &\overset{4.8.7}{=} U_q(\underset{\sim}{s}) \\ &\overset{(4.14.8)}{=} \Big(\underbrace{\frac{1}{q+1}(s_0+\dots+s_q)}, U_{q-1}(\partial(\underset{\sim}{s}))\Big) \\ &= \Big(\underbrace{\frac{1}{q+1}(s_0+\dots+s_q)}, U_{q-1}(\partial(\Psi_{\mathcal{K}}(s)))\Big) \\ &= \Big(\underbrace{\frac{1}{q+1}(s_0+\dots+s_q)}, \mathrm{S}_{q-1}(u)\Big(\Psi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}\big(V_{q-1}(\partial(s))\big)\Big)\Big) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\mathrm{S}_q(u)\Big(\Psi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}(V_q(s))\Big) \overset{(4.14.7)}{=} \mathrm{S}_q(u)\Big(\Psi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}\Big(\big(\{s_0,\dots,s_q\}, V_{q-1}(\partial(s))\big)\Big)\Big)$$

Da das (von s abhängige) Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{S}_{q-1}(\Delta(\mathcal{K})) & \xrightarrow{\left(\frac{1}{q+1}(s_0+\cdots+s_q),-\right)} & \mathrm{S}_q(\Delta(\mathcal{K})) \\
{\scriptstyle \mathrm{S}_{q-1}(u)}\uparrow\sim & & {\scriptstyle \mathrm{S}_q(u)}\uparrow\sim \\
\mathrm{S}_{q-1}(\Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})) & \xrightarrow{\left(\{s_0,\ldots,s_q\},-\right)} & \mathrm{S}_q(\Delta(\mathrm{B}\mathcal{K})) \\
{\scriptstyle \Psi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}}\uparrow & & {\scriptstyle \Psi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}}\uparrow \\
\mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})^{\mathrm{bel}}_{q-1} & \xrightarrow{\left(\{s_0,\ldots,s_q\},-\right)} & \mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})^{\mathrm{bel}}_{q}
\end{array}$$

offensichtlich kommutativ ist, folgt aus den beiden obigen Rechnungen

$$U_q(\Psi_{\mathcal{K}}(s)) = \mathrm{S}_q(u)\Big(\Psi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}(V_q(s))\Big).$$

Dies zeigt, dass der obere Teil des Diagramms (4.14.9) kommutativ ist. Da in diesem Teildiagramm alle Abbildungen bis auf V_q mit den Differentialen verträglich sind und die vertikalen Abbildungen injektiv sind, sind auch die Abbildungen V_q mit den Differentialen verträglich. Also definieren die $(V_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ in der Tat einen Morphismus von Komplexen (dies ist der oben angedeutete indirekte Beweis für das Analogon zu Lemma 4.3.7). (Wir haben im Grunde verwendet: Schränkt ein Morphismus von Komplexen komponentenweise zu Unterkomplexen ein, so bilden diese komponentenweisen Einschränkungen einen Morphismus zwischen den Unterkomplexen.)

Damit ist der obere Teil des Diagramms (4.14.2) als kommutatives Diagramm etabliert. Um seinen unteren Teil zu etablieren (also die eindeutige Existenz des gestrichelten Morphismus V zu zeigen), genügt es zu zeigen (da die Vertikale $\Phi_{\mathcal{K}}$ komponentenweise surjektiv ist), den unteren Teil des Diagramms (4.14.9) zu etablieren, das wir hier noch einmal wiedergeben:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}}_q & \xrightarrow{V_q} & \mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})^{\mathrm{bel}}_q \\
{\scriptstyle \Phi_{\mathcal{K}}}\downarrow & & {\scriptstyle \Phi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}}\downarrow \\
\mathrm{S}_q(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\exists! V_q} & \mathrm{S}_q(\mathrm{B}\mathcal{K})
\end{array}$$

Nur die Existenz des gestrichelten V_q bleibt also zu zeigen (die Eindeutigkeit ist klar wegen der Surjektivität von $\Phi_{\mathcal{K}}$). Dafür ist zu zeigen, dass die Verknüpfung $\Phi_{\mathrm{B}\mathcal{K}} \circ V_q$ auf dem Kern von $\Phi_{\mathcal{K}}$ verschwindet.

Sei $U \subset \mathbb{Z}^{\mathrm{ang}}_q$ der Kern von $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{ang}}_q \twoheadrightarrow \mathrm{S}_q\mathcal{K}$, also der „Nenner“ in (2.4.7). Es gilt $\mathcal{K}^{\mathrm{ang}}_q \subset \mathcal{K}^{\mathrm{bel}}_q$. Sei $\mathcal{K}^{\text{nicht inj.}}_q = \mathcal{K}^{\mathrm{bel}}_q \setminus \mathcal{K}^{\mathrm{ang}}_q$ das entsprechende Komplement. Aus der Definition von $\Phi_{\mathcal{K}}$ in Proposition 4.8.5 folgen die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{ang}}_q & \subset & \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{bel}}_q & = & \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\mathrm{ang}}_q \oplus \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{nicht inj.}}_q \\
\downarrow & \swarrow_{\Phi_{\mathcal{K}}} & & & \\
\mathrm{S}_q\mathcal{K} & & & &
\end{array}$$

und die Gleichheit

$$\ker(\Phi_{\mathcal{K}}) = U \oplus \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{nicht inj.}}_q.$$

Es reicht also zu zeigen, dass $\Phi_{\mathrm{B}\mathcal{K}} \circ V_q$ verschwindet einerseits auf allen Elementen von $\mathcal{K}^{\text{nicht inj.}}_q$ und andererseits auf allen Elementen der Form

$$(s_0,\ldots,s_i,s_{i+1},\ldots,s_q) + (s_0,\ldots,s_{i+1},s_i,\ldots,s_q)$$

(nur i-ter und j-ter Eintrag vertauscht) für $(s_0,\ldots,s_q) \in \mathcal{K}^{\mathrm{ang}}_q$ und alle $i = 0,\ldots,q-1$ (denn die Transpositionen benachbarter Elemente erzeugen die symmetrische Gruppe).

Sei $s = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{nicht inj.}}$. Dann existiert eine simpliziale Abbildung $\varphi\colon \blacktriangle_{q-1} \to \mathcal{K}$ und eine Element $t \in (\blacktriangle_{q-1})_q^{\mathrm{bel}}$, das unter

$$\mathbb{Z}(\blacktriangle_{q-1})_q^{\mathrm{bel}} \xrightarrow{\mathbb{Z}(\varphi)_q^{\mathrm{bel}}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}}$$

auf s abgebildet wird. Da V_q und Φ natürlich in Simplizialkomplexen sind, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}(\blacktriangle_{q-1})_q^{\mathrm{bel}} & \xrightarrow{V_q} & \mathbb{Z}(\mathrm{B}(\blacktriangle_{q-1}))_q^{\mathrm{bel}} & \xrightarrow{\Phi_{\mathrm{B}(\blacktriangle_{q-1})}} & \mathrm{S}_q(\mathrm{B}(\blacktriangle_{q-1})) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{Z}(\varphi)_q^{\mathrm{bel}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{Z}(\mathrm{B}\varphi)_q^{\mathrm{bel}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{S}_q(\mathrm{B}\varphi)} \\
\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\mathrm{bel}} & \xrightarrow{V_q} & \mathbb{Z}(\mathrm{B}\mathcal{K})_q^{\mathrm{bel}} & \xrightarrow{\Phi_{\mathrm{B}\mathcal{K}}} & \mathrm{S}_q(\mathrm{B}\mathcal{K}).
\end{array}$$

Da $\mathrm{B}(\blacktriangle_{q-1})$ keine q-Simplizes hat, gilt $\mathrm{S}_q(\mathrm{B}(\blacktriangle_{q-1})) = 0$. Somit verschwindet das Bild von s unter der unteren horizontalen Verknüpfung.

Nun betrachten wir Elemente der Form

$$(s_0, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_q) + (s_0, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, s_q) \tag{4.14.10}$$

für $(s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\mathrm{ang}}$ und $i = 0, \dots, q-1$. Wir behaupten, dass ein solches Element bereits unter V_q auf Null geht, und zeigen dies per Induktion über q. Für $q \leq 0$ ist nichts zu zeigen. (Der Leser mag die Fälle $q = 1, 2$ mit Hilfe von (4.14.5) und (4.14.6) überprüfen.) Gelte $q \geq 1$. Nach der Beschreibung (4.14.7) von V_q wird das obige Element (4.14.10) zunächst unter ∂ auf

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0,\dots,i-1} (-1)^j \Big((s_0, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_q) + (s_0, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, s_q) \Big) \\
+ &\sum_{j=i+2,\dots,q} (-1)^j \Big((s_0, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_q) + (s_0, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_q) \Big) \\
+ &(-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_q) + (-1)^{i+1} (s_0, \dots, s_i, \widehat{s_{i+1}}, \dots, s_q) \\
+ &(-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s_{i+1}}, s_i, \dots, s_q) + (-1)^{i+1} (s_0, \dots, s_{i+1}, \widehat{s_i}, \dots, s_q)
\end{aligned}$$

abgebildet. Die letzten vier Summanden heben sich auf. Jeder der in den beiden oberen Summen vorkommende Summanden geht per Induktion unter V_{q-1} auf Null. Also geht das Element (4.14.10) unter V_q auf Null. Dies zeigt unsere Behauptung.

Dies zeigt die Existenz der gestrichelten Abbildung V_q in (4.14.9). Insgesamt zeigt dies alle am Anfang dieses Abschnitt getroffenen Behauptungen über den Unterteilungsoperator $V = (V_q)_q$.

Korollar 4.14.11. *Sei $f\colon X \to X$ eine stetige Selbstabbildung eines kompakten, triangulierbaren wegzusammenhängenden[102] topologischer Raums X. Gibt es einen Körper k mit $\mathrm{H}_q(X; k) = 0$ für alle $q > 0$, so hat f einen Fixpunkt.*

Beweis. Nach 4.9.3 ist $\mathrm{H}_0(X; k)$ endlichdimensional und nach Annahme gilt $\Lambda_{f,k} = \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_0(f) | \mathrm{H}_0(X; k)\big)$. Da X wegzusammenhängend ist, gilt $\mathrm{H}_0(X; k) \xrightarrow{\sim} k\pi_0(X) \cong k$ nach Lemma 3.1.24 (für k statt $\mathbb{Z}$). Der dortige Isomorphismus (3.1.7) ist natürlich in X (aber damals stand diese Terminologie noch nicht zur Verfügung), weshalb $\mathrm{H}_0(f) = \mathrm{id}$ und daraus $\Lambda_{f,k} = 1$ folgen. Der Fixpunktsatz von Lefschetz 4.14.7 liefert die Existenz eines Fixpunkts. □

Aufgabe 4.14.12. Der Brouwersche Fixpunktsatz 4.5.8 folgt aus dem Lefschetzschen Fixpunktsatz 4.14.7.

Aufgabe 4.14.13. Jede stetige Selbstabbildung der reell projektiven Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt.

[102] Ist X triangulierbar, so stimmt die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X mit der Menge der Zusammenhangskomponenten überein. Insbesondere ist X genau dann wegzusammenhängend, wenn es zusammenhängend ist. Dies folgt aus [Sch20, Lemma 2.6.17], denn wir können ohne Einschränkung $X = \Delta(\mathcal{K})$ annehmen. Dann ist für jedes $x \in X = \Delta(\mathcal{K})$ der offene Stern $\mathrm{St}(\mathrm{Supp}(x))$ eine offene Umgebung von x in X (siehe 4.13.6), die wegzusammenhängend ist: Für jedes $y \in \mathrm{St}(\mathrm{Supp}(x)) = \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{K}:\mathrm{Supp}(x) \subset \tau} \Delta(\tau)'$ ist $t \mapsto tx + (1-t)y$ ein (stetiger) Weg von y nach x in $\Delta(\mathrm{Supp}(y))$ und dann auch in $\Delta(\mathcal{K}) = X$.

Aufgabe 4.14.14. Sei $f\colon X \to X$ eine stetige Selbstabbildung eines kompakten, triangulierbaren topologischer Raums X.

(a) Ist f zu einer konstanten Selbstabbildung homotop, so hat f einen Fixpunkt.
(b) Ist f zu id_X homotop und gilt $\chi(X) \neq 0$, so hat f einen Fixpunkt.

Aufgabe 4.14.15. Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit (wie in der Differentialgeometrie definiert). Sei V ein glattes (Tangential-)Vektorfeld auf M. Ein Satz der Differentialgeometrie bzw. der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe [Wik20, Satz von Picard-Lindelöf]) besagt, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Abbildung

$$F\colon M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

mit den folgenden Eigenschaften gibt (man kann sogar $\varepsilon = +\infty$ annehmen):

- $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}_M$;
- für jedes $m \in M$ ist die Kurve $\gamma_m := F(m, \cdot)\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ differenzierbar und erfüllt $(\gamma_m)'(s) = V(\gamma_m(s))$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; insbesondere gilt $(\gamma_m)'(0) = V(m)$.

Überdies gilt: Hat V keine Nullstelle, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $F(m, t) \neq m$ für alle $m \in M$ und $t \in (-\delta, \delta)\backslash\{0\}$.

(a) Gibt es ein Vektorfeld V ohne Nullstelle auf M und ist M triangulierbar, so gilt $\chi(M; k) = 0$ für alle Körper k.
Bemerkung: Dies liefert insbesondere Korollar 4.15.15 (vgl. 4.15.14).
(b) Welche kompakten Flächen besitzen ein nirgends verschwindendes Vektorfeld? (Man darf annehmen, dass all diese Flächen triangulierbar sind.)

4.15. Abbildungsgrad für Selbstabbildungen von Sphären samt Anwendungen.

Definition 4.15.1. Sei $n \geq 1$. Sei $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung. Ihr **Abbildungsgrad** ist die eindeutige ganze Zahl

$$\deg(f) \in \mathbb{Z},$$

mit

$$\deg(f). = \mathrm{H}_n(f)\colon \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) \to \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n).$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn nach Satz 4.5.1 ist $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang Eins und jeder Gruppenendomorphismus einer solchen abelschen Gruppe ist durch Multiplikation mit einer eindeutigen ganzen Zahl gegeben.

Lemma 4.15.2 (Eigenschaften des Abbildunggrades)**.** *Sei $n \geq 1$.*

(a) Die Abbildung

$$\deg\colon \mathrm{Top}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \to (\mathbb{Z}, \cdot) \tag{4.15.1}$$

ist ein Monoidmorphismus:
- $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$*;*
- *Sind* $\mathbb{S}^n \xrightarrow{g} \mathbb{S}^n \xrightarrow{f}$ *stetig, so gilt* $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

(b) Hat eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine stetige Ausdehnung $D^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, so gilt $\deg(f) = 0$.

(c) Homotopie-Invarianz: Sind zwei stetige Abbildungen $\mathbb{S}^n \underset{f}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{S}^n$ homotop, so gilt $\deg(f) = \deg(g)$.

Der Monoidmorphismus (4.15.1) induziert somit einen Monoidmorphismus $\deg\colon \mathrm{hTop}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \to \mathbb{Z}$, $[f] \mapsto \deg(f)$.

Beweis. Dies folgt aus der Funktorialität und der Homotopie-Invarianz von $\mathrm{H}_n\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ unter Verwendung von $\mathrm{H}_n(D^{n+1}) = 0$. □

Ausblick 4.15.3. Der [Wik20, Satz von Hopf] von Hopf besagt insbesondere, dass der Abbildungsgrad eine Bijektion

$$\deg\colon \mathrm{hTop}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

induziert. Wer mag, kann sich die Surjektivität überlegen. Insbesondere sind zwei stetige $\mathbb{S}^n \underset{f}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{S}^n$ genau dann homotop, wenn $\deg(f) = \deg(g)$ gilt (vgl. Lemma 4.15.2.(c)).

4.15.4. Ist $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ein Homöomorphismus, so ist $\deg(f) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ eine Einheit von $\mathbb{Z}$ (nach Lemma 4.15.2.(a)).

Satz 4.15.5. *Sei $n \geq 1$. Betrachte die Antipodenabbildung a und die Spiegelung s an der Hyperebene $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$:*

$$\begin{aligned} a = a_{\mathbb{S}^n} \colon \mathbb{S}^n &\to \mathbb{S}^n, & s = s_{\mathbb{S}^n} \colon \mathbb{S}^n &\to \mathbb{S}^n, \\ x &\mapsto -x, & (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dann gelten

$$\deg(a_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}, \qquad \deg(s_{\mathbb{S}^n}) = -1.$$

4.15.6. Da a und s Involutionen sind, d. h. $a^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} = s^2$ erfüllen, gilt sicherlich $\deg(a), \deg(s) \in \{\pm 1\}$.

4.15.7. Aus $\deg(s) = -1$ folgt sofort $\deg(a) = (-1)^{n+1}$ (siehe Aufgabe 4.15.8); wir beweisen trotzdem beide Aussagen simultan.

Beweis. (per Mayer-Vietoris)[103] In gewisser Weise ist dies eine Fortsetzung des Beweises von Satz 4.5.1. Wie dort betrachten wir die offene Überdeckung von $\mathbb{S}^n$ durch $U = \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$ und $V = \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\}$.

Sei $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine stetige (nicht notwendig bijektive) Selbstabbildung mit $f(U) \subset V$ und $f(V) \subset U$. (Sowohl a als auch s haben diese Eigenschaft.) Die Funktorialität der Mayer-Vietoris-Sequenz 4.4.1 liefert ein kommutatives Diagramm
(4.15.2)

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{H}_n(U) \oplus \mathrm{H}_n(V) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_n(j_U) & -\mathrm{H}_n(j_V) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\delta_{U,V}} & \mathrm{H}_{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_p(i_U) \\ \mathrm{H}_p(i_V) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_{n-1}(U) \oplus \mathrm{H}_{n-1}(V) \\ \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} \mathrm{H}_n(f) & 0 \\ 0 & \mathrm{H}_n(f) \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_{n-1}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} \mathrm{H}_{n-1}(f) & 0 \\ 0 & \mathrm{H}_{n-1}(f) \end{pmatrix}} \\ \mathrm{H}_n(V) \oplus \mathrm{H}_n(U) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_n(j_V) & -\mathrm{H}_n(j_U) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\delta_{V,U}} & \mathrm{H}_{n-1}(V \cap U) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{H}_p(i_V) \\ \mathrm{H}_p(i_U) \end{pmatrix}} & \mathrm{H}_{n-1}(V) \oplus \mathrm{H}_{n-1}(U) \end{array}$$

dessen erste Zeile die Mayer-Vietoris-Sequenz zu U, V ist und dessen zweite die zu V, U ist. Hier ist zu beachten, dass sich die beiden Randabbildungen unserer Mayer-Vietoris-Sequenzen um ein Vorzeichen unterscheiden, in Formeln $\delta_{U,V} = -\delta_{V,U}$, wie man dem Beweis von Satz 4.4.1 und der Definition des Verbindungsmorphismus in Satz B.3.4 entnimmt.

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass das Deformationsretrakt $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \hookrightarrow U \cap V$ unter f invariant ist, also $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ gilt (wie das für Antipodenabbildung a und Spiegelung s gilt). Damit können wir im obigen Diagramm $U \cap V = V \cap U$ durch $\mathbb{S}^{n-1}$ ersetzen (dabei werden i_U und i_V durch ihre Restriktionen auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ersetzt; ebenso werden $\delta_{U,V}$ und $\delta_{V,U}$ durch ihre Verknüpfungen mit den von der Inklusion $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow U \cap V$ induzierten Isomorphismen ersetzt).

Für $n \geq 2$ verschwinden die vier äußeren Terme unseres Diagramms und unser Diagramm schrumpft zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\sim]{\delta_{U,V}} & \mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_n(f) = \deg(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_{n-1}(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}})} \\ \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\sim]{\delta_{V,U} = -\delta_{U,V}} & \mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

[103] In [Mun84] werden drei Beweise für den Grad der Antipodenabbildung gegeben:

- Theorem 21.3 in *loc. cit.* simplizial per Spiegelung s.
- Theorem 22.6 per Lefschetzschem Fixpunktsatz 4.14.7 (eigentlich reicht der simpliziale Fixpunktsatz 4.11.2.(b)).
- Corollary 31.9. Davor wird in Theorem 31.8 der Grad der Spiegelung s ausgerechnet. Der Beweis dort ist wohl im wesentlichen der hier gegebene Beweis (den ich unabhängig gefunden habe). Jedoch spiegelt Munkres in der ersten Koordinate, was dann wirklich einen Induktionsbeweis für s ergibt. Spiegelt man in der letzten Koordinate, so kommt man für s ohne Induktion aus.

mit horizontalen Isomorphismen. Da die Vertikalen wie angedeutet durch Multiplikation mit dem jeweiligen Grad gegeben sind und die Horizontalen sich um ein Vorzeichen unterscheiden und Isomorphismen sind, folgt

$$\deg(f) = -\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

Konkret für $f = a$ bzw. $f = s$ ergeben sich

$$\deg(a_{\mathbb{S}^n}) = -\deg(a_{\mathbb{S}^n}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = -\deg(a_{\mathbb{S}^{n-1}}), \qquad \deg(s_{\mathbb{S}^n}) = -\deg(s_{\mathbb{S}^n}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = -\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}) = -1.$$

104

Es bleibt der Fall $n = 1$ zu betrachten (per Induktion im Fall $f = a$; im Fall $f = s$ fehlt nur noch dieser Fall). Dann stehen in beiden Zeilen des Diagramms (4.15.2) links Nullen und die Verbindungsmorphismen $\delta_{U,V}$ und $\delta_{V,U} = -\delta_{V,U}$ sind injektiv mit Bild $\mathbb{Z}([-1]-[+1]) \subset \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[1] = \mathrm{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathrm{H}_0(\{\pm 1\})$ (siehe Beweis von Satz 4.5.1). Wir erhalten das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{\delta_{U,V}}{\frown} & & \\
\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow[\sim]{\delta_{U,V}} & \mathbb{Z}([-1]-[+1]) & \subset & \mathrm{H}_0(\mathbb{S}^0) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_1(f)=\deg(f)} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_0(f|_{\mathbb{S}^0})} \\
\mathrm{H}_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow[\sim]{\delta_{V,U}=-\delta_{U,V}} & \mathbb{Z}([-1]-[+1]) & \subset & \mathrm{H}_0(\mathbb{S}^0). \\
 & & \underset{\delta_{V,U}=-\delta_{U,V}}{\smile} & &
\end{array}$$

Der rechte vertikale Pfeil ist

- im Fall $f = s$ die Identität und es folgt $\deg(s) = -1$;
- im Fall $f = a$ die Vertauschung von $[+1]$ und $[-1]$ und induziert somit auf der angegebenen Untergruppe die Abbildung $-\mathrm{id}$; es folgt $\deg(a) = 1 = (-1)^{1+1}$. □

Aufgabe 4.15.8. Seien s und a wie in Satz 4.15.5 Spiegelung bzw. Antipodenabbildung. Nimm an, dass $\deg(s) = -1$ bekannt ist. Folgere $\deg(a) = (-1)^{n+1}$, ohne den zitierten Satz zu verwenden.

In der Vorlesung springen wir direkt zu Abschnitt 4.15.1.

4.15.9. Auf Seite 94 beginnend erkläre ich, wie man Satz 4.15.5 mit dem Lefschetzschem bzw. dem simplizialem Fixpunktsatz beweisen kann. Dazu benötigt man jedoch die Aussage von Lemma 4.15.11, die sich später als einfache Folgerung aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie 6.10.1 herausstellen wird. Wir bereiten nun den Beweis dieses Lemmas vor.

4.15.10 (Singuläre Homologie als Bifunktor)**.** Wir benötigen eine Art Nachtrag für den Beweis von Lemma 4.15.11. Sei ein Ring R fixiert (etwa $R = \mathbb{Z}$). Sei X ein topologischer Raum. Ist $M \to N$ ein R-Modulmorphismus, so sind die R-Modulmorphismen

$$\mathrm{S}_q(X;\varphi)\colon \mathrm{S}_q(X;M) = M\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X) = \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} M \to \mathrm{S}_q(X;N) = N\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X) = \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} N,$$
$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} m_\sigma\sigma = (m_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} \mapsto \sum_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)} \varphi(m_\sigma)\sigma = \big(\varphi(m_\sigma)\big)_{\sigma\in\mathrm{Top}(\Delta_q,X)},$$

für $q \in \mathbb{Z}$, mit den Differentialen verträglich und definieren einen Morphismus

$$\mathrm{S}(X;M) \xrightarrow{\mathrm{S}(X;\varphi)} \mathrm{S}(X;N)$$

[104] Wer nun noch $\deg(s|_{\mathbb{S}^1}) = -1$ berechnet, etwa mit dem Satz von Hurewicz 3.4.2 oder über simpliziale Homologie, ist nach 4.15.7 fertig.

von Komplexen. Ist überdies $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist das Diagramm (seine Vertikalen sind analog zu Lemma 3.2.2 definiert, mit $\mathbb{Z}$ durch M bzw. N ersetzt)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}(X;M) & \xrightarrow{\mathrm{S}(X;\varphi)} & \mathrm{S}(X;N) \\ {\scriptstyle \mathrm{S}(f;M)}\downarrow & \searrow^{\mathrm{S}(f;\varphi)} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{S}(f;N)} \\ \mathrm{S}(Y;M) & \xrightarrow{\mathrm{S}(Y;\varphi)} & \mathrm{S}(Y;N) \end{array} \tag{4.15.3}$$

in $\mathrm{Kom}(R)$ (ohne den roten Pfeil) kommutativ. Sei der rote Pfeil $S(f;\varphi)$ die eindeutige Abbildung, so dass das Diagramm kommutativ bleibt. Wir erhalten so offensichtlich einen Funktor

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}(-;?)\colon \mathrm{Top} \times \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Kom}(R).$$

[105] Verknüpfen mit $\mathrm{H}_q\colon \mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ liefert den Funktor

$$\mathrm{H}_q = \mathrm{H}_q(-;?) = \mathrm{H}_q \circ \mathrm{S}(-;?)\colon \mathrm{Top} \times \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(R).$$

Lemma 4.15.11. *Sei $n \geq 1$. Ist k ein Körper, so gilt für jede stetige Selbstabbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ der n-Sphäre*[106]

$$\mathrm{H}_n(f) = \mathrm{H}_n(f;k) = \deg(f)\cdot\colon \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;k) \to \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;k).$$

Allgemeiner gilt $\mathrm{H}_n(f) = \deg(f)\cdot\colon \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;M) \to \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;M)$ für jeden Modul M über jedem Ring R.

Beweis. Diese Aussage wird trivial, wenn man die kurze exakte Sequenz aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie, Satz 6.10.1, verwendet (wobei hier eh das Torsionsprodukt verschwindet), denn diese ist natürlich in $X \in \mathrm{Top}$. Wir erklären das in dieser Fußnote[107]. Es folgt ein Ad-hoc-Beweis.

Wir verwenden 4.15.10 mit $R = \mathbb{Z}$ und fassen k als abelsche Gruppe auf (was nach B.1.15 für die Behauptung des Lemmas keinen Unterschied macht[108]).

---

[105] Die Abbildungen $\mathrm{S}(f;M), \mathrm{S}(f;N), \mathrm{S}(X;\varphi), \mathrm{S}(Y;\varphi)$ im obigen Diagramm kann man nun alternativ als $\mathrm{S}(f;\mathrm{id}_M), \mathrm{S}(f;\mathrm{id}_N), \mathrm{S}(\mathrm{id}_X;\varphi), \mathrm{S}(\mathrm{id}_Y;\varphi)$ notieren.

[106] Ist V ein k-Vektorraum und $n \in \mathbb{Z}$, so bezeichnet $n\cdot\colon V \to V$ (ist $n.$ bessere Notation?) äquivalent

- Skalarmultiplikation mit dem Bild von n in k unter dem eindeutigen Ringmorphismus $\mathbb{Z} \to k$ oder
- die Abbildung, die v auf $v + \cdots + v$ (n Summanden) abbildet (zumindest für $n \geq 0$; sonst $-n$ Summanden $-v$).

Die zweite Interpretation ist „besser“, da sie analog für jeden R-Modul M funktioniert.

[107] Wir behaupten, dass die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;k)$$

ist. Im Fall $n = 1$ ist dies der Isomorphismus (6.10.1) aus 6.10.3. Im Fall $n \geq 2$ folgt dies aus Satz 6.10.1 wegen $\mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{S}^n) = 0$ (auch der Fall $n = 1$ folgt daraus, wie in 6.10.3 erklärt).

Da die kurze exakte Sequenz in Satz 6.10.1 natürlich in $X \in \mathrm{Top}$ ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) \otimes k & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;k) \\ {\scriptstyle \mathrm{H}_n(f)\otimes\mathrm{id}_k = (\deg(f)\cdot)\otimes\mathrm{id}_k = \deg(f)\cdot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_n(f;k)} \\ \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n) \otimes k & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;k) \end{array}$$

Dies zeigt das Lemma.

[108] Genauer für diejenigen, die es ganz genau wissen wollen): Wir behaupten, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Top} \times \mathrm{Mod}(k) & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Kom}(k) & \xrightarrow{\mathrm{H}_q} & \mathrm{Mod}(k) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Top} \times \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{S}} & \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}_q} & \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

mit Vertikalen induziert von „Nimm unterliegende abelsche Gruppe“ $\mathrm{res}\colon \mathrm{Mod}(k) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ kommutativ ist. Für das rechte Quadrat folgt dies aus B.1.15. Für das linke Quadrat folgt das im Wesentlichen aus der trivialen Gleichheit

$$\mathrm{res}\Big(\bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, M)} M\Big) = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, M)} \mathrm{res}(M)$$

für alle $X \in \mathrm{Top}$ und $M \in \mathrm{Mod}(k)$.

Zuerst ersetzen wir f wie folgt durch eine Selbstabbildung von $\partial\Delta_{n+1}$: Sei $p\colon \partial\Delta_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ ein beliebiger Homöomorphismus und definiere g durch Kommutativität des Quadrats

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_{n+1} & \xrightarrow[\sim]{p} & \mathbb{S}^n \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \partial\Delta_{n+1} & \xrightarrow[\sim]{p} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

oder algebraisch durch $g = p^{-1} \circ f \circ p$. Anwenden des Funktors $\mathrm{H}_n(-;k)$ zeigt, dass es genügt, $\mathrm{H}_n(g;k) = \deg(f)\cdot$ zu zeigen. Anwenden des Funktors $\mathrm{H}_n = \mathrm{H}_n(-;\mathbb{Z})$ zeigt $\mathrm{H}_n(g;\mathbb{Z}) = \deg(f)\cdot$. Damit der Rest des Beweises leichter lesbar ist, schreiben wir $S^n := \partial\Delta_{n+1}$.

Korollar 4.7.7 liefert den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(S^n) = \mathrm{H}_n(S^n;\mathbb{Z}), \\ x &\mapsto \widetilde{x} := x[\partial\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}] = \Big[x\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i k_i^{n+1}\Big], \end{aligned}$$

wobei wir $\widetilde{x}$ mitdefinieren. Das analoge Resultat (samt Beweis) mit $\mathbb{Z}$ ersetzt durch k gilt und zeigt, dass

$$\begin{aligned} &\alpha_k\colon k \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(S^n;k), \\ &x \mapsto \widetilde{x} := x[\partial\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}] = [x\partial\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}] = [\partial(x\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}})] = \Big[x\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i k_i^{n+1}\Big]. \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist, wobei wir wiederum $\widetilde{x}$ mitdefinieren.[109]

Für jedes $a \in k$ betrachten wir den eindeutigen Gruppenmorphismus $\varphi_a\colon \mathbb{Z} \to k$ mit $1 \mapsto a$. Das kommutative Quadrat (4.15.3) spezialisiert zum kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathbb{Z}}} & \mathrm{H}_n(S^n) & = & \mathrm{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}_n(S^n;\varphi_a)} & \mathrm{H}_n(S^n;k) & \xleftarrow[\sim]{\alpha_k} & k \\ & & {\scriptstyle \mathrm{H}_n(g)=\mathrm{H}_n(g;\mathbb{Z})=\deg(f)\cdot}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_n(g;k)} & & \\ & & & & \mathrm{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}_n(S^n;\varphi_a)} & \mathrm{H}_n(S^n;k), & & \end{array}$$

wobei wir auch die soeben erklärten Isomorphismen eingezeichnet haben und die obige Erkenntnis $\mathrm{H}_n(g) = \deg(f)\cdot$. Verfolgt man die Eins $1 \in \mathbb{Z}$ durch das obige Diagramm, so wird sie wie folgt abgebildet:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longmapsto & \widetilde{1} & \longmapsto & \widetilde{a} & \longmapsto & a \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \deg(f)\widetilde{1} & \longmapsto & \deg(f)\widetilde{a} = \mathrm{H}_n(g;k)(\widetilde{a}) & & \end{array}$$

Lassen wir $a \in k$ variieren, so durchläuft $\widetilde{a}$ alle Elemente von $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n;k)$, so dass die Gleichheit rechts unten die gewünschte Behauptung $\deg(f) = \mathrm{H}_n(g;k)$ zeigt.

(Der Beweis für M statt k geht analog.) □

Will man nun zeigen, dass zwei Abbildungen $V \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} W$ in $\mathrm{Mod}(k)$ gleich sind (in unserem Fall $\mathrm{H}_n(f)$ und $\deg(f)\cdot$), so genügt es zu zeigen, dass sie in $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ gleich werden (mit anderen Worten verwenden wir, dass der Funktor $\mathrm{Mod}(k) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ treu ist).

[109] Das analoge Resultat gilt auch für jeden R-Modul M, jedoch muss man bei der Formulierung etwas aufpassen: Der tautologische Simplex $\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}$ ist kein Element von $\mathrm{S}_{n+1}(\Delta_{n+1};M)$ (denn in M „gibt gibt es kein Einselement“). Für jedes $m \in M$ ist aber $m\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}}$ ein Element von $\mathrm{S}_{n+1}(\Delta_{n+1};M)$ mit Rand in $\mathrm{S}_n(S^n;M)$. Das analoge Resultat ist, dass

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(S^n;k), \\ m &\mapsto [\partial(m\mathrm{id}_{\Delta_{n+1}})]. \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Zweiter Beweis von Satz 4.15.5 ($\deg(a_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ wird sogar auf zwei Arten bewiesen). Offensichtlich ist $\mathbb{S}^n$ kompakt und triangulierbar (vgl. die weiter unten beschriebene Triangulierung). Da $a\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ keinen Fixpunkt hat, muss

$$\Lambda_{f,\mathbb{Q}} = 0$$

nach dem Lefschetzschem Fixpunktsatz 4.14.7 gelten. Da andererseits wegen Lemma 4.15.11 (und unserem Wissen, dass $\mathrm{H}(\mathbb{S}^n;k)$ nur in den beiden Graden 0 und n lebt und dort zu $\mathbb{Q}$ isomorph ist und $\mathrm{H}_0(a)$ die Identität ist)

$$\begin{aligned}\Lambda_{a,\mathbb{Q}} &= \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_0(a)|\mathrm{H}_0(\mathbb{S}^1;\mathbb{Q})\big) + (-1)^n \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_0(a)|\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^1;\mathbb{Q})\big)\\ &= 1 + (-1)^n \deg(a)\end{aligned} \tag{4.15.4}$$

gilt, folgt $\deg(a) = (-1)^{n+1}$.[110]

Statt dem Lefschetzschen Fixpunktsatz genügt eigentlich der simpliziale Fixpunktsatz 4.11.2: Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ hat eine offensichtliche Triangulierung in 4 Viertelkreise alias (anschauliche) 1-Simplizes. Analog hat die Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine offensichtliche Triangulierung in acht „Dreiecke“ alias Achtelkugeln alias (anschauliche) 2-Simplizes. Analog hat $\mathbb{S}^n$ eine Triangulierung in 2^{n+1} (anschauliche) n-Simplizes. Wenn wir $\mathbb{S}^n$ stereographisch mit der Oberfläche der konvexen Hülle der Vektoren $\pm e_1, \pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}$ identifizieren, so liefert jede Vorzeichenwahl $\varepsilon = (\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(n+1)) \in \{\pm 1\}^{n+1}$ einen n-Simplex mit den Ecken $\varepsilon(1)e_1, \ldots, \varepsilon(n+1)e_{n+1}$. Damit ist die Triangulierung hoffentlich anschaulich klar. Der zugehörige Simplizialkomplex hat als Eckenmenge

$$E = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$$

und seine Simplexmenge $\mathcal{K}$ besteht aus allen nichtleeren Teilmengen von

$$\mathcal{K}_n = \{\{\varepsilon(1)e_1, \ldots, \varepsilon(n+1)e_{n+1}\} \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}^{n+1}\}.$$

Wer genau zeigen will, dass es sich um eine Triangulierung handelt, verwende Proposition 2.2.8 und Aufgabe 2.2.10.

Die (involutive) Abbildung $\alpha\colon E \to E$, $x \mapsto -x$, definiert eine (involutive) simpliziale Abbildung $\alpha\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, deren geometrische Realisierung $\Delta(\alpha)\colon \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{K})$ via unserer „stereographischen Triangulierung“ $\Delta(\mathcal{K}) \cong \mathbb{S}^n$ der Antipodenabbildung entspricht. Wir dürfen den simplizialen Fixpunktsatz 4.11.2 (Aussage (b) oder (a)) anwenden, denn α fixiert überhaupt kein Element von $\mathcal{K}$. Es folgt die erste der Gleichungen

$$0 = \mathrm{str}(\mathrm{H}(\alpha)) = \mathrm{str}(\mathrm{H}(\Delta(\alpha)) = \mathrm{str}(\mathrm{H}(a)) = \Lambda_{a,k}.$$

Die zweite folgt aus der Natürlichkeit der Vergleichsisomorphismen aus Satz 4.8.11, die dritte dann aus der obigen Identifizierung von $\Delta(\alpha)$ und a, und die letzte ist die Definition der Lefschetz-Zahl, wobei k ein beliebiger Körper ist (implizit ist dieser in allen obigen Super-Spuren verwendet).

Dies zeigt $\Lambda_{a,k} = 0$ (ohne den Lefschetzschen Fixpunktsatz), so dass wir nun wie oben mit Lemma 4.15.11 und (4.15.4) $\deg(a) = (-1)^{n+1}$ erhalten.

Dieselbe Beweisstrategie funktioniert auch für die Spiegelung $s\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Diese wird simplizial durch die Abbildung $\sigma\colon E \to E$ beschrieben, die alle $\pm e_1, \ldots, \pm e_n$ fixiert und e_{n+1} mit $-e_{n+1}$ vertauscht. Nur die

[110] Beachte, dass man $\deg(s) = -1$ nicht analog beweisen kann, denn s hat unendlich viele Fixpunkte.

Teilaussage (a) des simplizialen Fixpunktsatzes 4.11.2 ist jetzt anwendbar. Sie liefert die erste Gleichung in

$$\begin{aligned}
\operatorname{str}(\mathrm{H}(\sigma)) &= \sum_{q\in\mathbb{N}}(-1)^q \sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{K}_q\\ \varphi(\kappa)=\kappa}} \operatorname{sgn}(\varphi\colon \kappa\to\kappa)\\
&= \sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q \sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{K}_q\\ \kappa\cap\{e_{n+1},-e_{n+1}\}=\varnothing}} 1\\
&= \sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q\cdot 2^{q+1}\binom{n}{q+1}\\
&= 1-\sum_{q=0}^{n}(-2)^q\binom{n}{q}\\
&= 1-(1-2)^n = 1-(-1)^n,
\end{aligned}$$

die anderen Gleichheiten bis auf den binomischen Lehrsatz seien dem Leser überlassen. Wie oben gilt $\operatorname{str}(\mathrm{H}(\sigma)) = \Lambda_{s,k} = 1+(-1)^n\deg(s)$, wobei die zweite Gleichung Lemma 4.15.11 verwendet. Es folgt $\deg(s)=-1$. □

4.15.1. *Anwendungen des Abbildungsgrades.*

Satz 4.15.12. *Sei $n\geq 1$. Sei $g\in\mathrm{O}(n+1)$ eine orthogonale Matrix alias orthogonale Abbildung $g\colon\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$. Dann hat ihre Einschränkung $g\colon\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ als Abbildungsgrad die Determinante von g, in Formeln*

$$\deg(g)=\det(g).$$

Beweis. Wir setzen voraus, dass der Leser weiß, dass $\mathrm{O}(n+1)$ aus genau zwei Wegzusammenhangskomponenten besteht, nämlich den beiden Fasern der (stetigen) Determinante $\det\colon\mathrm{O}(n+1)\to\{\pm1\}$. Ist $\gamma\colon[0,1]\to\mathrm{O}(n+1)$ ein (stetiger) Weg zwischen $A,B\in\mathrm{O}(n+1)$, so ist

$$\begin{aligned}
H\colon\mathbb{S}^n\times[0,1]&\to\mathbb{S}^n,\\
(x,t)&\mapsto\gamma(t)(x),
\end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen A und B, aufgefasst als Selbstabbildungen der Sphäre. Aufgrund der Homotopie-Invarianz des Abbildungsgrades (siehe Lemma 4.15.2) folgt $\deg(A)=\deg(B)$. Im Fall $\det(g)=1$ ist g durch einen Weg in $\mathrm{O}(n+1)$ mit der Einheitsmatrix alias Identität verbindbar und es folgt $\deg(g)=\deg(\mathrm{id})=1=\det(g)$. Im Fall $\det(g)=-1$ ist g durch einen Weg in $\mathrm{O}(n+1)$ mit der Spiegelung s (aufgefasst als lineare Abbildung) aus Satz 4.15.5 verbindbar, und dieser Satz zeigt $\deg(g)=\deg(s)=-1=\det(g)$. □

Satz 4.15.13. *Sei $n\geq 1$. Sei $f\colon\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ eine stetige Selbstabbildung der Sphäre.*

(a) Gilt $\deg(f)\neq(-1)^{n+1}$ (= der Grad der fixpunktfreien Antipodenabbildung), so hat f einen Fixpunkt.
(b) Gilt $\deg(f)\neq 1$ (= der Grad der Identität), so bildet f einen Punkt x auf seinen Antipodenpunkt $-x$ ab, in Formeln $f(x)=-x$.

Beweis. (a) Wir nehmen an, dass f keinen Fixpunkt hat. Dann ist f wie folgt zur Antipodenabbildung a homotop. Anschaulich bewegen wir für jeden Punkt $x\in\mathbb{S}^n$ den Punkt $f(x)$ entlang des Großkreises (durch $f(x)$ und $-x$) nach $-x=a(x)$, und zwar auf dem kleineren Großkreisbogen (dieser Großkreis ist eindeutig, falls $f(x)\neq -x$ gilt; im Fall $f(x)=-x$ lassen wir den Punkt $f(x)$ einfach fix). Formal tut es die wie folgt definierte Homotopie $H\colon\mathbb{S}^n\times[0,1]\to\mathbb{S}^n$.

$$H(x,t):=\frac{(1-t)f(x)+ta(x)}{\|(1-t)f(x)+ta(x)\|}.$$

Diese ist sicherlich wohldefiniert und stetig, falls der Nenner nirgends verschwindet. Aus $0=(1-t)f(x)+ta(x)=(1-t)f(x)-tx$ folgt aber $(1-t)f(x)=tx$ und per Norm-Nehmen $1-t=t$, also $(t=\frac{1}{2}$ und$)$ $f(x)=x$ im Widerspruch zur Annahme.

Dies zeigt, dass f und a homotop sind. Also haben sie denselben Abbildungsgrad (Lemma 4.15.2), was zusammen mit Satz 4.15.5 $\deg(f)=\deg(a)=(-1)^{n+1}$ zeigt.

(b) Gelte $\deg(f) \neq 1$. Dann gilt $\deg(f \circ a) = \deg(f)\deg(a) = \deg(f)(-1)^{n+1} \neq (-1)^{n+1}$ nach Satz 4.15.5 (und Lemma 4.15.2). Nach Teil (a) hat $f \circ a$ einen Fixpunkt x, d. h. $f(-x) = f(a(x)) = x = -(-x)$. Dies zeigt die Behauptung.

□

4.15.14. Ein (Tangential-)Vektorfeld auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine stetige Abbildung $V\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $V(x) \perp x$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ (hier arbeiten wir mit dem euklidischen Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$))[111]. Anschauung: Stellt man sich den Vektor $V(x)$ als Pfeil vor und verschiebt ihn um x, so startet er bei x und liegt tangential zur Sphäre.

Eine Nullstelle eines solchen Vektorfeldes ist ein Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ mit $V(x) = 0$. Auf den Sphären $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \ldots$ ungerader Dimension gibt es Vektorfelder ohne Nullstellen, etwa

$$V\colon \mathbb{S}^{2k+1} \to \mathbb{S}^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+2},$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2k+1}, x_{2k+2}) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2k+2}, x_{2k+1}).$$

Korollar 4.15.15. *Auf den Sphären $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \ldots$ gerader Dimension hat jedes Vektorfeld eine Nullstelle (vgl. Aufgabe 4.14.15).*

Beweis. Sei sonst $V\colon \mathbb{S}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k+1}$ eine Vektorfeld ohne Nullstelle. Indem wir $V(x)$ durch $\frac{V(x)}{\|V(x)\|}$ ersetzen (was wohldefiniert ist), können wir ohne Einschränkung annehmen, dass unser Vektorfeld V in $\mathbb{S}^{2k}$ landet und somit eine stetige Selbstabbildung $V\colon \mathbb{S}^{2k} \to \mathbb{S}^{2k}$ definiert. Wegen $x \perp V(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^{2k}$ hat V weder einen Fixpunkt $x = V(x)$ noch einen „Antipodalpunkt“ $x \in \mathbb{S}^{2k}$ mit $V(x) = -x$. Die beiden Aussagen von Satz 4.15.13 liefern den Widerspruch $-1 = (-1)^{2k+1} = \deg(V) = 1$. □

Ende der 19. Vorlesung am 14.01.2021.

5. Reduzierte singuläre Homologie

5.1. Erste Eigenschaften.

Definition 5.1.1. Sei X ein topologischer Raum. Wir erinnern an den in 3.1.25 definierten augmentierten Komplex

$$\widetilde{\mathrm{S}}X = \left(\ldots \to \mathrm{S}_2X \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{S}_1X \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{S}_0X \xrightarrow{\partial_0=\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \to \ldots \right)$$

der singulären Ketten von X.

Die Zuordnung $X \mapsto \widetilde{\mathrm{S}}X$ lässt sich wie folgt zu einem Funktor

$$\widetilde{\mathrm{S}}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$$

machen: Gegeben eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$, definiere $\widetilde{\mathrm{S}}f\colon \widetilde{\mathrm{S}}X \to \widetilde{\mathrm{S}}Y$ durch $\widetilde{\mathrm{S}}_{-1}f := \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ und $\widetilde{\mathrm{S}}_q f := \mathrm{S}_q f$ für alle $q \neq -1$.

Die **q-te reduzierte (singuläre) Homologie von** X ist

$$\widetilde{\mathrm{H}}_q(X) = \mathrm{H}_q(\widetilde{\mathrm{S}}(X))$$

Die **(totale) reduzierte Homologie von** X ist $\widetilde{\mathrm{H}}(X) := \mathrm{H}(\widetilde{\mathrm{S}}X)$. Offensichtlich sind q-te reduzierte Homologie und totale reduzierte Homologie Funktoren $\widetilde{\mathrm{H}}_q\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ und $\widetilde{\mathrm{H}}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$.[112]

5.1.2. Unsere Definition der reduzierten Homologie unterscheidet sich im Fall $X = \varnothing$ von der in der Literatur üblichen Konvention.

Definition 5.1.3. Gegeben eine eine abelsche Gruppe M und $q \in \mathbb{Z}$ bezeichne $M[q]$ sowohl denjenigen Komplex abelscher Gruppen, dessen q-te Komponente M ist und dessen sonstige Komponenten Null sind, als auch diejenige Familie abelscher Gruppen, deren q-te Komponente M ist und deren sonstige Komponenten Null sind.[113]

---

[111] Wer etwas Differentialgeometrie kennt, sieht sofort, dass dies zur abstrakten Definition eines Vektorfeldes äquivalent ist

[112] Totale reduzierte Homologie kann auch als Funktor $\widetilde{\mathrm{H}}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ aufgefasst werden, vgl. Fußnote 172.

[113] Bisweilen gibt es hier Konflikte in der Notation: Die Homologie von $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ haben wir als $\mathrm{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[+1]$ geschrieben, wobei $[\pm 1]$ die Homologieklasse von $\pm 1 \in \mathbb{S}^0$, aufgefasst als singulärer 0-Simplex, ist. In der gerade eingeführten Notation würde $\mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[+1]$ jedoch den Komplex meinen, der $\mathbb{Z}$ als Komponente in den Graden -1 und 1 hat und sonstwo verschwindet.

Beispiel 5.1.4. Die reduzierte Homologie der leeren Menge lebt nur in Grad -1 und ist dort isomorph zu $\mathbb{Z}$, in Formeln $\widetilde{\mathrm{H}}(\varnothing) = \mathbb{Z}[-1]$.

Lemma 5.1.5 (Beziehung zwischen gewöhnlicher und reduzierter Homologie)**.** *Sei $X \neq \varnothing$ ein nichtleerer topologischer Raum. Dann gilt*

$$\mathrm{H}_q(X) = \widetilde{\mathrm{H}}_q(X) \qquad \text{für alle } q \neq 0$$[114]

und es gibt eine (in X natürliche) kurze exakte Sequenz

$$\widetilde{\mathrm{H}}_0(X) \hookrightarrow \mathrm{H}_0(X) \overset{\bar{\varepsilon}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z},$$

deren Abbildungen die offensichtlichen sind (siehe Beweis). Die Abbildung $\bar{\varepsilon}$ ist von der Augmentation induziert, so dass also $\widetilde{\mathrm{H}}_0(X)$ der Kern/kanonisch isomorph zum Kern von $\bar{\varepsilon}$ ist. Insbesondere (da diese exakte Sequenz spaltet, vgl. Aufgabe 5.1.8) gibt es einen Isomorphismus[115]

$$\mathrm{H}_0(X) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

5.1.6. Salopp gesprochen entsteht $\widetilde{\mathrm{H}}(X)$ also durch „Löschen von $\mathbb{Z}$“ im Grad Null aus $\mathrm{H}(X)$, falls $X \neq \varnothing$. Insofern ist die reduzierte Homologie eine reduzierte Version der gewöhnlichen Homologie.

Beweis. Für jeden topologischen Raum X haben wir eine offensichtliche kurze exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}[-1] \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{S}}X \twoheadrightarrow \mathrm{S}X$$

von Komplexen abelscher Gruppen. Da die Augmentation $\partial_0 = \varepsilon\colon \mathrm{S}_0X \to \mathbb{Z}$ im Fall $X \neq 0$ surjektiv ist, folgen alle Behauptungen aus der langen exakten Homologie-Sequenz B.3.4. □

Beispiel 5.1.7. Die reduzierte Homologie der Sphären ist für alle $n \geq -1$ wie folgt gegeben:

$$\widetilde{\mathrm{H}}_q(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n = q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies folgt aus Satz 4.5.1 und Lemma 5.1.5. Man beachte, dass wir hier die Spezialfälle $\mathbb{S}^{-1} = \varnothing$ und $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ nicht separat behandeln müssen. In der kompakten Notation von Definition 5.1.3 gilt also

$$\widetilde{\mathrm{H}}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}[n]. \tag{5.1.1}$$

Aufgabe 5.1.8 (Spaltungen kurzer exakter Sequenzen)**.** Sei $A \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen (oder von Moduln über einem Ring R).

(a) Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent.
   (i) Es gibt einen Gruppenmorphismus $s\colon C \to B$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_C$. Ein solches s heißt **Spaltung** der Surjektion p.
   (ii) Es gibt einen Gruppenmorphismus $\sigma\colon B \to A$ mit $\sigma \circ i = \mathrm{id}_A$. Ein solches σ heißt **Spaltung** der Injektion i.
   (iii) Es gibt einen Isomorphismus $\varphi\colon A \oplus C \xrightarrow{\sim} B$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \xhookrightarrow{\binom{1}{0}} & A \oplus C & \xrightarrow{(0\ 1)} & C \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle \mathrm{id}_C}\downarrow \\ A & \xhookrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

   kommutiert.

   Bemerkung: Sind diese Bedingungen erfüllt, sagt man auch, dass die kurze exakte Sequenz **spaltet** (besser wäre: **spaltbar** ist).

[114] wobei beide Seiten für $q < 0$ verschwinden

[115] Es gibt aber (ziemlich sicher, auch wenn ich mir das wohl noch überlegen sollte ...) keine Wahl solcher Isomorphismen für jedes nichtleere $X \in \mathrm{Top}$, die natürlich in nichtleeren $X \in \mathrm{Top}$ ist.

(b) Ist C eine freie abelsche Gruppe (oder ein freier R-Modul), so sind die obigen drei Bedingungen erfüllt.

Bemerkung: Allgemeiner gilt das für jede projektive abelsche Gruppe C (für jeden projektiven R-Modul; vgl. Definition 7.1.1).

5.1.9 (Lange exakte Sequenz der reduzierten Homologie für Raumpaare)**.** Sei (X, Z) ein Raumpaar. Analog zur Definition 4.1.2 von $\mathrm{S}(X, Z) = \frac{\mathrm{S}X}{\mathrm{S}Z}$ mag man $\widetilde{\mathrm{S}}(X, Z) := \frac{\widetilde{\mathrm{S}}X}{\widetilde{\mathrm{S}}Z}$ und dann $\widetilde{\mathrm{H}}(X, Z) := \mathrm{H}(\widetilde{\mathrm{S}}(X, Z))$ definieren. Dies liefert jedoch nichts Neues, denn offensichtlich gilt $\mathrm{S}(X, Z) = \widetilde{\mathrm{S}}(X, Z)$ und somit $\mathrm{H}(X, Z) = \widetilde{\mathrm{H}}(X, Z)$ (genauer sind diese Gleichheiten kanonische Isomorphismen).

Satz 4.2.1 (samt Beweis) bleibt gültig, wenn man alle Symbole S bzw. H durch $\widetilde{\mathrm{S}}$ bzw. $\widetilde{\mathrm{H}}$ ersetzt, falls diese Symbole vor Z oder X stehen, aber nicht vor (X, Z). Natürlich heißt die so erhaltene exakte Sequenz

$$\begin{array}{l} \ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{p+1}(X,Z) \\ \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{p+1}} \widetilde{\mathrm{H}}_p Z \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_p X \longrightarrow \mathrm{H}_p(X,Z) \\ \xrightarrow{\widetilde{\partial}_p} \widetilde{\mathrm{H}}_{p-1} Z \longrightarrow \ldots \end{array}$$

lange exakte reduzierte Homologie-Sequenz des Raumpaares (X, Z). Man beachte, dass nur in den beiden „linken Spalten“ Tilden über den H stehen.

5.1.10. Sei X ein nichtleerer topologischer Raum und $x \in X$. Dann gilt $\widetilde{\mathrm{H}}(x) := \widetilde{\mathrm{H}}(\{x\}) = 0$ nach Lemma 5.1.5. Folglich verschwinden in (5.1.9) alle Terme der „linken Spalte“ und wir erhalten für alle $p \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$\widetilde{\mathrm{H}}_p(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_p(X, x) := \mathrm{H}_p(X, \{x\}).$$

Diese Isomorphismen hatten wir in Aufgabe 4.7.13 angekündigt. Sie sind natürlich in $X \in \mathrm{Top}$.

5.1.11 (Homotopie-Invarianz der reduzierten Homologie)**.** Satz 3.3.1 bleibt korrekt, wenn man S durch $\widetilde{\mathrm{S}}$ und H durch $\widetilde{\mathrm{H}}$ ersetzt. Dies folgt schlicht daraus, dass (3.3.2) sofort

$$\partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q = \widetilde{\mathrm{S}}_q i_1 - \widetilde{\mathrm{S}}_q i_0 \qquad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}$$

liefert (mit „denselben“ Abbildungen δ_q, wobei sich eigentlich nur bei $\delta_{-1} = 0\colon \widetilde{\mathrm{S}}_{-1}X = \mathbb{Z} \to \mathrm{S}_0(X \times [0,1])$ der Definitionsbereich ändert), denn für $q = -1$ steht auf der rechten Seite $\widetilde{\mathrm{S}}_0 i_1 - \widetilde{\mathrm{S}}_0 i_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} - \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = 0$.

5.1.12 (Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie)**.** Der Satz über die Mayer-Vietoris-Sequenz 4.4.1 samt Beweis bleibt korrekt, wenn man S durch $\widetilde{\mathrm{S}}$ und H durch $\widetilde{\mathrm{H}}$ ersetzt und im Beweis die entsprechend modifizierte Version des Satzes über feine Ketten 4.3.10 verwendet. Diese besagt, dass $\widetilde{\mathrm{S}}^{\mathcal{V}}X \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{S}}X$ ein Quasi-Isomorphismus ist, wobei $\widetilde{\mathrm{S}}^{\mathcal{V}}X$ in offensichtlicher Weise definiert ist (ergänze $\mathrm{S}^{\mathcal{V}}X$ im Grad -1 durch $\mathbb{Z}$ samt Augmentation ε als Differential dorthin), und kann beispielsweise wie folgt bewiesen werden. Betrachte das offensichtliche kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}[-1] & \hookrightarrow & \widetilde{\mathrm{S}}^{\mathcal{V}}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}^{\mathcal{V}}X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[-1] & \hookrightarrow & \widetilde{\mathrm{S}}X & \twoheadrightarrow & \mathrm{S}X \end{array}$$

in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ mit kurzen exakten Sequenzen als Zeilen. Mit rechter und linker Vertikale ist nach Aufgabe B.3.7 auch die mittlere ein Quasi-Isomorphismen.

5.2. **Einbettungen von Sphären und der Jordansche Kurvensatz.**

5.2.1. Unser Ziel ist der Satz von Jordan-Brouwer 5.2.6. Ein Konsequenz ist der Jordansche Kurvensatz 5.2.9.

5.2.2. Stellt man sich einen Würfel in einer Sphäre vor, so ist intuitiv plausibel, dass die reduzierte Homologie seines Komplements verschwindet, wie wir das in Proposition 5.2.3 beweisen. Man beachte aber, dass das homöomorphe Bild eines Würfels in einer Sphäre sehr kompliziert aussehen kann; beispielsweise kann das homöomorphe Bild eines 1-dimensionalen Würfels alias Einheitsintervalls $[0,1]$ in $\mathbb{S}^2$ sehr kompliziert aussehen, man denke etwa an Osgood-Kurven, siehe [Wik20, Osgood curve]. Raumfüllende Kurven sind im Gegensatz dazu nicht injektiv, siehe [Wik20, Space-filling curve].

Proposition 5.2.3 (Reduzierte Homologie des Komplements eines Würfels in einer Sphäre)**.** *Seien $r, n \geq 0$ natürliche Zahlen und sei $\varphi\colon W^r := [0,1]^r \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Injektion vom r-dimensionalen Würfel (= Hyperkubus) in die n-dimensionale Sphäre (welche automatisch eine abgeschlossene Einbettung ist, siehe [Sch20, Satz 2.7.15])*[116]*. Dann verschwindet die reduzierte Homologie des Komplements ihres Bildes in der Sphäre, in Formeln*

$$\widetilde{\mathrm{H}}\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(W^r\big)\Big) = 0.$$

5.2.4 (Reduzierte Homologie des Komplements einer Disk/abgeschlossenen Kreisscheibe in einer Sphäre – Variante von Proposition 5.2.3)**.** Da $[0,1]^r$ und D^r für $r \geq 0$ homöomorph sind (wer konkret einen Homöomorphismus konstruieren möchte, mag wie in Fußnote 50 vorgehen), gilt

$$\widetilde{\mathrm{H}}\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(D^r\big)\Big) = 0$$

für jede stetige injektive Abbildung $\varphi\colon D^r \hookrightarrow \mathbb{S}^n$.

Beweis. Als injektive stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ist unsere Abbildung φ automatisch eine abgeschlossene Einbettung ([Sch20, Satz 2.7.15]). Sei $V^r := \varphi(W^r)$ das (zu W^r homöomorphe abgeschlossene) Bild von φ. Da W^r zusammenziehbar ist, $\mathbb{S}^n$ aber nicht (etwa wegen Satz 4.5.1), folgt $V^r \subsetneq \mathbb{S}^n$. Da also $\mathbb{S}^n \setminus V^r \neq \varnothing$ gilt, genügt es,

$$\text{Aussage } A(r)\colon \qquad \widetilde{\mathrm{H}}_q(\mathbb{S}^n \setminus V^r) = 0 \qquad \text{für alle } q \geq 0$$

zu zeigen. Für fixiertes n zeigen wir die Aussage $A(r)$ per Induktion über r.

Sicherlich gilt $A(0)$, denn dann besteht $V^0 \cong [0,1]^0 = \{0\}$ aus einem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ und $\mathbb{S}^n \setminus V^0 = \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ (etwa per sterographischer Projektion), also zusammenziehbar; somit gelten $\mathrm{H}(\mathbb{S}^n \setminus V^0) = \mathbb{Z}[0]$ und $\widetilde{\mathrm{H}}(\mathbb{S}^n \setminus V^0) = 0$ nach Lemma 5.1.5.

Sei die Aussage $A(r-1)$ für $r \geq 1$ als Induktionsannahme bereits bewiesen. Für $I \subset [0,1]$ setze

$$U_I := \mathbb{S}^n \setminus \varphi(I \times [0,1]^{r-1}).$$

Beispielsweise gilt $U_{[0,1]} = \mathbb{S}^n \setminus V^r$.

Hilfsaussage: Seien $0 \leq a < b < c \leq 1$ reelle Zahlen und $q \geq 0$. Sind $\lambda \in \mathrm{S}_{q+1}(U_{[a,b]})$ und $\mu \in \mathrm{S}_{q+1}(U_{[b,c]})$ singuläre $(q+1)$-Ketten mit $\partial(\lambda) = \partial(\mu)$, so gibt es eine $(q+1)$-Kette $\kappa \in \mathrm{S}_{q+1}(U_{[a,c]})$ mit $\partial(\kappa) = \partial(\lambda) = \partial(\mu)$.

Zur Erläuterung: Die erste Gleichheit $\partial(\lambda) = \partial(\mu)$ gilt a priori in $\mathrm{S}_q(U_{\{b\}})$, sie gilt dann jedoch automatisch bereits in $\mathrm{S}_q(U_{[a,c]})$, wo auch die anderen Gleichheiten $\partial(\kappa) = \partial(\lambda) = \partial(\mu)$ gelten; dies folgt aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} & U_{[a,b]} & \\ \circlearrowright & & \circlearrowleft \\ U_{[a,c]} = U_{[a,b]} \cap U_{[b,c]} & & U_{[a,b]} \cup U_{[b,c]} = U_{\{b\}} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowright \\ & U_{[b,c]} & \end{array}$$

[116] Aus der Existenz einer solchen Injektion folgt $r \leq n$, wie leicht aus dem später bewiesenen Satz von Jordan-Brouwer 5.2.6 folgt: Der Würfel W^r enthält $\mathbb{S}^{r-1}$, so dass dieser Satz $r-1 \leq n$ liefert; außerdem zeigt er, dass im Fall $r = n+1$ die Sphäre $\mathbb{S}^{r-1}$ bereist bijektiv (und homöomorph) auf $\mathbb{S}^n$ geht, was aber der Injektivität von $\varphi\colon W^r \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ entspricht.

und

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{S}(U_{[a,b]}) & & \\ & \subset & & \supset & \\ \mathrm{S}(U_{[a,b]}) \cap \mathrm{S}(U_{[b,c]}) & = & \mathrm{S}(U_{[a,c]}) & & \mathrm{S}(U_{\{b\}}) \\ & \supset & & \subset & \\ & & \mathrm{S}(U_{[b,c]}) & & \end{array}$$

samt der angegebenen Gleichheiten.

Beweis der Hilfsaussage: Alle Mengen im oberen Diagramm sind offen in $\mathbb{S}^n$. Die Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie 5.1.12 zur offenen Überdeckung $U_b = U_{[a,b]} \cup U_{[b,c]}$ enthält die exakte Sequenz

$$\underbrace{\widetilde{\mathrm{H}}_{q+1}(U_{\{b\}})}_{=0} \xrightarrow{\delta} \widetilde{\mathrm{H}}_q(U_{[a,c]}) \to \widetilde{\mathrm{H}}_q(U_{[a,b]}) \oplus \widetilde{\mathrm{H}}_q(U_{[b,c]}) \to \underbrace{\widetilde{\mathrm{H}}_q(U_{\{b\}})}_{=0}.$$

Die beiden Gruppen links und rechts verschwinden wie angedeutet, da Aussage $A(r-1)$ gilt und auf $[0,1]^{r-1} \cong \{b\} \times [0,1]^{r-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ angewendet werden kann. Also ist der mittlere Pfeil ein Isomorphismus. Die singuläre Kette $z := \partial(\lambda) = \partial(\mu) \in \widetilde{\mathrm{S}}_q(U_{[a,c]}) = \mathrm{S}_q(U_{[a,c]})$ ist ein Zykel im augmentierten Komplex $\widetilde{\mathrm{S}}(U_{[a,c]})$[117]; seine Homologieklasse $[z]$ geht unter unserem Isomorphismus auf $\begin{pmatrix}[z]\\[z]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[\partial(\lambda)]\\[\partial(\mu)]\end{pmatrix} = 0$. Es folgt $[z] = 0$ in $\widetilde{\mathrm{H}}_q(U_{[a,c]})$ und somit $z = \partial(\kappa)$ für ein geeignetes $\kappa \in \widetilde{\mathrm{S}}_{q+1}(U_{[a,c]}) = \mathrm{S}_{q+1}(U_{[a,c]})$. Dies zeigt die Hilfsaussage.

Nun zeigen wir die Aussage $A(r)$. Seien $q \geq 0$ eine natürliche Zahl und $z \in \widetilde{\mathrm{S}}_q(\mathbb{S}^n \setminus V^r) = \mathrm{S}_q(\mathbb{S}^n \setminus V^r)$ ein q-Zykel des Komplexes $\widetilde{\mathrm{S}}(\mathbb{S}^n \setminus V^r)$. Zu zeigen ist, dass z ein Rand ist.

Für jedes $t \in [0,1]$ ist das Bild von z in $\widetilde{\mathrm{S}}_q(U_{\{t\}})$ nach Induktionsannahme $A(r-1)$ ein Rand, es gibt also ein $w_t \in \widetilde{\mathrm{S}}_{q+1}(U_{\{t\}}) = \mathrm{S}_{q+1}(U_{\{t\}})$ mit $\partial(w_t) = z$. Da w_t eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination endlich vieler singulärer Simplizes τ ist, deren Bild $\operatorname{im}\tau$ kompakt und somit abgeschlossen in $U_{\{t\}}$ ist, gibt es mit dem naheliegenden Kompaktheitsargument bereits eine offene Umgebung B_t von t in $[0,1]$ mit $w_t \in \widetilde{\mathrm{S}}_{q+1}(U_{B_t})$ und $\partial(w_t) = z$ in $\widetilde{\mathrm{S}}_q(U_{B_t})$ (beide male könnte man äquivalent auch S statt $\widetilde{\mathrm{S}}$ schreiben; analoges gilt bis zum Ende dieses Beweises).

Da bereits endlich viele der offenen Mengen B_t das kompakte Intervall $[0,1]$ überdecken, gibt es endlich viele reelle Zahlen $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$, so dass für alle $i = 1, \ldots, m$ ein $w_i \in \widetilde{\mathrm{S}}_{q+1}(U_{[s_{i-1},s_i]})$ mit $\partial(w_i) = z$ existiert. Die Hilfsaussage zeigt dann, dass es ein $w \in \widetilde{\mathrm{S}}_{q+1}(U_{[0,1]})$ mit $\partial(w) = z$ gibt. Also ist z wie gewünscht ein Rand. □

Ende der 20. Vorlesung am 15.01.2021.

Hausaufgaben:

(1)
- Aufgabe 4.14.13 (jede stetig Selbstabbildung der reell projektiven Ebene hat einen Fixpunkt)
- Aufgabe 4.14.14

(2) Aufgabe 4.14.15 (Vektorfelder ohne Nullstelle und Euler-Charakteristik)

(3) Aufgabe 4.15.8 (Grad der Antipodenabbildung aus Grad der Spiegelung)

(4) Aufgabe 5.1.8 (spaltbare kurze exakte Sequenzen)

Satz 5.2.5 (Reduzierte Homologie des Komplements einer Sphäre in einer Sphäre)**.** *Seien $r, n \geq -1$ und sei $\varphi\colon \mathbb{S}^r \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Injektion einer r-dimensionalen Sphäre in eine n-dimensionale Sphäre (welche automatisch eine abgeschlossene Einbettung ist, siehe* [Sch20, Satz 2.7.15]*). Dann lebt die reduzierte Homologie des Komplements ihres Bildes in der n-Sphäre nur im Grad $n-r-1$ und ist dort zu $\mathbb{Z}$ isomorph, in Formeln*

$$\widetilde{\mathrm{H}}\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big) \cong \mathbb{Z}[n-r-1]$$

oder ausführlich

$$\widetilde{\mathrm{H}}_q\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n-r-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[117] Auch wenn die Definition dies suggeriert, ist noch nicht klar, dass z ein Rand ist.

Insbesondere gilt $r \leq n$.

Beweis. Als injektive stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ist unsere Abbildung φ automatisch eine abgeschlossene Einbettung ([Sch20, Satz 2.7.15]).

Wir führen Induktion über $r \geq -1$. Im Fall $r = -1$ gilt $\mathbb{S}^r = \varnothing$ und somit ist $\widetilde{\mathrm{H}}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}[n-(-1)-1)] = \mathbb{Z}[n]$ zu zeigen, was wir schon in Beispiel 5.1.7 erledigt haben.

Gelte nun $r \geq 0$. Mit $\mathbb{S}^r$ ist dann auch $\mathbb{S}^n$ nicht-leer und somit gilt $n \geq 0$. Schreibe $\mathbb{S}^r = H_- \cup H_+$ als Vereinigung der beiden abgeschlossenen, wie folgt gegebenen Hemisphären H_- und H_+:

$$H_\pm = \{x \in \mathbb{S}^r \mid \pm x_{r+1} \geq 0\}.$$

Ihr Schnitt $H_- \cap H_+ = \mathbb{S}^{r-1} \times \{0\} \cong \mathbb{S}^{r-1}$ ist „der Äquator“.

Beachte, dass H_+ und H_- jeweils zur abgeschlossenen Kreisscheibe D^r und damit zu $[0,1]^r$ homöomorph sind. Deswegen verschwindet die reduzierte Homologie der beiden „Würfel-Komplemente“ $X_\pm := \mathbb{S}^n \setminus \varphi(H_\pm)$ nach Proposition 5.2.3 (und wegen $r, n \geq 0$).

In der reduzierten Mayer-Vietoris-Sequenz 5.1.12 zur offenen Überdeckung

$$X_+ \cup X_- = \mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{r-1}),$$

wobei man $X_+ \cap X_- = \mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ beachte, sind deshalb alle Verbindungsmorphismen Isomorphismen

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{r-1})) \xrightarrow[\sim]{\delta_{q+1}} \widetilde{\mathrm{H}}_q(\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$$

wobei $q \in \mathbb{Z}$ beliebig ist. Die linke Seite ist per Induktionsannahme nur für $q+1 = n-(r-1)-1 = n-r$ von Null verschieden; in diesem Fall ist sie isomorp zu $\mathbb{Z}$. Dasselbe gilt dann wie gewünscht für die rechte Seite.

Falls $r > n$ gelten würde, so wäre $\widetilde{\mathrm{H}}\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big) \cong \mathbb{Z}[n-r-1]$ im Grad $n-r-1 < -1$ konzentriert, was der Tatsache widerspricht, dass reduzierte Homologie in Graden < -1 stets verschwindet. □

Satz 5.2.6 (Satz von Jordan-Brouwer)**.** *Seien $r, n \geq -1$ und sei $\varphi\colon \mathbb{S}^r \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Injektion einer r-dimensionalen Sphäre in eine n-dimensionale Sphäre (welche automatisch eine abgeschlossene Einbettung ist, siehe* [Sch20, Satz 2.7.15]*). Dann folgt $r \leq n$ und es gelten*

- $r = n \implies$ *φ ist ein Homöomorphismus;*
- $r = n-1 \implies$ *$\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten, die jeweils $\varphi(\mathbb{S}^r)$ als Rand haben (und die auch die Wegzusammenhangskomponenten sind und die beide offen und abgeschlossen in $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ sind);*
- $r \leq n-2 \implies$ *$\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ ist wegzusammenhängend*[118].

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass $\varphi(\mathbb{S}^r)$ als kompakte Teilmenge des Hausdorffraums $\mathbb{S}^n$ abgeschlossen ist. Somit ist $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ eine topologische Mannigfaltigkeit (als offene Teilmenge einer solchen). Die Menge ihrer Wegzusammenhangskomponenten stimmt folglich mit der Menge ihrer Zusammenhangskomponenten überein, und überdies sind alle (Weg-)Zusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen, siehe [Sch20, Lemma 2.6.17].

Wir haben bereits in Satz 5.2.5 gesehen, dass $r \leq n$ gilt. Dieser Satz liefert

$$\widetilde{\mathrm{H}}\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big) \cong \mathbb{Z}[n-r-1].$$

Im Fall $r = n$ ist also $\widetilde{\mathrm{H}}\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big)$ im Grad $n-r-1 = -1$ konzentriert. Nur die leere Menge hat aber reduzierte Homologie in Grad -1. Es folgt $\mathbb{S}^n = \varphi(\mathbb{S}^r)$. Als bijektive stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ist φ automatisch ein Homöomorphismus ([Sch20, Satz 2.7.15]).

Im Fall $r \leq n-2$ ist $\widetilde{\mathrm{H}}\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big)$ im Grad $n-r-1 \geq 1$ konzentriert und insbesondere gilt $\widetilde{\mathrm{H}}_0\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big) = 0$. Also ist $\mathrm{H}_0\Big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi\big(\mathbb{S}^r\big)\Big)$ nach Lemma 5.1.5 isomorph zu $\mathbb{Z}$; andererseits ist es nach Lemma 3.1.24 eine freie abelsche Gruppe über der Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von

[118] und dann natürlich auch zusammenhängend, siehe [Sch20, Satz 2.6.10]

X. Aus $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\pi_0(X) = \bigoplus_{W \in \pi_0(X)} \mathbb{Z}$ folgt aber zunächst $\pi_0(X) < \infty$ und dann $|\pi_0(X)| = 1$[119], d. h. X ist wegzusammenhängend.

Im Fall $r = n-1$ lebt $\widetilde{\mathrm{H}}\big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)\big)$ nur im Grad $n-r-1 = 0$ und ist dort isomorph zu $\mathbb{Z}$. Folglich gilt $\mathrm{H}_0\big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)\big) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nach Lemma 5.1.5. Andererseits gilt wie oben $\mathrm{H}_0\big(\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)\big) \cong \mathbb{Z}\pi_0(X)$ und nach Fußnote 119 folgt $|\pi_0(X)| = 2$. Also hat $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ zwei (Weg)zusammenhangskomponenten. Beide sind offen in der offenen Teilmenge $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ von $\mathbb{S}^n$ und somit selbst offen in $\mathbb{S}^n$. Der Rand einer solchen Komponente K ist somit $\partial K = \overline{K} \setminus K^\circ = \overline{K} \setminus K$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass jeder Punkt $x \in \varphi(\mathbb{S}^r)$ im Abschluss jeder Komponente liegt. Sei $U \subseteq \mathbb{S}^n$ eine beliebige offene Umgebung von x. Zu zeigen ist, dass sie beide Komponenten trifft. Sicherlich gibt es eine Teilmenge $A \subset \varphi(\mathbb{S}^r)$ mit $x \in A$, $\overline{A} \subset U$ und $\varphi(\mathbb{S}^r) \setminus A = \varphi(\mathbb{S}^{n-1}) \setminus A \cong D^{n-1} \cong [0,1]^{n-1}$; man kann als A für genügend kleines ε etwa einen offenen ε-Ball um x in $\mathbb{S}^r = \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\varphi}{\sim} \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$ nehmen. Setze $B := \varphi(\mathbb{S}^{n-1}) \setminus A$. Als „Disk-Komplement“/„Würfel-Komplement“ ist dann $\mathbb{S}^n \setminus B$ wegzusammenhängend (da seine nullte reduzierte Homologie nach 5.2.4/Proposition 5.2.3 verschwindet und somit seine nullte Homologie isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, was wie oben den Wegzusammenhang liefert). Wegen $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r) \subset \mathbb{S}^n \setminus B$ enthält $\mathbb{S}^n \setminus B$ zwei Punkte aus den beiden verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$, die wir durch einen Weg γ in $\mathbb{S}^n \setminus B$ miteinander verbinden können. Dieser Weg muss A treffen (denn sonst würde es sich um einen Weg in $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^r)$ handeln). Seien $s \leq t$ in $[0,1]$ so gewählt, dass $\gamma(s)$ der erste und $\gamma(t)$ der letzte Punkt von γ in $\overline{A}$ ist (d. h. s bzw. t ist das kleinste bzw. größte Element der abgeschlossenen Teilmenge $\gamma^{-1}(\overline{A}) \subset [0,1]$). Wegen $\overline{A} \subset \varphi(\mathbb{S}^r) = \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$ gilt $0 < s \leq t < 1$. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ liegen dann aber $\gamma(s-\varepsilon)$ und $\gamma(t+\varepsilon)$ in U, aber in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$. Also trifft U beide Wegzusammenhangskomponenten. □

Korollar 5.2.7. *Sei $n \geq 2$ und sei $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die zur $(n-1)$-Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ homöomorph ist, es gibt also einen Homöomorphismus $\mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$. Dann hat ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, deren jede S^{n-1} als Rand hat (und die auch die Wegzusammenhangskomponenten sind und die auch offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ sind).*

5.2.8. Im Fall $S^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}$ ist dies trivial.

Beweis. Fasse $\mathbb{R}^n$ als das Komplement eines Punktes p in $\mathbb{S}^n$ auf (etwa per stereographischer Projektion). Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Jordan-Brouwer 5.2.6: Ist K die Komponente des Punktes p in $\mathbb{S}^n \setminus S^{n-1}$ und L die andere Komponente, so enthält K einen kleinen ε-Ball um p; man folgert sofort, dass dann $K \setminus \{p\}$ und L die beiden Komponenten von $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ sind und die behaupteten Eigenschaften haben. □

5.2.9. Der Spezialfall von Korollar 5.2.7 für $n = 2$ heißt der **Jordanscher Kurvensatz**, vgl. [Wik20, Jordanscher Kurvensatz]. Der Satz von Schoenflies [Wik20, Satz von Schoenflies] verbessert den Jordanschen Kurvensatz (in [Wik20, Schoenflies problem] wird mit Hilfe von Alexanders gehörnter Sphäre [Wik20, Alexander horned sphere] angedeutet, dass die entsprechende Aussage in Dimension $n = 3$ nicht mehr stimmt).

Eine Verallgemeinerung von Korollar 5.2.7 (nun für beliebiges n) ist [Wik20, Jordan-Brouwer-Zerlegungssatz].

Hier noch ein weiterer netter Link: [Wik20, Seen des Wada].

Korollar 5.2.10 (Plattdrücken einer Kugelschale ist nie injektiv)**.** *Für $n \geq 0$ gibt es keine injektive stetige Abbildung $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.*[120]

Beweis. Per stereographischer Projektion is $\mathbb{R}^n$ homöomorph zum Komplement eines Punktes p in $\mathbb{S}^n$. Ist nun $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig, so ist die Verknüpfung $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ injektiv und stetig, aber nicht surjektiv, was dem Satz von Jordan-Brouwer 5.2.6 widerspricht. □

[119] Denn aus $\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n$ als abelsche Gruppen folgt $m = n$, was wir hier eigentlich nur für $n = 1$ benötigen, wo es eh offensichtlich ist. Gleich benötigen wir dies aber auch für $n = 2$.

[120] Dieses Resultat ist ein einfaches Korollar des Satzes von Borsuk-Ulam [Wik20, Satz von Borsuk-Ulam]. Wir haben diesen im zweidimensionalen Fall bewiesen, siehe „Plattdrücken einer Kugelschale ist nie injektiv“ [Sch20, Korollar 3.4.27].

Korollar 5.2.11 (Vgl. Aufgabe 4.7.12.(d)). *In jeder Triangulierung einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit kommen nur Simplizes der Dimension $\leq m$ vor: Sei $f\colon \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} M$ eine Triangulierung einer m-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit M. Dann gilt $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\leq m}$.*

Beweis. Sei sonst $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$ ein $(m+1)$-Simplex (denn jeder Simplex der Dimension $> m$ enthält einen Simplex der Dimension $m+1$). Sei $p \in \Delta(\sigma)$ der Schwerpunkt und sei $U \subseteq M$ eine offene, zu $\mathbb{R}^m$ homöomorphe offene Umgebung von $f(p)$ in M. Die offene Umgebung $\Delta(\sigma) \cap f^{-1}(U)$ von p im vollen $(m+1)$-Simplex $\Delta(\sigma)$ enthält sicherlich eine zu $\mathbb{S}^m$ homöomorphe Teilmenge S. Insgesamt haben wir Homöomorphismen und injektive stetige Abbildungen

$$\mathbb{S}^m \cong S \hookrightarrow \Delta(\sigma) \cap f^{-1}(U) \xhookrightarrow{f} U \cong \mathbb{R}^m.$$

Dies liefert eine injektive stetige Abbildung $\mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, was Korollar 5.2.10 widerspricht.[121] □

Korollar 5.2.12 (Invarianz von Gebieten). *Sei $n \geq 0$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, so ist jede stetige injektive Abbildung $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ offen.*

Insbesondere gelten:

- *Ist $U \xrightarrow{\sim} V$ ein Homöomorphismus zwischen zwei Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$, deren eine offen in $\mathbb{R}^n$ ist, so ist auch die andere offen in $\mathbb{R}^n$.*

  Da in der Funktionentheorie offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ klassisch als Gebiete bezeichnet werden, erklärt dies den Namen des Satzes.
- *Jede stetige Injektion $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist offen.*
- *Jede stetige Injektion $M \hookrightarrow N$ zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten derselben Dimension ist offen.*

Beweis. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Beachte:

- Die Mengen der Form $B_\varepsilon(x)$, für alle $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset U$, bilden eine Basis der Topologie von U.
- Fassen wir $\mathbb{R}^n$ per stereographische Projektion als offene Teilmenge von $\mathbb{S}^n$ auf, so ist f genau dann offen, wenn die Verknüpfung

  $$U \xhookrightarrow{f} \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{S}^n$$

  offen ist.

Es genügt deswegen zu zeigen, dass für jede stetige injektive Abbildung $\varphi\colon D^n \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ die Menge $\varphi(B_1(0))$ offen in $\mathbb{S}^n$ ist; beachte $D^n = B_1(0) \sqcup \mathbb{S}^{n-1}$ als Mengen. Wer mag, kann im Folgenden $n \geq 1$ annehmen, da der Fall $n = 0$ eh trivial ist.

Nach dem Satz von Jordan-Brouwer 5.2.6 hat $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$ genau zwei darin offene (und abgeschlossene) Wegzusammenhangskomponenten W_1 und W_2, es gilt also

$$\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1}) = W_1 \sqcup W_2 \tag{5.2.1}$$

(als Mengen und als topologische Räume). Beachte, dass W_1 und W_2 auch offen in $\mathbb{S}^n$ sind. Andererseits gilt offensichtlich

$$\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1}) = (\mathbb{S}^n \setminus \varphi(D^n)) \sqcup \varphi(B_1(0)). \tag{5.2.2}$$

Da die reduzierte Homologie des Komplements einer Disk in einer Sphäre verschwindet (Variante 5.2.4 von Proposition 5.2.3), ist die Teilmenge $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(D^n) \subset \mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$ wegzusammenhängend und muss deswegen in einer der beiden Wegzusammenhangskomponenten W_1, W_2 von $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$ liegen. Gelte ohne Einschränkung

$$\mathbb{S}^n \setminus \varphi(D^n) \subset W_1. \tag{5.2.3}$$

Offensichtlich ist die Teilmenge $\varphi(B_1(0)) \subset \mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$ wegzusammenhängend und muss deswegen ebenfalls in einer der beiden Wegzusammenhangskomponenten W_1, W_2 von $\mathbb{S}^n \setminus \varphi(\mathbb{S}^{n-1})$ liegen, genauer muss

$$\varphi(B_1(0)) \subset W_2 \tag{5.2.4}$$

[121] Wer nur an dem Resultat für Flächen interessiert ist, also dem Fall $m = 2$, kann sich mit [Sch20, Korollar 3.4.27] begnügen.

gelten, denn der andere Fall $\varphi(B_1(0)) \subset W_1$ führt mit der Inklusion (5.2.3) und den beiden Gleichheiten (5.2.1) und (5.2.2) sofort zum Widerspruch $W_2 = \varnothing$ (Wegzusammenhangskomponenten sind aber nie leer).

Diese beiden Gleichheiten zeigen nun sofort, dass die Inklusionen (5.2.4) und (5.2.3) Gleichheiten sein müssen. Also ist $\varphi(B_1(0)) = W_2 \subsetneq \mathbb{S}^n$ eine offene Teilmenge.

Die „Insbesondere-Aussagen“ sind nun alle offensichtlich (nur die dritte ist vielleicht nicht ganz so offensichtlich und deswegen als Aufgabe 5.2.13 gestellt). □

Aufgabe 5.2.13. Zeige die dritte „Insbesondere-Aussage“ aus Korollar 5.2.12: Jede stetige Injektion $M \hookrightarrow N$ zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten derselben Dimension ist offen.

Korollar 5.2.14. *Seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten derselben Dimension. Sei M kompakt und nicht-leer und sei N zusammenhängend. Dann ist jede injektive stetige Abbildung $M \hookrightarrow N$ ein Homöomorphismus.*

Insbesondere gilt die folgende Verallgemeinerung von Korollar 5.2.10: (Unmöglichkeit des injektiven Plattdrückens kompakter nicht-leerer in nicht-kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten derselben Dimension): Ist N nicht-kompakt, so gibt es keine injektive stetige Abbildung $M \hookrightarrow N$.

Beweis. Sei $f\colon M \hookrightarrow N$ injektiv und stetig. Dann ist f nach [Sch20, Satz 2.7.15] eine abgeschlossene Einbettung. Nach Korollar 5.2.12 ist f eine offene Abbildung. Also ist ihr nicht-leeres Bild $f(M)$ offen und abgeschlossen in N. Da N zusammenhängend ist, ist f surjektiv (sonst wäre $N = f(M) \cup (N \setminus f(M))$ eine disjunkte Zerlegung in zwei nicht-leere, offene Teilmengen), also ein Homöomorphismus. □

Beispiele 5.2.15. Die „Insbesondere-Aussage“ von Korollar 5.2.14 zeigt:

(a) Keine der (kompakten, zusammenhängenden) Flächen aus 4.6.2 kann injektiv stetig nach $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden.
(b) Für $n \geq 1$ gibt es keine injektive stetige Abbildung $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, wie wir bereits in Korollar 5.2.10 bewiesen haben (diese Aussage gilt natürlich auch für $n = 0$, jedoch ist $\mathbb{R}^0$ kompakt).
(c) Für $n \geq 1$ gibt es keine injektive stetige Abbildung $\mathbb{P}^n\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ des n-dimensionalen reell projektiven Raumes $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$.
(d) Für $n \geq 1$ gibt es keine injektive stetige Abbildung $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ des (komplex n-dimensionalen) komplex projektiven Raumes $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}^n$ (alle Akteure sind topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n$).

Aufgabe 5.2.16. Ist X ein topologischer Raum, so ist seine **Suspension** oder **Einhängung** $\Sigma(X)$ der wie folgt als Quotient definierte topologische Raum[122]

$$\Sigma(X) := \frac{\{*_0\} \sqcup (X \times [0,1]) \sqcup \{*_1\}}{\sim},$$

wobei $\{*_0\}$ und $\{*_1\}$ einpunktige topologische Räume sind (mit $*_0 \neq *_1$) und die Äquivalenzrelation alle Punkte von $X \times \{0\}$ mit $*_0$ und alle Punkte von $X \times \{1\}$ mit $*_1$ identifiziert, vgl. [Wik20, Einhängung]. Konstruiere Isomorphismen

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{p+1}(\Sigma(X)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}_p(X) \tag{5.2.5}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Bonus: Diese (hoffentlich in der beabsichtigten Weise konstruierten) Isomorphismen sind natürlich in $X \in \mathrm{Top}$.

Hinweis: Zwei mögliche Lösungswege:

(a) Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie
(b) Der Quotientenraum

$$\mathrm{C}(X) := \frac{(X \times [0,1]) \sqcup \{*_1\}}{\sim}, \tag{5.2.6}$$

[122] Unsere Definition unterscheidet sich im Fall $X = \varnothing$ von der üblichen Definition $\Sigma(X) := \frac{X \times [0,1]}{\sim}$. Unsere Definition hat den Vorteil, dass (5.2.5) auch im Fall $X = \varnothing$ gilt.

wobei $\{*_1\}$ ein einpunktiger topologischer Raum ist und die Äquivalenzrelation $\sim$ alle Punkte von $X \times \{1\}$ mit $*_1$ identifiziert, heißt **Kegel über** X (englisch *cone*)[123], vgl. [Wik20, Kegel (Topologie)]. Betrachte die lange exakte Sequenz der reduzierten Homologie 5.1.9 zum Raumpaar $(\mathrm{C}(X), X \times \{0\})$ und verwende Aufgabe 4.7.13 samt 5.1.10.

Lösung auskommentiert.
Ende der 21. Vorlesung am 21.01.2021.

5.3. **Homologie endlicher Zellkomplexe.**

Definition 5.3.1. Der **Abbildungskegel** (englisch *mapping cone*) einer stetigen Abbildung $f\colon Z \to X$ ist der wie folgt als Quotient definierte topologische Raum[124]

$$\mathrm{C}(f) := \frac{X \sqcup (Z \times [0,1]) \sqcup \{*_1\}}{\sim},$$

wobei $\{*_1\}$ ein einpunktiger topologischer Raum ist[125] und die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$\begin{aligned} f(z) &\sim (z,0) && \text{und} \\ (z,1) &\sim *_1 && \text{für alle } z \in Z \end{aligned}$$

erzeugt ist, vgl. [Wik20, Abbildungskegel], wo aktuell die englische Version ein schöneres Bild enthält.

5.3.2. Der Leser überlege sich, dass einerseits jeder Punkt $x \in$ mit allen Punkten von $f^{-1}(x) \times \{0\}$ und andererseits $*_1$ mit allen Punkte von $Z \times \{1\}$ identifiziert werden.

5.3.3. Offensichtlich ist $\{*_1\} \hookrightarrow \mathrm{C}(f)$ eine abgeschlossene Einbettung und $Z \times (0,1) \hookrightarrow \mathrm{C}(f)$ ist eine offene Einbettung.

Lemma 5.3.4. *Die offensichtliche Abbildung ist eine abgeschlossene Einbettung* $i_X\colon X \hookrightarrow \mathrm{C}(f)$.

Beweis. Sicherlich ist i_X injektiv und stetig. Sei $\pi\colon X \sqcup (Z \times [0,1]) \sqcup \{*_1\} \twoheadrightarrow \mathrm{C}(f)$ die kanonische Abbildung. Weil $\pi^{-1}(i_X(X)) = X \sqcup (Z \times \{0\}) \sqcup \varnothing$ abgeschlossen in $X \sqcup (Z \times [0,1]) \sqcup \{*_1\}$ ist, ist $i_X(X)$ abgeschlossen in $\mathrm{C}(f)$. Sei nun $U \subsetneq X$ offen. Die offene Teilmenge $W := U \sqcup (f^{-1}(U) \times [0, \frac{1}{2})) \sqcup \varnothing$ von $X \sqcup (Z \times [0,1]) \sqcup \{*_1\}$ erfüllt $\pi^{-1}(\pi(W)) = W$. Somit ist $\pi(W)$ offen in $\mathrm{C}(f)$. Wegen $i_X(U) = i_X(X) \cap \pi(W)$ ist $i_X(U)$ offen in $i_X(X)$. Dies zeigt, dass i_X ein Homöomorphismus auf sein abgeschlossenes Bild $i_X(X)$ ist. □

5.3.5. Der in (5.2.6) definierte Kegel von Z ist der Abbildungskegel der Identität $\mathrm{id}_Z\colon Z \to Z$, in Formeln $\mathrm{C}(Z) = \mathrm{C}(\mathrm{id}_Z)$ (genauer handelt es sich um einen kanonischen Isomorphismus). Die abgeschlossene Einbettung $i_Z\colon Z \hookrightarrow \mathrm{C}(Z)$ ist die Einbettung $z \mapsto (z,0)$ von Z in die „Basis des Kegels $\mathrm{C}(Z)$“.

5.3.6 (Für die Hörer der Vorlesung [Sch20])**.** Ist $f\colon Z \to X$ stetig, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle i_Z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_X} \\ \mathrm{C}(Z) & \xrightarrow{\mathrm{can}} & \mathrm{C}(f) \end{array}$$

offensichtlich kokartesisch; mit anderen Worten ist $\mathrm{C}(f)$ der Pushout von i_Z und f.

---

[123] Unsere Definition unterscheidet sich im Fall $X = \varnothing$ von der üblichen Definition $\mathrm{C}(X) := \frac{X \times [0,1]}{X \times \{1\}}$ als Einpunktidentifizierung.

[124] Unsere Definition unterscheidet sich im Fall $Z = \varnothing$ von der üblichen Definition $\Sigma(X) := \frac{X \sqcup (Z \times [0,1])}{f(z) \sim (z,0) \quad \forall z \in Z; \quad (z,1) = (z',1) \quad \forall z,z' \in Z}$.
Unsere Definition hat den beispielsweise Vorteil, dass in Beispiel 5.3.9 im Fall $n = 0$ ein neuer Punkt entsteht. Auch im Beweis der langen exakten Abbildungskegelsequenz 5.3.10 ist unsere Definition vorteilhaft.

[125] Dabei ist implizit mitverstanden, dass $*_1$ ein „neuer Punkt“ ist.

Im Fall $Z = \mathbb{S}^{n-1}$ ist der Kegel $\mathrm{C}(Z)$ in offensichtlicher Weise zu D^n homöomorph[126]. Das obige Diagramm wird so zu einem kokartesischen Diagramm

(5.3.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \cap \downarrow & & \downarrow i_X \\ D^n & \longrightarrow & \mathrm{C}(f). \end{array}$$

Dies bedeutet, dass i_X die Hinzufügung einer n-Zelle bzw. dass $\mathrm{C}(f)$ aus X durch Hinzufügen einer n-Zelle „entlang f“ entsteht im Sinne von [Sch20, Definition 2.8.63] und zeigt, dass die soeben zitierte Definition mit der folgenden Definition 5.3.7 kompatibel ist.

Definition 5.3.7. Seien $n \geq 0$ und $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung. Dann sagt man, dass $\mathrm{C}(f)$ aus X durch **Ankleben einer n-Zelle vermittels** f entsteht.

Im Fall $f\colon Z \to X$ mit beliebigem Z mag man analog sagen, dass $\mathrm{C}(f)$ aus X durch Ankleben des (offenen) Kegels über Z entsteht.

5.3.8. Die Terminologie kommt daher, dass die offensichtliche Abbildung ein Homöomorphismus

$$\frac{\mathbb{S}^{n-1} \times (0,1]}{\mathbb{S}^{n-1} \times \{1\}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}(f) \setminus i_X(X)$$

ist und der Definitionsbereich als „offener Kegel über der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$“ in offensichtlicher Weise zur n-Zelle $B_1(0)$ homöomorph ist (vgl. Fußnote 126). Die Abbildung $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to X$ kodiert, wie der Rand $\mathbb{S}^{n-1}$ dieser n-Zelle an X angeklebt wird.

Beispiele 5.3.9. Sei $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to X$ stetig für $n \geq 0$.

- Im Fall $n = 0$ ist $\mathrm{C}(f)$ die disjunkte Vereinigung $X \sqcup \{*_1\}$ mit einem (neuen) Punkt bzw. genauer einem einpunktigen Raum.
- Im Fall $n = 1$ entsteht $\mathrm{C}(f)$ aus X durch Ankleben einer Kante $[-1, 1]$, wobei -1 mit $f(-1)$ und 1 mit $f(1)$ identifiziert wird.
- Im Fall $n = 2$ entsteht $\mathrm{C}(f)$ aus X durch Ankleben einer Kreisscheibe längs ihres Randkreises in der durch f beschriebenen Weise.
- Undsoweiter.

Satz 5.3.10 (Lange exakte Abbildungskegelsequenz / lange exakte Anklebesequenz (letzteres besonders im Fall $Z = \mathbb{S}^n$))**.** *Sei $f\colon Z \to X$ eine stetige Abbildung. Sei $i_X\colon X \to K := \mathrm{C}(f)$ die offensichtliche abgeschlossene Einbettung in den Abbildungskegel (siehe Lemma 5.3.4). Dann gibt es eine lange exakte Sequenz*

(5.3.2)
$$\begin{array}{ccccc} & & \ldots & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{H}}_{q+1}(K) \\ & \curvearrowright & & & \\ \widetilde{\mathrm{H}}_q(Z) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_q(f)} & \widetilde{\mathrm{H}}_q(X) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_q(i_X)} & \widetilde{\mathrm{H}}_q(K) \\ & \curvearrowright & & & \\ & & \widetilde{\mathrm{H}}_{q-1}(Z) & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

in der reduzierten Homologie.

Beweis. Nach 5.3.3 und Lemma 5.3.4 können wir X und $\{*_1\}$ als abgeschlossene Teilmengen von K auffassen. Setze $U := K \setminus \{*_1\}$ und $V := K \setminus X$. Dann ist $K = U \cup V$ eine offene Überdeckung.

[126] Die Abbildung $\mathrm{C}(Z) \to D^n$, $[x, t] \mapsto (1-t)x$ ist offensichtlich stetig und bijektiv und dann sogar ein Homöomorphismus nach [Sch20, Satz 2.7.15], denn $\mathrm{C}(Z)$ ist quasi-kompakt als Quotient des Kompaktums $Z \times [0, 1]$.

Anschaulich ist klar, dass V zusammenziehbar ist, denn $\{*_1\} \hookrightarrow V$ ist ein Deformationsretrakt von V – genau argumentiert man wie folgt. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Big((Z \times (0,1]) \sqcup \{*_1\}\Big) \times [0,1] & \xrightarrow{H} & (Z \times (0,1]) \sqcup \{*_1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \times [0,1] & \xrightarrow{\exists! \overline{H}} & V. \end{array}$$

Seine obere Horizontale H ist die offensichtliche Deformationsretraktion auf $(Z \times \{1\}) \sqcup \{*_1\}$. Die rechte Vertikale ist final nach Lemma C.0.3, die linke ist somit final nach Proposition C.0.4. Also induziert H eindeutig die gestrichelte untere Horizontale $\overline{H}$, so dass das Diagramm kommutativ ist, und $\overline{H}$ ist stetig und genauer die gesuchte Deformationsretraktion auf $\{*_1\} \subset V$.

In der Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie zur offenen Überdeckung $K = U \cup V$ verschwinden also alle Summanden $\widetilde{\mathrm{H}}_q(V)$ und wir erhalten die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} & & \cdots & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{H}}_{q+1}(K) \\ \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{H}}_q(U \cap V) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_q(i_U)} & \widetilde{\mathrm{H}}_q(U) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_q(j_U)} \widetilde{\mathrm{H}}_q(K) \\ \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{H}}_{q-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_U} & U \\ {\scriptstyle z \mapsto \left(z, \frac{1}{2}\right)} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle i'_X} \\ Z & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

in dem i'_X die von $i_X \colon X \to K$ induzierte Abbildung notiert. Dieses Diagramm ist nicht kommutativ in der Kategorie Top topologischer Räume; es wird aber offensichtlich kommutativ in der Homotopiekategorie hTop topologischer Räume.

Die linke Vertikale ist sicherlich eine Homotopieäquivalenz, da $Z \times (0,1) \xrightarrow{\sim} U \cap V$ ein Homöomorphismus ist (vgl. 5.3.3). Die rechte Vertikale $i'_X \colon X \hookrightarrow U$ ist ebenfalls eine Homotopieäquivalenz: Ähnlich wie oben zeigt man mit Lemma C.0.3 und Proposition C.0.4, dass es sich sogar um die Inklusion eines Deformationsretrakts handelt.

Unser in hTop kommutatives Diagramm liefert somit wegen der Homotopie-Invarianz der reduzierten Homologie 5.1.11 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{H}}_q(U \cap V) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_q(i_U)} & \widetilde{\mathrm{H}}_q(U) \\ \uparrow \sim & & {\scriptstyle \widetilde{\mathrm{H}}_q(i'_X)} \uparrow \sim \\ \widetilde{\mathrm{H}}_q(Z) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_q(f)} & \widetilde{\mathrm{H}}_q(X) \end{array}$$

abelscher Gruppen, dessen Vertikalen Isomorphismen sind. Damit können wir in der obigen Mayer-Vietoris-Sequenz jeden Morphismus $\widetilde{\mathrm{H}}_q(i_U)$ durch den „isomorphen“ Morphismus $\widetilde{\mathrm{H}}_q(f)$ ersetzen, wobei natürlich alle Verbindungsmorphismen entsprechend zu modifieren ist und $\widetilde{\mathrm{H}}_q(j_U)$ durch $\widetilde{\mathrm{H}}_q(i_X)$ ersetzt wird. □

Beispiel 5.3.11 (Änderung der reduzierten Homologie beim Ankleben einer n-Zelle)**.** Im Fall $f \colon Z = \mathbb{S}^{n-1} \to X$, also beim Ankleben einer n-Zelle, lebt $\widetilde{\mathrm{H}}(Z) = \widetilde{\mathrm{H}}(\mathbb{S}^{n-1})$ wegen (5.1.1) nur im Grad $n-1$. Sei

wieder $K := \mathrm{C}(f)$. Somit ist der interessante Ausschnitt der exakten Sequenz (5.3.2) unter einer Identifizierung $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$ durch

(5.3.3)
$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_n(X) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_n(i_X)} \widetilde{\mathrm{H}}_n(K) \\ \quad \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(f)} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(X) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(i_X)} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(K) \\ \quad \longrightarrow 0 \end{array}$$

gegeben und „in allen anderen Zeilen“ ist

(5.3.4)
$$\widetilde{\mathrm{H}}_q(X) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}_q(i_X)} \widetilde{\mathrm{H}}_q(K) \quad \text{für alle } q \neq n-1, n$$

ein Isomorphismus. Erkläre mit Bild aus Soergel, Seite 86

- Ist $\widetilde{\mathrm{H}_{n-1}}(f)$ injektiv, so „füllt“ die angeklebte Zelle ein „$(n-1)$-Loch“, und $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(K)$ wird im Vergleich zu $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(X)$ entsprechend kleiner, während $\widetilde{\mathrm{H}}_n(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}_n(K)$ ein Isomorphismus ist.
- Ist $\widetilde{\mathrm{H}_{n-1}}(f)$ die Nullabbildung, so „kreiert“ die angeklebte Zelle ein „n-Loch“, und $\widetilde{\mathrm{H}}_n(K)$ wird im Vergleich zu $\widetilde{\mathrm{H}}_n(X)$ entsprechend größer während $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(K)$ ein Isomorphismus ist.
- Ist $\widetilde{\mathrm{H}_{n-1}}(f)$ weder injektiv noch Null, so ist der Kern dieser Abbildung immer noch isomorph zu $\mathbb{Z}$, so dass sich $\widetilde{\mathrm{H}}_n(K)$ wie im vorigen Punkt im Vergleich zu $\widetilde{\mathrm{H}}_n(X)$ vergrößert, also ein „n-Loch kreiert wird“. Nun schrumpft $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(K)$ im Vergleich zu $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(X)$ um das Bild von $\widetilde{\mathrm{H}_{n-1}}(f)$, welches zu einer endlich erzeugten zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorph ist (Anschauung?).

Aufgabe 5.3.12. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Berechne die singuläre Homologie des Abbildungskegels von $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$, wobei wir $\mathbb{S}^1$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Zeige, dass dieser Abbildungskegel im Fall $n = 2$ zur reell projektiven Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ homöomorph ist.

Aufgabe 5.3.13. Erkläre, wir man den 2-Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ bzw. genauer einen zum 2-Torus homöomorphen Raum ausgehend von der leeren Menge durch sukzessives Anheften endlich vieler Zellen konstruieren kann. Berechne die singuläre Homologie des 2-Torus mit Satz 5.3.10.

Bonus: Führe das analoge Verfahren für alle Flächen in Satz 4.6.3 durch (und beweise so diesen Satz erneut).

Korollar 5.3.14 (Endlichkeitsaussagen für die (reduzierte) singuläre Homologie endlicher Zellkomplexe)**.** *Sei X ein topologischer Raum, der aus der leeren Menge durch sukzessives Ankleben endlich vieler Zellen der Dimension $\leq d$ entsteht (ein solcher Raum bzw. jeder dazu homöomorphe heißt* ***endlicher Zellkomplex****), wobei $d \geq -1$. Dann sind alle Gruppen $\mathrm{H}_q(X)$ und $\widetilde{\mathrm{H}}_q(X)$ endlich erzeugbar und es gelten $\mathrm{H}_q(X) = 0$ und $\widetilde{\mathrm{H}}_q(X) = 0$ für alle $q > d$.*

Beweis. Ist $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen, so ist die Gruppe A in der Mitte genau dann endlich erzeugbar, wenn die beiden Gruppen A' und A'' am Rand endlich erzeugbar sind (siehe Lemma 4.8.17 für die schwierigere Implikation). Damit genügt es einerseits nach Lemma 5.1.5, die Aussage für die reduzierte Homologie zu zeigen. Andererseits folgt es für diese induktiv aus Beispiel 5.3.11 (welches Satz 5.3.10 illustriert): Für die leere Menge $X = \varnothing$ ist die Aussage klar. Gilt sie bereits für einen topologischen Raum X und sind f und $K = \mathrm{C}(f)$ wie im zitierten Beispiel, es wird also eine n-Zelle angeklebt, so spalte man die exakte Sequenz (5.3.3) in drei kurze exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{H}}_n(X) &\hookrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_n(K) \twoheadrightarrow \ker(\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(f)), \\ \ker(\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(f)) &\hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(f)), \\ \mathrm{im}(\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(f)) &\hookrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(X) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(K) \end{aligned}$$

auf und verwende außerdem die Isomorphismen (5.3.4). Also gilt die Aussage auch für $K = \mathrm{C}(f)$.

Man beachte, dass dabei wegen $n \leq d$ nur nicht-triviale reduzierte Homologiegruppen in Graden $\leq d$ entstehen können. □

Satz 5.3.15 (Homologie der komplex projektiven Räume)**.** *Für $n \geq 0$ ist die Homologie des (komplex n-dimensionalen, reell $2n$-dimensionalen) komplex projektiven Raums $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ wie folgt gegeben*[127]*:*

$$\mathrm{H}_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, 2, \ldots, 2n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Äquivalent gilt $\mathrm{H}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}[0] \oplus \mathbb{Z}[2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[2n]$.

Beweis. Wir haben in [Sch20, Beispiel 2.8.70] erklärt, dass $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ aus $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ durch Hinzufügen einer $2n$-Zelle ensteht: Eine mögliche (und wohl die naheliegendste) charakteristische Abbildung ist durch

$$\begin{aligned} \Phi\colon D^{2n} &\to \mathbb{P}^n\mathbb{C}, \\ x &\mapsto [x, \sqrt{1 - \|x\|^2}], \end{aligned}$$

gegeben. Beachte $\Phi(\mathbb{S}^{2n-1}) \subset \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ und notiere die somit durch Φ induzierte Abbildung als

$$f := \Phi|_{\mathbb{S}^{2n-1}}\colon \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}.$$

Wir haben dann im zitierten Beispiel erklärt, warum das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{2n-1} & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C} \\ \cap\downarrow & & \downarrow \\ D^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n\mathbb{C} \end{array}$$

kokartesisch ist. Der Vergleich mit dem kokartesischen Diagramm (5.3.1) aus 5.3.6 (und Eindeutigkeit solcher Diagramme/von Pushouts) liefert einen Isomorphismus

$$\mathbb{P}^n\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}(f).$$

Die gewünschte Behauptung über gewöhnliche Homologie ist äquivalent zur Behauptung $\widetilde{\mathrm{H}}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}[2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[2n] = \bigoplus_{t=1}^{n} \mathbb{Z}[2t]$ für reduzierte Homologie. Diese stimmt sicherlich für für $\mathbb{P}^0\mathbb{C} = \{*\}$, denn die reduzierte Homologie einpunktiger Räume verschwindet. Per Induktion folgt sie dann allgemein aus Beispiel (5.3.3). Man beachte, dass wir dabei stets geraddimensionale Zellen an Räume ankleben, die keine ungerade reduzierte Homologie haben, was (5.3.3) deutlich vereinfacht. □

5.3.16. „Derselbe“ Beweis zusammen mit Aufgabe 5.1.8 zeigt, dass die singuläre Homologie eines topologischen Raums X, der aus der leeren Menge durch sukzessives Ankleben endlich vieler Zellen gerader Dimension entsteht, wie folgt gegeben ist: Für ungerades q verschwindet $\mathrm{H}_q(X)$, und für gerades q ist $\mathrm{H}_q(X)$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang die Anzahl der angehefteten q-Zellen ist.

Satz 5.3.17 (Euler-Charakteristik von endlichen Zellkomplexen)**.** *Sei X ein topologischer Raum, der aus der leeren Menge durch sukzessives Ankleben endlich vieler Zellen entsteht. Sei c_q die Anzahl der angehefteten q-Zellen, für $q \in \mathbb{N}$. Sei k ein Körper. Dann gilt*

$$\chi(X; k) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q c_q. \tag{5.3.5}$$

für die Euler-Charakteristik von X bezüglich Koeffizienten in k (die nach dem Analogon von Satz 5.3.10 für Koeffizienten in k wohldefiniert ist). Beachte, dass die rechte Seite unabhängig von k ist.

Beweis. Zunächst gilt

$$\chi(X; k) = \chi\big(\mathrm{H}(X; k)\big) = 1 + \chi\big(\widetilde{\mathrm{H}}(X; k)\big)$$

nach Lemma 5.1.5 (in der offensichtlich ebenfalls gültigen Version für k statt $\mathbb{Z}$), falls $X \neq \varnothing$ gilt; im Fall $X = \varnothing$ gilt die Formel aber auch.

Wir zeigen (5.3.5) per Induktion. Die Formel stimmt sicherlich für die leere Menge, denn $\chi(\varnothing; k) = 0$.

[127] Sicherlich verschwindet die singuläre Homologie von $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{C} = \varnothing$ in allen Graden; die angegebene Formel kann man im Fall $n = -1$ wohlwollend auch so lesen.

Wir nehmen nun an, dass (5.3.5) für einen endlichen Zellkomplex X gilt, wobei die c_q wie in der Formulierung des Satzes definiert sind. Sei $f\colon Z := \mathbb{S}^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung, so dass also $K := \mathrm{C}(f)$ aus X durch Ankleben einer n-Zelle entsteht.

Da die lange exakte Sequenz (5.3.2) aus Satz 5.3.10 beschränkt ist und aus endlichdimensionalen Vektorräumen besteht, zeigt Lemma 4.9.13, dass die alternierende Summe über die Dimensionen der Terme dieser langen exakten Sequenz verschwindet, dass also

$$\chi\big(\widetilde{\mathrm{H}}(X)\big) = \chi\big(\widetilde{\mathrm{H}}(Z)\big) + \chi\big(\widetilde{\mathrm{H}}(K)\big) = (-1)^{n-1} + \chi\big(\widetilde{\mathrm{H}}(K)\big)$$

gilt, wobei wir erst in der zweiten Gleichheit $Z = \mathbb{S}^{n-1}$ verwenden. Wir folgern

$$\chi(K;k) = 1 + \chi\big(\widetilde{\mathrm{H}}(K)\big) = 1 + (-1)^n + \chi\big(\widetilde{\mathrm{H}}(X)\big) = \chi(X;k) + (-1)^n = (-1)^n + \sum_{q\in\mathbb{N}} (-1)^q c_q,$$

was (5.3.5) für K zeigt, wo wir ja eine weitere n-Zelle hinzugefügt haben. □

Ende der 22. Vorlesung am 22.01.2021.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 5.2.13: Jede stetige Injektion $M \hookrightarrow N$ zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten derselben Dimension ist offen.
(2) Aufgabe 5.2.16: Reduzierte Homologie der Suspension/Einhängung
(3) Aufgabe 5.3.12: Abbildungskegel von $z \mapsto z^n$ und $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$
(4) Aufgabe 5.3.13: Homologie des 2-Torus durch Ankleben von Zellen

6. Tensorprodukt und universelle Koeffiziententheoreme

6.1. **Vorbemerkungen.**

6.1.1. Wir nehmen an, dass der Leser grundlegende Kenntnisse über Moduln hat und beispielsweise weiß, was Rechts- und Linksmoduln, freie Moduln, Untermoduln und Quotienten sind.

6.1.2. Wir fixieren einen (assoziativen, unitären) Ring R, der nicht notwendig kommutativ ist. Der wichtigste Fall im Rahmen dieser Vorlesung ist nichtsdestotrotz der des kommutativen Ringes $R = \mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

6.1.3. Bisher haben wir die Kategorie der Links-R-Moduln als $\mathrm{Mod}(R)$ bezeichnet. In diesem Kapitel verwenden wir für diese Kategorie die Bezeichnung R-Mod. Die Kategorie der Rechts-R-Moduln wird als Mod-R notiert. Da R nicht als kommutativ angenommen ist, muss man zwischen den Kategorien R-Mod und Mod-R unterscheiden. Für die Morphismenmengen dieser Kategorien verwenden wir die folgende Notation: Gegeben $M, N \in R$-Mod schreiben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M,N) &:= (R\text{-Mod})(M,N)\\ &= \{f\colon M \to N \text{ Gruppenmorphismus} \mid f(rm) = rf(m) \text{ für alle } r \in R \text{ und } m \in M\}\end{aligned}$$

für die Menge der R-linkslinearen Abbildungen. Diese Menge ist per $(f+f')(m) := f(m) + f'(m)$ eine abelsche Gruppe (= ein $\mathbb{Z}$-Modul) und Komposition von Morphismen ist biadditiv: $(f+f')\circ g = f\circ g + f'\circ g$ und $f \circ (g+g') = f\circ g + f\circ g'$.[128] Dies ist aus der linearen Algebra für Moduln über einem Körper k (= k-Vektorräume) wohlbekannt: Betrachtet man nur Vektorräume der Form k^m und beschreibt lineare Abbildungen zwischen diesen als Matrizen, so ist Verknüpfung alias Matrixmultiplikation biadditiv (und sogar k-bilinear).

Gegeben $M, N \in$ Mod-R schreiben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{-R}(M,N) &:= (\text{Mod-}R)(M,N)\\ &= \{f\colon M \to N \text{ Gruppenmorphismus} \mid f(mr) = f(m)r \text{ für alle } r \in R \text{ und } m \in M\}.\end{aligned}$$

für die Menge der R-rechtslinearen Abbildungen, die ebenfalls in offensichtlicher Weise eine abelsche Gruppe ist.

Selten werden wir es auch mit Bimoduln zu tun haben. Sei S ein weiterer Ring. Ein S-R-Bimodul M ist eine abelsche Gruppe, die sowohl eine S-Linksmodulstruktur trägt als auch eine R-Rechtsmodulstruktur, so

[128] In abstrakter Terminologie sagt man, dass die Kategorie R-Mod eine **$\mathbb{Z}$-lineare Kategorie** ist oder dass sie **angereichert in abelschen Gruppen/$\mathbb{Z}$-Moduln** ist. Ist R kommutativ, so ist R-Mod sogar eine R-lineare Kategorie.

dass die beiden Skalarmultiplikationen kommutieren: Für alle $s \in S$, $r \in R$ und $m \in M$ gilt $(s.m).r = s.(m.r)$. Die Kategorie der S-R-Bimoduln wird als S-Mod-R notiert, ihre Morphismenmengen sind abelsche Gruppen und werden als

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{R-S}(M,N) &:= (R\text{-Mod-}S)(M,N)\\ &= \{f\colon M \to N \text{ Gruppenmorphismus} \mid f(rms) = rf(m)s \text{ für alle } r \in R,\ s \in S \text{ und } m \in M\}\end{aligned}$$

notiert.

6.2. **Tensorprodukt von Moduln.**

Definition 6.2.1. Gegeben ein Rechtsmodul $M \in \text{Mod-}R$, ein Linksmodul $N \in R\text{-Mod}$ und eine abelsche Gruppe A heißt eine Abbildung

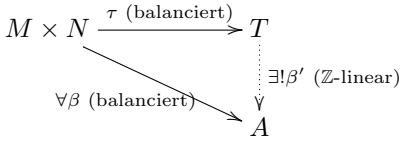
$$\beta\colon M \times N \to A$$

von Mengen **R-balanciert**, falls die Gleichheiten

$$\begin{aligned}\beta(mr,n) &= \beta(m,rn) && \text{für alle } r \in R,\ m \in M \text{ und } n \in N,\\ \beta(m+m',n) &= \beta(m,n)+\beta(m',n) && \text{für alle } m,m' \in M \text{ und } n \in N,\\ \beta(m,n+n') &= \beta(m,n)+\beta(m,n') && \text{für alle } m \in M \text{ und } n,n' \in N\end{aligned}$$

gelten. Die Menge aller R-balancierten Abbildungen $M \times N \to A$ wird als $\mathrm{Bal}_R(M \times N, A)$ notiert. Sie ist in offensichtlicher Weise eine abelsche Gruppe.

Definition 6.2.2. Seien $M \in \text{Mod-}R$ ein Rechtsmodul und $N \in R\text{-Mod}$ ein Linksmodul. Ein **Tensorprodukt von M und N über R** ist ein Paar (T,τ) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einer R-balancierten Abbildung $\tau\colon M \times N \to T$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Für jede abelsche Gruppe A und jede R-balancierte Abbildung $\beta\colon M \times N \to A$ gibt es genau einen Gruppenmorphismus $\beta'\colon T \to P$ mit $\beta' \circ \tau = \beta$.



6.2.3. Dies bedeutet äquivalent, dass für alle abelschen Gruppen A die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T,A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Bal}_R(M \times N, A),\\ \beta' &\mapsto \beta' \circ \tau,\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

bijektiv ist.

6.2.4 (Eindeutigkeit des Tensorprodukts bis auf eindeutigen Isomorphismus)**.** Wie bei durch universelle Eigenschaften definierten Objekten üblich, sind je zwei Tensorprodukte von M und N eindeutig isomorph: Sind (T,τ) und (T',τ') zwei Tensorprodukte von M und N, so gibt es genau einen Isomorphismus $a\colon T \xrightarrow{\sim} T'$ von R-Moduln mit $a \circ \tau = \tau'$ (der Leser beweise dies!). Wir dürfen deshalb den bestimmten Artikel verwenden und von *dem* Tensorprodukt zweier Moduln sprechen.

Beispiele 6.2.5. Es ist eine gute Übung, die folgenden Aussagen von Hand zu begründen (später mag man sie mit Proposition 6.2.17 erklären).

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to T &:= \mathbb{Z},\\ (n,m) &\mapsto nm,\end{aligned}$$

ist ein Tensorprodukt von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$.

(b) Sei $m \neq 0$ eine ganze Zahl. Dann ist die Nullabbildung

$$\tau := 0\colon \mathbb{Q} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \to T := \{0\}$$

ein Tensorprodukt von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$.

(c) Die Nullabbildung $\tau = 0\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to T := \{0\}$ ist ein Tensorprodukt von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$.

(d) Die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} &\to T := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\\ ([n]_4, [m]_8) &\mapsto [nm]_4,\end{aligned}$$

ist ein Tensorprodukt von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$ (und auch über $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$).

(e) Ist M oder N der Nullmodul, so ist das Tensorprodukt von M und N der Nullmodul (mitsamt der Nullabbildung $0\colon M \times N \to \{0\}$).

Proposition 6.2.6 (Existenz des Tensorprodukts)**.** *Jedes Paar (M, N) bestehend aus einem Rechtsmodul $M \in \text{Mod-}R$ und einem Linksmodul $N \in R\text{-Mod}$ besitzt ein Tensorprodukt über R.*

Beweis. Betrachte die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}(M \times N) = \bigoplus_{(m,n)\in M\times N} \mathbb{Z}$ über der Menge $M \times N$. Sie hat als $\mathbb{Z}$-Basis die Familie $(m,n)_{(m,n)\in M\times N}$. Sei $U \subset \mathbb{Z}(M \times N)$ die Untergruppe, die von den folgenden Elementen erzeugt wird:

$$\begin{aligned}(mr, n) - (m, rn), &\qquad \text{für alle } r \in R,\ m \in M \text{ und } n \in N,\\ (m + m', n) - (m, n) - (m', n), &\qquad \text{für alle } m, m' \in M \text{ und } n \in N,\\ (m, n + n') - (m, n) - (m, n'), &\qquad \text{für alle } m \in M \text{ und } n, n' \in N.\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Betrachte die abelsche Gruppe

$$T := \frac{\mathbb{Z}(M \times N)}{U} = \frac{\bigoplus_{M\times N} \mathbb{Z}}{U}$$

und sei τ die Verknüpfung $M \times N \hookrightarrow \mathbb{Z}(M \times N) \xrightarrow{\text{can}} T$, also die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau\colon M \times N &\to T,\\ (m, n) &\mapsto \overline{(m, n)} = \text{can}(m, n) = (m, n) + U,\end{aligned}$$

von Mengen. Dann ist τ nach Definition von T R-balanciert:

$$\begin{aligned}\tau(mr, n) &= (mr, n) + U = (m, rn) + U = \tau(m, rn),\\ \tau(m + m', n) &= (m + m', n) + U = \Big((m, n) + (m', n)\Big) + U = \Big((m, n) + U\Big) + \Big((m', n) + U\Big) = \tau(m, n) + \tau(m', n),\\ \tau(m, n + n') &= (m, n + n') + U = \Big((m, n) + (m, n')\Big) + U = \Big((m, n) + U\Big) + \Big((m, n') + U\Big) = \tau(m, n) + \tau(m, n').\end{aligned}$$

Zum Beweis der universellen Eigenschaft seien eine abelsche Gruppe A und eine R-balancierte Abbildung $\beta\colon M \times N \to A$ beliebig gegeben. Die Abbildung β von Mengen liefert (nach der universellen Eigenschaft (2.4.1) des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}(M \times N)$) genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\widehat{\beta}\colon \mathbb{Z}(M \times N) \to A$$

mit $\widehat{\beta}(m, n) = \beta(m, n)$ (nämlich die $\mathbb{Z}$-lineare Ausdehnung). Da β balanciert ist, gilt $\widehat{\beta}(U) = 0$. Also faktorisiert $\widehat{\beta}$ eindeutig zu einer $\mathbb{Z}$-linearen Abbildung $\beta'\colon T \to A$ mit $\beta' \circ \text{can} = \widehat{\beta}$. Wir erhalten

$$\beta'(\tau(m, n)) = \beta'(\text{can}(m, n)) = \widehat{\beta}(m, n) = \beta(m, n)$$

und somit $\beta' \circ \tau = \beta$.

Es ist klar, dass β' eindeutig ist: Sei $\beta''\colon T \to A$ eine weitere R-lineare Abbildung mit $\beta'' \circ \tau = \beta$. Dann gilt

$$\widehat{\beta}(m, n) = \beta(m, n) = \beta''(\tau(m, n)) = \beta''(\text{can}(m, n))$$

für alle $m \in M$ und $n \in N$. Es folgt $\beta'' \circ \text{can} = \widehat{\beta} = \beta' \circ \text{can}$ und wegen der Surjektivität von can folgt daraus $\beta' = \beta''$. Also ist (T, τ) ein Tensorprodukt von M und N. □

Notation 6.2.7. Seien $M \in \text{Mod-}R$ ein Rechtsmodul und $N \in R\text{-Mod}$ ein Linksmodul. Dann besitzen M und N nach Proposition 6.2.6 ein Tensorprodukt über R, welches nach 6.2.4 eindeutig bis auf eindeutigen

Isomorphismus ist. Wir fixieren für jedes Paar (M,N) ein solches Tensorprodukt und notieren es als $(M\otimes_R N,\otimes)$. Die R-balancierte Abbildung $\otimes\colon M\times N\to M\otimes_R N$ wird stets in Infixnotation geschrieben, d. h. als

$$\begin{aligned}\otimes=\cdot\otimes\cdot\colon M\times N&\to M\otimes_R N,\\ (m,n)&\mapsto m\otimes n.\end{aligned}$$

Wenn wir beispielsweise das im Beweis von Proposition 6.2.6 konstruierte Tensorprodukt (T,τ) von M und N nehmen, so gelten $M\otimes_R N=T=\frac{\mathbb{Z}(M\times N)}{U}$ und $m\otimes n=\tau(m,n)=\overline{(m,n)}$.

6.2.8. Die Bijektion (6.2.1) wird mit dieser Notation zu

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N,A)&\xrightarrow{\sim}\mathrm{Bal}_R(M\times N,A),\\ \beta'&\mapsto\beta'\circ\otimes.\end{aligned}\tag{6.2.3}$$

6.2.9. Balanciertheit von $\otimes$ bedeutet, dass $(mr)\otimes n=(m\otimes rn)$ und $(m+m')\otimes n=m\otimes n+m'\otimes n$ und $m\otimes(n+n')=m\otimes n+m\otimes n'$ gelten. Die erste Gleichung sagt, dass man bei Elementen des Tensorprodukts $M\otimes_R N$ Skalare aus R „am Tensorproduktzeichen $\otimes$ vorbeischieben“ darf.

6.2.10. Oft sagt man einfach, dass $M\otimes_R N$ das Tensorprodukt von M und N ist und verzichtet darauf, die R-balancierte Abbildung $\otimes\colon M\times N\to M\otimes_R N$ explizit zu erwähnen.

6.2.11. Jedes Element von $M\otimes_R N$ lässt sich als endliche Summe von Elementen der Form $m\otimes n$ schreiben, für $(m,n)\in M\times N$ (dies folgt sofort aus dem Beweis von Proposition 6.2.6, aber auch abstrakt aus der universellen Eigenschaft, denn die von allen $m\otimes n$ erzeugte Untergruppe von $M\otimes_R N$ hat die gewünschte universelle Eigenschaft). Ein Element der Form $m\otimes n$ nennt man einen **reinen Tensor**. Die reinen Tensoren bilden also ein Erzeugendensystem von $M\otimes_R N$.

Die Abbildung $\otimes\colon M\times N\to M\otimes_R N$ ist aber im Allgemeinen keineswegs surjektiv (siehe Beispiel 6.2.20 für ein Gegenbeispiel).

Ein Morphismus $\alpha\colon M\otimes_R N\to A$ von abelschen Gruppen wird oft nur auf den reinen Tensoren angegeben – der Leser muss dann selbst die Wohldefiniertheit überprüfen.

6.2.12 (Tensorprodukt als Funktor)**.** Seien $f\colon M\to M'$ in Mod-R und $g\colon N\to N'$ in R-Mod Morphismen. Betrachte das folgende Diagramm ohne den gepunkteten Pfeil.

$$\begin{array}{ccc} M\times N & \xrightarrow{\otimes} & M\otimes_R N \\ \downarrow{\scriptstyle f\times g} & & \vdots{\scriptstyle \exists! f\otimes g} \\ M'\times N' & \xrightarrow{\otimes} & M'\otimes_R N'. \end{array}$$

Die beiden horizontalen Pfeile $\otimes$ sind R-balanciert. Da $\otimes\circ(f\times g)$ R-balanciert ist, existiert der gepunktete Morphismus abelscher Gruppen eindeutig, so dass das Diagramm kommutativ ist. Wie angedeutet, wird dieser Morphismus als $f\otimes g$ notiert. Explizit ist er (auf reinen Tensoren) durch $(f\otimes g)(m\otimes n)=f(m)\otimes g(n)$ gegeben.

Wie man leicht prüft, erhalten wir so einen Funktor

$$\begin{aligned}\otimes_R=(-\otimes_R-)\colon \text{Mod-}R\times R\text{-Mod}&\to\mathbb{Z}\text{-Mod}=\mathrm{Ab},\\ (M,N)&\mapsto M\otimes_R N && \text{auf Objektebene},\\ (f,g)&\mapsto f\otimes g && \text{auf Morphismenebene}.\end{aligned}\tag{6.2.4}$$

6.2.13. Fixieren wir einen R-Rechtsmodul M, so erhalten wir einen Funktor

$$\begin{aligned}(M\otimes_R-)\colon R\text{-Mod}&\to\mathbb{Z}\text{-Mod}=\mathrm{Ab},\\ N&\mapsto M\otimes_R N,\\ g&\mapsto \mathrm{id}_M\otimes g.\end{aligned}\tag{6.2.5}$$

Statt $\mathrm{id}_M\otimes g$ findet sich bisweilen auch die Notation $M\otimes g=M\otimes_R g$. Sind $g,g'\colon N\to N'$ zwei Morphismen in R-Mod, so gilt $\mathrm{id}_M\otimes(g+g')=\mathrm{id}_M\otimes g+\mathrm{id}_M\otimes g'$. Äquivalent bedeutet dies, dass unser Funktor auf den Morphismen-abelschen-Gruppen (vgl. 6.1.3) ein Gruppenmorphismus

$$(M\otimes_R-)\colon\ \mathrm{Hom}_R(N,N')\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N,M\otimes_R N')$$

ist.

Analog kann man das rechte Argument $N \in R\text{-Mod}$ fixieren und erhält den Funktor $(-\otimes_R N)\colon \text{Mod-}R \to \text{Ab}$.

6.2.14 (Tensorprodukt von Bimoduln)**.** Sei S ein weiterer Ring und sei $M = {}_SM_R$ ein S-R-Bimodul. Sei $N = {}_RN$ ein R-Linksmodul. Betrachten wir M nur als R-Rechtsmodul, so ist das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ eine abelsche Gruppe, jedoch wird es in kanonischer Weise ein S-Linksmodul ist, wenn wir die Skalarmultiplikation mit $s \in S$ durch

$$s.(m \otimes n) := (s.m) \otimes n$$

definieren, was wohldefiniert ist: Da $s.\colon M \to M$ eine R-rechtslineare Abbildung ist, liefert die Funktorialität des Tensorprodukts den Morphismus

$$(s.) \otimes \mathrm{id}_N \colon M \otimes_R N \to M \otimes_R N$$

abelscher Gruppen; dieser bildet $m \otimes n$ auf $(s.m) \otimes n$ ab.

Mit unserer Notation S-Mod-R für die Kategorie der S-R-Bimoduln gibt der Funktor 6.2.4 somit Anlass zum Funktor

$$\otimes_R = (- \otimes_R -)\colon S\text{-Mod-}R \times R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}. \tag{6.2.6}$$

Ist Q ein weiterer Ring und $N = {}_RN_Q$ ein R-Q-Bimodul, so definiert $(m \otimes n).q := m \otimes (n.q)$ analog eine Q-Rechtsmodulstruktur auf $M \otimes_R N$. Diese kommutiert mit der obigen S-Linksmodulstruktur, so dass $M \otimes_R N$ ein S-Q-Bimodul ist. Wir erhalten den Funktor

$$\otimes_R = (- \otimes_R -)\colon S\text{-Mod-}R \times R\text{-Mod-}Q \to S\text{-Mod-}Q. \tag{6.2.7}$$

6.2.15 (Skalarerweiterung)**.** Eine besonders wichtige Anwendung von (6.2.6) ist die folgende: Sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringmorphismus. Dann können wir S per $s'.s.r' := s' \cdot s \cdot \varphi(r')$ als S-R-Bimodul auffassen. Indem wir diesen Bimodul als linkes Argument in (6.2.6) fixieren, erhalten wir Funktor **Erweiterung der Skalare**

$$S \otimes_R -\colon R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}.$$

Beispielsweise ist $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} -$ der Funktor „Komplexifizierung“, der aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ macht. Beispielsweise gilt $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ nach der späteren Proposition 6.2.17.

6.2.16 (Tensorprodukt von Moduln über kommutativen Ringen)**.** Sei R kommutativ. Seien M, N zwei R-Linksmoduln. Wir können M per $m.r := r.m$ als R-Rechtsmodul auffassen und dann die abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ bilden. Diese wird per

$$r.(m \otimes n) := (rm) \otimes n = (mr) \otimes n = m \otimes (rn) \tag{6.2.8}$$

selbst zu einem R-Linksmodul, wobei die Wohldefiniertheit wie in 6.2.14 aus $((r.) \otimes \mathrm{id}_N)(m \times n) = (rm) \otimes n$ folgt, wobei man beachte, dass $r.\colon M \to M$ auf Grund der Kommutativität von R ein Morphismus von R-Rechtsmoduln ist. Genauer wird das Tensorprodukt zu einem Funktor

$$\otimes_R\colon R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}.$$

Die Gleichung (6.2.8) besagt auch, dass die R-balancierte Abbildung $\otimes\colon M \times N \to M \otimes_R N$ R-bilinear ist.

Sind M und N endlich erzeugt, so ist $M \otimes_R N$ ebenfalls endlich erzeugt. Dies folgt sofort aus der ersten Beobachtung in 6.2.11.

Ist A ein beliebiger R-(Links-)Modul, so ist jede R-bilineare Abbildung $M \times N \to A$ automatisch R-balanciert; dies liefert die vertikale Inklusion rechts im folgenden Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, A) & \xrightarrow[(6.2.1)]{\sim} & \mathrm{Bal}_R(M \times N, A) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Bilin}_R(M \times N, A) \end{array} \tag{6.2.9}$$

Man prüft leicht, dass sich die unteren Mengen unter der obigen horizontalen Bijektion entsprechen. Die untere vertikale Bijektion kodiert die universelle Eigenschaft des R-Moduls $M \otimes_R N$ samt der R-bilinearen Abbildung $\otimes$.

Ende der 23. Vorlesung am 28.01.2021.

Proposition 6.2.17. *Sei R ein Ring.*

(a) (Tensorprodukt mit dem Grundring) Ist M ein R-Linksmodul, so ist

$$R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M, \qquad r \otimes m \mapsto rm, \tag{6.2.10}$$

$$1 \otimes m \mathrel{\reflectbox{$\mapsto$}} m, \tag{6.2.11}$$

ein Isomorphismus von R-Linksmoduln.

(b) (Tensorprodukt und Restklassenabbildung) Ist M ein R-Linksmodul und $I \subset R$ ein Rechtsideal (= Untermodul von R als R-Rechtsmodul), so ist

$$(R/I) \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M/IM, \qquad \overline{r} \otimes m \mapsto \overline{rm}, \tag{6.2.12}$$

$$\overline{1} \otimes m \mathrel{\reflectbox{$\mapsto$}} \overline{m}, \tag{6.2.13}$$

ein Isomorphismus von R-Linksmoduln.

(c) (Tensorprodukt und endliche direkte Summen) Sind M und M' R-Rechtssmoduln und N ein R-Linksmodul, so ist

$$(M \oplus M') \otimes_R N \xrightarrow{\sim} (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N), \qquad (m, m') \otimes n \mapsto ((m \otimes n), (m' \otimes n)), \tag{6.2.14}$$

$$(m, 0) \otimes n_1 + (0, m') \otimes n_2 \mathrel{\reflectbox{$\mapsto$}} (m \otimes n_1, m' \otimes n_2) \tag{6.2.15}$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

(d) (Tensorprodukt und beliebige direkte Summen; Verallgemeinerung des vorigen Punkts) Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Rechtsmoduln und ist N ein R-Rechtsmodul, so ist

$$\Big(\bigoplus_{i \in I} M_i\Big) \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N), \qquad (m_i)_{i \in I} \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_{i \in I}. \tag{6.2.16}$$

$$\sum_{i \in I} \iota_i(m_i) \otimes n_i \mathrel{\reflectbox{$\mapsto$}} (m_i \otimes n_i)_{i \in I},$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen, wobei $\iota_j \colon M_j \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ die kanonische Inklusion in den j-ten Summanden ist.

Analog vertauscht das Tensorprodukt auch mit direkten Summen im rechten Tensorfaktor.

(e) (Symmetrie des Tensorprodukts für kommutative Ringe) Ist R kommutativ und sind M und N R-Linksmoduln, so ist

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} N \otimes_R M, \qquad m \otimes n \xrightarrow{\sim} n \otimes m, \tag{6.2.17}$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

(f) (Assoziativität des Tensorprodukts) Sei S ein weiterer Ring und sei M ein R-Rechtsmodul, N ein R-S-Bimodul und P ein S-Linksmodul. Dann ist

$$(M \otimes_R N) \otimes_S P \xrightarrow{\sim} M \otimes_R (N \otimes_S P), \qquad (m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p), \tag{6.2.18}$$

ein Isomorphismus von abelschen Gruppen.

All diese Isomorphismen sind natürlich in den beteiligten Moduln.

Tragen die beteiligten Moduln eine Zusatzstruktur, so sind diese Isomorphismen meist (immer?) mit dieser Zusatzstruktur verträglich. Beispielsweise ist (6.2.12) ein Isomorphismus von S-Rechtsmoduln, falls M ein R-S-Bimodul ist.

Beweis. Der Leser überlege sich mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, dass alle Abbildungen wohldefiniert sind. □

Aufgabe 6.2.18. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen und sei $d \in \mathbb{Z}$ ein größter gemeinsamer Teiler von m und n, d. h. es gilt $d\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tau \colon \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} &\to T := \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}, \\ ([u]_m, [v]_n) &\mapsto [uv]_d, \end{aligned}$$

ein Tensorprodukt von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$ ist.

Hinweis: Bestimme allgemeiner $R/I \otimes_R R/J$ für einen kommutativen Ring R mit Idealen $I, J \subset R$.

Bonus: Bestimme $R/I \otimes_R R/J$ für einen nicht notwendig kommutativen Ring R mit Rechtsideal I und Linksideal J.

6.2.19. Sei R ein kommutativer Ring. Sind M und N freie R-(Links-)Moduln, so ist auch $M \otimes_R N$ frei als R-Modul. Dies folgt aus Proposition 6.2.17, die uns die folgenden Isomorphismen liefert (bis auf den letzten offensichtlichen Isomorphismus):

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} R\Big) \otimes_R \Big(\bigoplus_{j\in J} R\Big) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} \Big(R \otimes_R \Big(\bigoplus_{j\in J} R\Big)\Big) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} \Big(\bigoplus_{j\in J} R\Big) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} \Big(\bigoplus_{j\in J} R \otimes_R R\Big) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} R.$$

Insbesondere folgt: Sind B eine R-Basis von M und C eine R-Basis von N, so ist $\{b \otimes c \mid (b,c) \in B \times C\}$ eine R-Basis von $M \otimes_R N$. Für Vektorräume ist diese Aussage vermutlich wohlbekannt.

Ein Spezialfall der obigen Kette von Isomorphismen ist der Isomorphismus $R^m \otimes_R R^n \xrightarrow{\sim} R^{mn}$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 6.2.20. Für einen Körper k und $V = k^2$ betrachte man die Abbildung $\otimes\colon V \times V \to V \otimes_k V$. Ist e_1, e_2 die (geordnete) Standard-k-Basis von V, so ist $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ nach 6.2.19 eine k-Basis von $V \otimes V$ und liefert einen Isomorphismus $V \otimes_k V \xrightarrow{\sim} k^4$. Unter dieser Identifikation ist die bilineare Abbildung $\otimes\colon V \times V \to V \otimes_k V$ wie folgt gegeben

$$k^2 \times k^2 \to k^4,$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass das Bild dieser Abbildung genau die Nullstellenmenge in k^4 des Polynoms $Z_1Z_4 - Z_2Z_3$ ist, wobei $Z_i\colon k^4 \to k$ die i-te Koordinatenfunktion ist. Insbesondere ist $\otimes\colon V \times V \to V \otimes_k V$ alles andere als surjektiv. (Wenn man hier $V = k^3$ nehmen würde, würde man noch weniger Surjektivität erwarten, da $V \times V$ 6-dimensional, $V \otimes V$ aber 9-dimensional ist; beachte aber, dass $\otimes\colon V \times V \to V \otimes_k V$ nicht linear ist.)

6.2.21. Das Element $2\otimes\overline{1}$ von $(2\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2$ ist nicht Null (denn unter den Isomorphismen $(2\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2 \xleftarrow[\sim]{(2\cdot)\otimes\mathrm{id}} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2$ enspricht es dem Element $\overline{1}$) während das Element $2 \otimes \overline{1}$ von $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$ Null ist (denn $2 \otimes \overline{1} = (1 \cdot 2) \otimes \overline{1} = 1 \otimes (2\overline{1}) = 1 \otimes 0 = 0$). Deswegen ist es wichtig anzugeben, in welchem Tensorprodukt ein Element der Form $x \otimes y$ lebt.

6.3. **Rechtsexaktheit des Tensorprodukts.**

Beispiel 6.3.1. Tensorieren wir die Injektion $(2\cdot)\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$-Moduln (von links) mit $\mathbb{Z}/2$, so erhalten wir die Abbildung

$$\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes(2\cdot)} \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}.$$

Diese Abbildung ist die Nullabbildung, denn $\overline{m} \otimes n$ wird auf $\overline{m} \otimes 2n = \overline{m2} \otimes n = 0 \otimes n = 0$ abgebildet. Wegen $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow[\sim]{(6.2.12)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq \{0\}$ ist sie keine Injektion.

Dies zeigt, dass der Funktor $M \otimes_R -$ Injektionen im Allgemeinen nicht erhält. Diese Beobachtung führt zum Begriff der Flachheit eines Moduls (siehe Abschnitt 6.4). Zunächst zeigen wir aber, dass der Funktor $M\otimes_R$ *rechtsexakt* ist (siehe Proposition 6.3.6).

Definition 6.3.2. Seien R und S Ringe. Eine exakte Sequenz $M' \to M \to M'' \to 0$ in R-Mod oder Mod-R oder R-Mod-S heißt **rechtssexakte Sequenz**. Eine exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M''$ in R-Mod oder Mod-R oder R-Mod-S heißt **linksexakte Sequenz**.

Definition 6.3.3. Seien R und S Ringe. Ein Funktor $F\colon R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ heißt

(a) **rechtsexakt**, falls er

- $F(0) = 0$ und $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$ (unter der kanonischen Abbildung) für alle M, $N \in R$-Mod erfüllt[129] [130] und
- rechtsexakte Sequenzen auf rechtsexakte Sequenzen abbildet: Für jede exakte Sequenz

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

in Mod R ist die Sequenz

$$F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \to \underbrace{0}_{=F(M'')}$$

in Mod S exakt.

[131]

(b) **linksexakt**, falls er
- $F(0) = 0$ und $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$ (unter der kanonischen Abbildung) für alle M, $N \in R$-Mod erfüllt und
- linksexakte Sequenzen auf linksexakte Sequenzen abbildet: Für jede linksexakte Sequenz

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

in Mod R ist die Sequenz

$$\underbrace{0}_{=F(0)} \to F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'')$$

in Mod S linksexakt.

[132]

(c) **exakt** ist, falls er links- und rechtsexakt ist.

Analoge Definitionen gelten für Funktoren $F\colon$ Mod-$R \to S$-Mod bzw. $F\colon R$-Mod $\to$ Mod-S bzw. $F\colon$ Mod-$R \to$ Mod-S.

Aufgabe 6.3.4. Für einen Funktor F mit $F(0) \cong 0$ und $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$ (unter der kanonischen Abbildung) für alle M, $N \in R$-Mod sind äquivalent:

- F ist exakt;
- F bildet kurze exakte Sequenzen auf kurze exakte Sequenzen ab;
- F bildet exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen ab.

Beispiel 6.3.5. Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(T, -)\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ ist linksexakt (Aufgabe 6.3.8.(a)).

Proposition 6.3.6 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)**.** *Ist M ein R-Rechtsmodul, so ist der Funktor*

$$(M \otimes_R -)\colon R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$$

rechtsexakt. Analog ist der Funktor $(- \otimes_R N)$ für jeden R-Linksmodul N rechtsexakt.

Beweis. Offensichtlich gelten $M \otimes_R 0 \cong 0$ und $M \otimes_R (X \oplus Y) \cong (M \otimes_R X) \oplus (M \otimes_R Y)$ nach (6.2.14) bzw. genauer der entsprechenden Aussage für direkte Summen im rechten Tensorfaktor.

Sei $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$ eine rechtsexakte Sequenz. Zu zeigen ist, dass

$$M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} M \otimes_R N'' \to 0$$

---

[129] Äquivalent: Für alle Morphismen f, $f'\colon M \to N$ gilt $F(f + f') = F(f) + F(f')$.

[130] Der (auch auf Morphismen wohldefinierte) Funktor $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$, $M \mapsto \mathbb{Z}M$, der eine abelsche Gruppe auf die freie abelsche Gruppe über der unterliegenden Menge M abbildet, erfüllt keine dieser beiden Bedingungen.

[131] Kurz gefasst bedeuten diese Bedingungen, dass F alle endlichen Kolimiten erhält, vgl. [Sta18, 0519].

[132] Kurz gefasst bedeuten diese Bedingungen, dass F alle endlichen Limiten erhält, vgl. [Sta18, 0519]. Man beachte, dass endliche Koprodukte und Produkte in Modulkategorien übereinstimmen.

rechtsexakt ist. Sicherlich ist $\mathrm{id}\otimes g$ surjektiv (verwende 6.2.11). Weiter gilt $(\mathrm{id}\otimes g)\circ(\mathrm{id}\otimes f)=\mathrm{id}\otimes(g\circ f)=\mathrm{id}\otimes 0=0$ und somit $\mathrm{im}(\mathrm{id}\otimes f)\subset\ker(\mathrm{id}\otimes g)$. Somit faktorisiert $\mathrm{id}\otimes g$ eindeutig über den Kokern von $\mathrm{id}\otimes f$ wie im folgenden Diagramm angegeben.

$$\begin{array}{ccccccc} M\otimes_R N' & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} & M\otimes_R N & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} & M\otimes_R N'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow^{\pi} & \uparrow{\scriptstyle \exists!\lambda} & & \\ & & & & \mathrm{cok}(\mathrm{id}\otimes f), & & \end{array}$$

wobei π die kanonische Abbildung ist; es gilt also $\lambda\circ\pi=\mathrm{id}\otimes g$.

Wir konstruieren nun eine/die Umkehrabbildung zu λ. Für jedes $y\in N''$ wähle einen Lift $\widehat{y}$ in N, also ein Element $\widehat{y}\in N$ mit $g(\widehat{y})=y$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\beta\colon M\times N''&\to\mathrm{cok}(\mathrm{id}\otimes f),\\ (m,y)&\mapsto\pi(m\otimes\widehat{y}),\end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl der Lifts und R-bilinear. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts gibt es also genau eine Gruppenmorphismus

$$\beta'\colon M\otimes_R N''\to\mathrm{cok}(\mathrm{id}\otimes f)$$

mit $\beta'(m\otimes y)=\beta(m,y)=\pi(m\otimes\widehat{y})$. Wegen $\beta'(m\otimes g(\widehat{y}))=\beta'(m\otimes y)$ folgt $\beta'\circ(\mathrm{id}\otimes g)=\pi$.

Wir folgern $\beta'\circ\lambda\circ\pi=\beta'\circ(\mathrm{id}\circ g)=\pi$ und $\lambda\circ\beta'\circ(\mathrm{id}\otimes g)=\lambda\circ\pi=\mathrm{id}\otimes g$. Weil π und $\mathrm{id}\otimes g$ surjektiv sind, folgen $\beta'\circ\lambda=\mathrm{id}$ und $\lambda\circ\beta'=\mathrm{id}$, d. h. β' und λ sind zueinander invers. Also gilt $\ker(\mathrm{id}\otimes g)=\ker(\pi)=\mathrm{im}(\mathrm{id}\otimes f)$. □

Proposition 6.3.7 (Tensor-Hom-Adjunktion $((-\otimes_R N,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,-)))$**.** *Seien $M=M_R$ ein R-Rechtsmodul, $N={}_RN$ ein R-Linksmodul und A eine abelsche Gruppe (= ein $\mathbb{Z}$-Modul). Dann ist die folgende Abbildung eine Bijektion*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N,A)&\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{-R}(M,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,A)),\\ f&\mapsto\Big(m\mapsto f(m\otimes-)\Big),\\ \Big(m\otimes n\mapsto(g(m)(n))\Big)&\mapsfrom g\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

von abelschen Gruppen, wobei die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,A)$ *per* $(h.r)(n):=h(r.n)$ *als R-Rechtsmodul aufgefasst wird. Sie ist natürlich in M, N und A; genauer ist sie natürlich in $(M,N,A)\in(\text{Mod-}R)^{\mathrm{op}}\times(R\text{-Mod})^{\mathrm{op}}\times\mathbb{Z}\text{-Mod}$.*

Insbesondere ist für fixiertes $N\in R$-Mod der Funktor $(-\otimes_R N)\colon\text{Mod-}R\to\mathbb{Z}$-Mod zum Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,-)\colon\mathbb{Z}\text{-Mod}\to\text{Mod-}R$ linksadjungiert.

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass die beiden angegebenen Abbildungen wohldefiniert und invers zueinander sind. Wer mag, kann dies auch aus den offensichtlichen Bijektionen

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\otimes_R N,A)\xrightarrow[\sim]{(6.2.1)}\mathrm{Bal}_R(M\times N,A)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{-R}(M,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,A))$$

folgern. Der Beweis der Natürlichkeit sei dem Leser überlassen. □

Aufgabe 6.3.8. Sei R ein Ring. Mit einem R-Modul meinen wir einen R-Linksmodul, aber die folgenden Aussagen gelten analog für R-Rechtsmoduln und auch für R-S-Bimoduln.

(a) Eine Sequenz

$$0\to N'\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}N''$$

von R-Moduln ist genau dann exakt, wenn für alle R-Moduln T (die wir als „Testmoduln“ auffassen) die Sequenz

$$0\to\mathrm{Hom}_R(T,N')\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}_R(T,N)\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}_R(T,N'')\tag{6.3.2}$$

von abelschen Gruppen exakt ist.

Insbesondere ist der Funktor $\mathrm{Hom}_R(T,-)\colon R\text{-Mod}\to\mathbb{Z}\text{-Mod}$ linksexakt. (Offensichtlich erhält er den Nullmodul und die direkte Summe zweier Moduln.)

(b) Eine Sequenz

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

von R-Moduln ist genau dann exakt, wenn für alle R-Moduln T die Sequenz

$$\mathrm{Hom}_R(M',T) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M,T) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M'',T) \leftarrow 0 \tag{6.3.3}$$

von abelschen Gruppen exakt ist.

Man sagt auch hier, dass der Funktor $\mathrm{Hom}_R(T,-)\colon (R\text{-Mod})^{\mathrm{op}}\to\mathbb{Z}\text{-Mod}$ linksexakt ist (auch wenn wir diesen Begriff formal nicht für Funktoren definiert haben, die bei der opponierten einer Modulkategorie starten).

Lösung auskommentiert

Aufgabe 6.3.9 (Alternativbeweis Rechtsexaktheit des Tensorprodukts 6.3.6 (im linken Faktor))**.** Sei N ein R-Linksmodul. Zeige die Rechtsexaktheit des Funktors $(-\otimes_R N)\colon \text{Mod-}R\to\mathbb{Z}\text{-Mod}$ mit Hilfe von Proposition 6.3.7 und Aufgabe 6.3.8.(b).

Bemerkung: Abstrakter zeigt dies, dass Linksadjungierte stets rechtsexakt sind. Analog sind Rechtsadjungierte stets linksexakt. Lösung (in anderer Notation) auskommentiert

6.4. **Flache Moduln.**

Definition 6.4.1. Ein R-Rechtsmodul M heißt genau dann **flach**, wenn der Funktor

$$M\otimes_R -\colon \mathrm{Mod}(R)\to\mathrm{Mod}(R)$$

exakt ist. Analog ist Flachheit für Linksmoduln definiert.

6.4.2. Da $(M\otimes_R -)$ stets rechtsexakt ist (Proposition 6.3.6), ist M genau dann flach, wenn für jeden injektiven Morphismus $i\colon U\hookrightarrow N$ von R-Moduln der Morphismus $\mathrm{id}\otimes i\colon M\otimes_R U\to M\otimes_R N$ injektiv ist (siehe Aufgabe 6.3.4).

Beispiel 6.4.3. Wir haben in Beispiel 6.3.1 gesehen, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2$ nicht flach ist.

Proposition 6.4.4. *Freie R-Rechtsmoduln und direkte Summanden solcher Moduln sind flach.*[133]

Beweis. Beobachtung: Sind $f_i\colon M_i\to N_i$ Morphismen von (Links/Rechts/Bi-)Moduln, für $i\in I$, so ist ihre Summe $\bigoplus f_i\colon M_i\to N_i$ genau dann injektiv, wenn jeder Morphismus $f_i\colon M_i\to N_i$ injektiv ist (analoges gilt für surjektiv bzw. bijektiv).

Sei $i\colon N'\hookrightarrow N$ ein beliebiger injektiver Morphismus von R-Linksmoduln. Dann prüft man der Reihe nach mit

- (6.2.12), dass für den freien R-Rechtsmodul $M=R=R_R$ die Abbildung $\mathrm{id}_M\otimes i$ injektiv ist;
- (6.2.16), dass für den freien R-Rechtsmodul $M=\bigoplus_{i\in I}R_R$ die Abbildung $\mathrm{id}_M\otimes i$ injektiv ist (das verwendet die obige Beobachtung);
- (6.2.14), dass für jede direkte Summenzerlegung $M\oplus N\cong\bigoplus_{i\in I}R_R$ die Abbildung $\mathrm{id}_M\otimes i$ injektiv ist (auch das verwendet die obige Beobachtung, für $|I|=2$).

□

Beispiel 6.4.5. Alle Vektorräume über einem Körper sind frei und damit flach.

Beispiel 6.4.6. Jedes Ideal in einem Hauptidealring (etwa in $\mathbb{Z}$ oder $k[X]$, für einen Körper k), ist frei und damit flach.

Beispielsweise ist für ein beliebiges Polynom $f\in k[X]$ das Ideal (f) flach als $k[X]$-Modul.

Proposition 6.4.7. *Eine abelsche Gruppe ist genau dann flach, wenn sie torsionsfrei*[134] *ist.*

Insbesondere sind Untergruppen flacher abelscher Gruppen flach.

[133] Da man projektive Moduln als direkte Summanden freier Moduln charakterisieren kann, bedeutet dies, dass jeder projektive Modul flach ist.

[134] Ein Modul M über einem Integritätsbereich R heißt **torsionsfrei**, falls für alle $r\in R$ und $m\in M$ gilt: Aus $rm=0$ folgt $r=0$ oder $m=0$.

Für eine abelsche Gruppe bedeutet dies schlicht, dass jedes Element ungleich Null unendliche Ordnung hat.

Beweis. Sei A eine abelsche Gruppe. Wir schreiben abkürzend $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$.

A nicht torsionsfrei $\implies$ A nicht flach: Sei A nicht torsionsfrei. Also existieren $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ mit $na = 0$ aber $n \neq 0$ und $a \neq 0$. Betrachte den injektiven Gruppenmorphismus $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z}$. Sein Tensorprodukt $\mathbb{Z}$ mit A ist nach (6.2.12) zu $M \xrightarrow{n\cdot} M$ isomorph. Diese Abbildung ist aber nicht injektiv. (Diese Implikation gilt für jeden Modul über einem Integritätsbereich.)

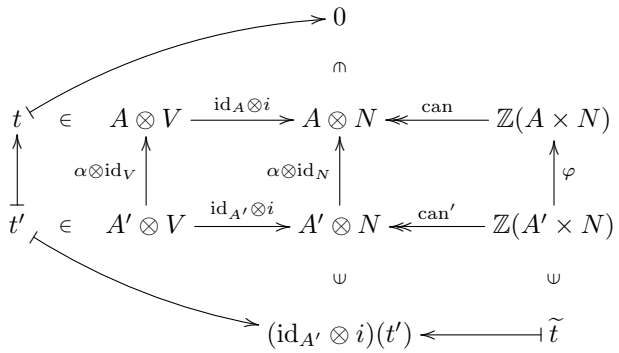
A torsionsfrei $\implies$ A flach: Ist A torsionsfrei und endlich erzeugt, so ist A nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen frei (von endlichem Rang) und somit flach nach Proposition 6.4.4.

Sei nun A eine beliebige torsionsfreie abelsche Gruppe. Sei $i\colon V \hookrightarrow N$ eine Inklusion von abelschen Gruppen. Zu zeigen ist, dass die Abbildung

$$\mathrm{id}_A \otimes i\colon A \otimes V \to A \otimes N$$

injektiv ist. Sei $t \in A \otimes V$ ein Element ihres Kerns.

Da die reinen Tensoren $A \otimes V$ erzeugen (siehe 6.2.11), gibt es eine endlich erzeugte Untergruppe $A' \overset{\alpha}{\subset} A$ und ein Element $t' \in A' \otimes V$, das unter $A' \otimes V \xrightarrow{\alpha\times \mathrm{id}_V} A \otimes V$ auf t abgebildet wird, wie auf der linken Seite des kommutativen Diagramms



angedeutet. Wir nehmen hierbei ohne Einschränkung an, dass die beiden Tensorprodukte $A \otimes N$ und $A' \otimes N$ wie im Beweis von Proposition 6.2.6 konstruiert sind. Die Abbildung φ bezeichnet die $\mathbb{Z}$-lineare Ausdehnung von $\alpha \times \mathrm{id}_N$.

Wie im Diagramm bereits angedeitet, sei $\widetilde{t} \in \mathbb{Z}(A' \otimes N)$ ein Lift des Elements $(\mathrm{id}_{A'} \otimes i)(t')$. Weil $\varphi(\widetilde{t})$ im Kern von can liegt und wir diesen nach (6.2.2) gut kennen, gibt es eine endliche erzeugte Untergruppe $A'' \subset A$ mit $A' \overset{\beta}{\subset} A''$, so dass $\varphi(\widetilde{t})$ bereits in $\mathbb{Z}(A'' \times N)$ und im Kern von $\mathbb{Z}(A'' \times N) \xrightarrow{\mathrm{can}''} A'' \otimes N$ liegt. Dies bedeutet, dass $(\mathrm{id}_{A'} \otimes i)(t')$ bereits unter

$$A' \otimes N \xrightarrow{\beta\otimes \mathrm{id}_N} A'' \otimes N$$

auf Null geht. Folglich geht $(\beta \otimes \mathrm{id}_V)(t')$ unter

$$A'' \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_{A''}\otimes i} A'' \otimes N$$

auf Null. Da aber A'' endlich erzeugt und als Untergruppe von A torsionsfrei ist, ist diese Abbildung nach dem ersten Teil des Beweises injektiv. Es folgt $(\beta \otimes \mathrm{id}_V)(t') = 0$ und daraus $t = 0$. □

Beispiele 6.4.8. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ ist torsionsfrei, also flach nach Proposition 6.4.7. Er ist aber kein direkter Summand einer freien abelschen Gruppe $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$. Die „Umkehrung“ von Proposition 6.4.4 gilt also nicht.

Zusatzbemerkung 6.4.9. Man kann zeigen, dass ein R-Modul M genau dann flach ist, wenn für jedes endlich erzeugte Ideal $I \subset R$ die induzierte Abbildung $I \otimes_R M \to R \otimes_R M = M$ injektiv ist (siehe [Sta18, 00HD]).

Ende der 24. Vorlesung am 29.01.2021.

Hausaufgaben:

(1) Wähle eins:
- Bestätige mindestens drei der Aussagen in Beispiele 6.2.5 von Hand
- Aufgabe 6.3.4: exakter Funktor

(2) Aufgabe 6.2.18: $R/I \otimes_R R/J$

(3) Aufgabe 6.3.8: Test für Links-/Rechtsexaktheit (der Beweis ist elementar, aber vermutlich etwas langwierig)
(4) Aufgabe 6.3.9: Tensorprodukt rechtsexakt per $\otimes$-Hom-Adjunktion

6.5. **Tensorprodukt und Homologie.**

6.5.1. Dieser Abschnitt ist als Motivation zum universellen Koeffiziententheorem der Homologie 6.10.1 zu verstehen.

Beispiel 6.5.2. Betrachte den Komplex

$$F := (\ldots \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \ldots)$$

von abelschen Gruppen. Wenden wir auf dieses Diagramm den Funktor $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an und nennen das Ergebnis $F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, so erhalten wir wegen der kanonischen Isomorphismen[135] $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine Isomorphismus

$$F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (\ldots \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot=0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot=0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot=0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot=0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \ldots)$$

von Komplexen. Der Komplex F ist azyklisch, d. h. $\mathrm{H}_p(F) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, aber es gilt $\mathrm{H}_p(F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Dieses Beispiel zeigt, dass man im Allgemeinen aus der Kenntnis aller Homologien $\mathrm{H}_p(A)$ eines Komplexes A abelscher Gruppen nicht die Homologien von $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ berechnen kann (denn sowohl der Nullkomplex 0 also auch $0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$ sind azyklisch).

Das Problem ist hier nicht, dass F in unendlich vielen Graden lebt: Der Komplex

$$F' := (\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots)$$

ist ebenfalls azyklisch, während

$$F' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot=0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots)$$

(Rechtsexaktheit des Tensorprodukts!) in genau einem Grad von Null verschiedene Homologie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat.

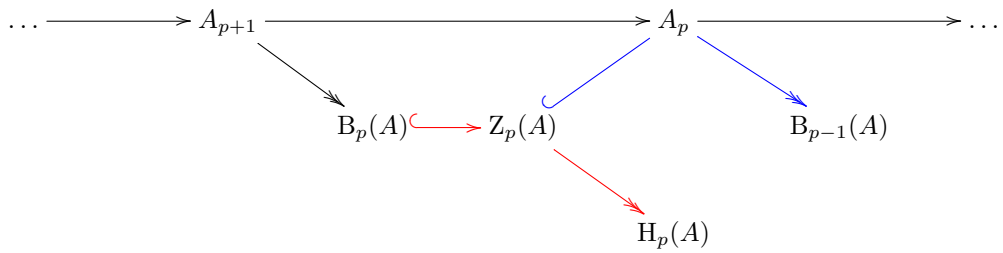
Beispiel 6.5.3. Der Komplex

$$F := (\ldots \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \ldots)$$

abelscher Gruppen hat in jedem Grad Homologie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, jedoch ist $F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ wegen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ der Nullkomplex, also insbesondere azyklisch.

6.5.4. Sei A ein Komplex abelscher Gruppen. Er ist im folgenden kommutativen Diagram mitsamt seiner Ränder, Zykel und Homologie illustriert.

(6.5.1)

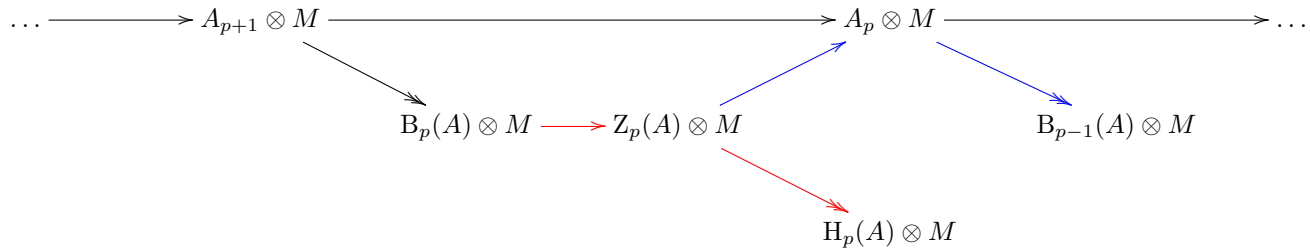


Die rote Sequenz ist eine kurze exakte Sequenz, wie auch die blaue.

[135] Der erste Isomorphismus kommt von der folgenden Beobachtung: Sind $M = M_R$ und $N = {}_R N$ Moduln über einem (nicht notwendig kommutativen) Ring R und ist I ein beidseitiges Ideal in R mit $MI = 0$ und $IN = 0$, so gilt kanonisch $M \otimes_R N \cong M \otimes_{R/I} N$, denn R-balancierte und R/I-balancierte Abbildungen $M \times N \to A$ entsprechen sich bijektiv, für jede abelsche Gruppe A.

Sei M eine beliebige abelsche Gruppe. Wenden wir den rechtsexakten Funktor $- \otimes_{\mathbb{Z}} M = - \otimes M$ auf dieses Diagramm an, so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

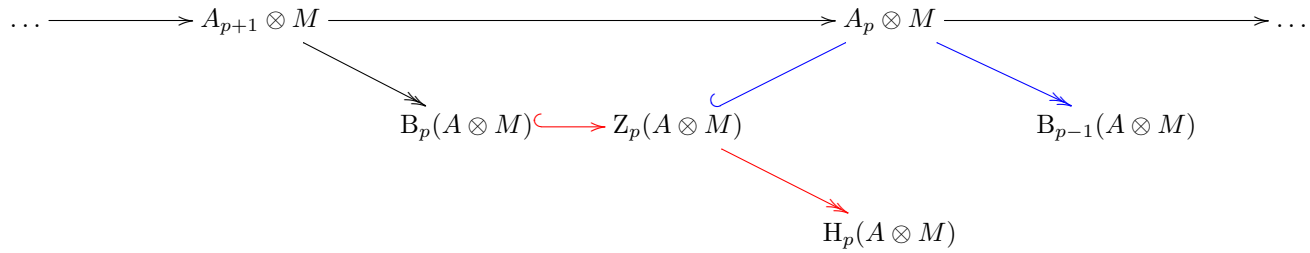
(6.5.2)



Nun sind rote und blaue Sequenz nur noch rechtsexakt.

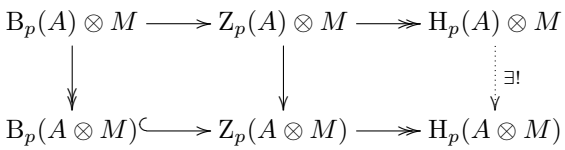
Nennen wir den Komplex in der oberen Zeile $A \otimes M$, so kann man seine Zykel und Ränder analog wie in (6.5.1) durch das folgende kommutative Diagramm mit roten und blauen kurzen exakten Sequenzen illustrieren.

(6.5.3)



Aus den Diagrammen (6.5.2) und (6.5.3) folgert man die Existenz der beiden linken Vertikalen im folgenden kommutativen Diagramm (die linke Vertikale ist surjektiv).

(6.5.4)



Da die obere Zeile rechtsexakt ist, existiert der angedeutete gestrichelte Morphismus eindeutig, so dass das rechte Quadrat kommutiert. (Die untere Zeile ist kurz exakt.) Konkret ist diese Abbildung durch $[z] \otimes m \mapsto [z \otimes m]$ gegeben.

Proposition 6.5.5 (Koeffizientenwechsel)**.** *Sei A ein Komplex abelscher Gruppen und sei M eine abelsche Gruppe. Sei $p \in \mathbb{Z}$. Dann ist*

(6.5.5)
$$\begin{aligned} \mathrm{H}_p(A) \otimes_{\mathbb{Z}} M &\to \mathrm{H}_p(A \otimes_{\mathbb{Z}} M), \\ [z] \otimes m &\mapsto [z \otimes m], \end{aligned}$$

ein Morphismus abelscher Gruppen (der im Allgemeinen weder surjektiv noch injektiv ist, wie man anhand der Beispiele 6.5.2 und 6.5.3 sieht). Ist M eine flache (= torsionsfreie) abelsche Gruppe, so ist dieser Morphismus ein Isomorphismus.

Beweis. Die erste Behauptung ist klar nach 6.5.4. Ist M flach, so ist im Diagramm (6.5.2) sowohl die rote als auch die blaue Sequenz kurz exakt und $\mathrm{Z}_p(A) \otimes M \hookrightarrow A_p \otimes M \xrightarrow{d \otimes \mathrm{id}_M} A_{p-1} \otimes M$ ist linksexakt. Daraus folgt, dass die beiden linken Vertikalen in (6.5.4) Isomorphismen sind, was dann auch für die rechte folgt. □

Korollar 6.5.6 (Koeffizientenwechsel für singuläre Homologie – kurzer Ausflug in die Topologie)**.** *Seien X ein topologischer Raum und M eine abelsche Gruppe. Dann gilt $\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathrm{S}(X; M)$ kanonisch (und im*

Beweis erklärt) als Komplexe. Sei $p \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M &\to \mathrm{H}_p(X; M), \\ [z] \otimes m &\mapsto [z \otimes m], \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

ein Morphismus abelscher Gruppen. Ist M eine flache (= torsionsfreie) abelsche Gruppe, so ist dieser Morphismus ein Isomorphismus.

Beweis. In Beispiel 6.5.4 haben wir $A \otimes M = A \otimes_{\mathbb{Z}} M$ für einen Komplex abelscher Gruppen definiert. Der Komplex $\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ist mehr oder weniger per Definition zu dem in 3.1.19 definierten Komplex $\mathrm{S}(X; M)$ isomorph: In Grad $q \in \mathbb{Z}$ gilt unter Verwendung der Isomorphismen aus Proposition 6.2.17

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_q(X; M) = M\,\mathrm{Top}(\Delta, X) = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X)} M &\cong \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X)} \big(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M\big) \\ &\cong \Big(\bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Top}(\Delta_q, X)} \mathbb{Z}\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} M = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X) \otimes_{\mathbb{Z}} M = \mathrm{S}_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M, \end{aligned}$$

und diese Isomorphismen sind mit den Differentialen verträglich. Daraus erhalten wir mit Proposition 6.5.5 den gewünschten Morphismus als Verknüpfung

$$\mathrm{H}_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M = \mathrm{H}_p(\mathrm{S}X) \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{(6.5.5)} \mathrm{H}_p(\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} M) \cong \mathrm{H}_p\big(\mathrm{S}(X; M)\big) = \mathrm{H}_p(X; M)$$

und auch die Aussage, dass dieser für flaches M ein Isomorphismus ist. □

6.6. **Bikomplexe und Totalkomplex.**

6.6.1. Sei R ein Ring. Ein R-Modul meint im Folgenden einen R-Linksmodul.[136]

Definition 6.6.2. Ein **Bikomplex von R-Moduln** ist ein Tripel

$$A = (A, d', d'') = \Big(A = (A_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}, d' = (d'_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}, d'' = (d''_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}\Big),$$

dessen Komponenten Familien von

- R-Moduln $A_{p,q}$,
- Morphismen $d'_{p,q}\colon A_{p,q} \to A_{p-1,q}$ von R-Moduln und
- Morphismen $d''_{p,q}\colon A_{p,q} \to A_{p,q-1}$ von R-Moduln

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ sind, so dass $d'^2 = 0$ und $d''^2 = 0$ und $d' \circ d'' = d'' \circ d'$ gelten oder ausführlich

- $d'_{p-1,q} \circ d'_{p,q}$,
- $d''_{p,q-1} \circ d''_{p,q}$,
- $d'_{p,q-1} \circ d''_{p,q} = d''_{p-1,q} \circ d'_{p,q}$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$. Man nennt die $d'_{p,q}$ **horizontale Differentiale** und die $d''_{p,q}$ **vertikale Differentiale**.

6.6.3. Ich stelle mir den Bikomplex als Diagramm in der Zeichenebene mit $A_{p,q}$ an der Koordinate $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vor. Die horizontalen bzw. vertikalen Differentiale sind dann horizontale Pfeile nach links bzw. vertikale Pfeile nach unten. Die Bedingung $d'^2 = 0$ besagt, dass jede Zeile ein Komplex ist. Die Bedingung $d';^2 = 0$ besagt, dass jede Spalte ein Komplex ist. Die Bedingung $d' \circ d'' = d'' \circ d'$ besagt, dass jedes Quadrat kommutativ ist.

6.6.4. Die Vorsilbe *bi* in Bikomplex deutet an, dass ein Bikomplex in zwei Richtungen aus Komplexen besteht.

Definition 6.6.5. Sind $A = (A, d', d'')$ und $B = (B, d', d'')$ Bikomplexe von R-Moduln, so ist ein **Morphismus von Bikomplexen** $f\colon A \to B$ eine Familie $f = (f_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ von R-Moduln, so dass f sowohl mit den horizontalen als auch den vertikalen Differentialen kommutiert, dass also in Kurzschreibweise $d'^B \circ f = f \circ d'^A$ und $d''^B \circ f = f \circ d''^A$ gelten; ausführlich ist damit $d'^B_{p,q} \circ f_{p,q} = f_{p-1,q} \circ d'^A_{p,q}$ und $d''^B_{p,q} \circ f_{p,q} = f_{p,q-1} \circ d''^A_{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gemeint.

[136] Statt mit der Kategorie der R-Moduln könnten wir im Folgenden mit Objekten einer beliebigen textitadditiven Kategorie mit abzählbaren direkten Summen arbeiten, wobei hier nicht vorausgesetzt werden soll, dass der Leser diese Begriffe kennt. Beispiele sind aber die Kategorien der R-Rechtsmoduln oder R-S-Bimoduln, falls S ein weiterer Ring ist.

Mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen erhalten wir die Kategorie $\mathrm{BiKom}(R)$ der Bikomplexe von R-Moduln.

Definition 6.6.6. Sind K ein Komplex von R-Linksmoduln und L ein Komplex von R-Rechtsmoduln, so bilden die abelschen Gruppen ($= \mathbb{Z}$-Moduln)

$$K_p \otimes_R L_q$$

zusammen mit den horizontalen Differentialen

$$d'_{p,q} := d^K_p \otimes \mathrm{id}_{L_q} \colon K_p \otimes_R L_q \to K_{p-1} \otimes_R L_q$$

und den vertikalen Differentialen

$$d''_{p,q} := \mathrm{id}_{K_p} \otimes d^L_q \colon K_p \otimes_R L_q \to K_p \otimes_R L_{q-1}$$

einen Bikomplex von $\mathbb{Z}$-Moduln, den wir kurz als $K \otimes^{\mathrm{bi}}_R L$ notieren. (Die ebenfalls gebräuchliche Notation $K \otimes_R L$ reservieren wir für den in Definition 6.6.8 definierten Totalkomplex dieses Komplexes.)

Diese Zuordnung erweitert in naheliegender Weise zu einem Funktor **Tensorprodukt-Bikomplex von Komplexen**

$$\otimes^{\mathrm{bi}}_R = - \otimes^{\mathrm{bi}}_R - \colon \mathrm{Kom}(\text{Mod-}R) \times \mathrm{Kom}(R\text{-Mod}) \to \mathrm{BiKom}(\mathbb{Z}). \tag{6.6.1}$$

wobei $\mathrm{Kom}(\text{Mod-}R)$ bzw. $\mathrm{Kom}(R\text{-Mod})$ die Kategorie von Komplexen von R-Rechtsmoduln bzw. R-Linksmoduln meint (letztere wurde zuvor als $\mathrm{Kom}(R)$ notiert).

Definition 6.6.7. Der Funktor **Totalkomplex** oder genauer **$\oplus$-Totalkomplex**

$$\mathrm{Tot} = \mathrm{Tot}^{\oplus} \colon \mathrm{BiKom}(R) \to \mathrm{Kom}(R) \tag{6.6.2}$$

ist wie folgt definiert:

- auf Objekten: Ist $A = (A, d', d'')$ ein Bikomplex, so sei die n-te Komponenten von $\mathrm{Tot}(A)$ die „direkte Summe über die n-te Diagonale des Bikomplexes“

$$\mathrm{Tot}(A)_n := \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=n}} A_{p,q}$$

  und das n-te Differential von $\mathrm{Tot}(A)$ sei durch

$$\begin{aligned} d^{\mathrm{Tot}(A)}_n \colon\ & \mathrm{Tot}(A)_n \to \mathrm{Tot}(A)_{n-1}, \\ & A_{p,q} \ni a \mapsto d'(a) + (-1)^p d''(a), \end{aligned}$$

  definiert, wobei hier $d'(a)$ und $d''(a)$ mit Hilfe der Inklusionen $A_{p-1,q} \subset \mathrm{Tot}(A)_{n-1}$ und $A_{p,q-1} \subset \mathrm{Tot}(A)_{n-1}$ als Elemente von $\mathrm{Tot}(A)_{n-1}$ aufgefasst werden.

  Der Leser überzeuge sich, dass die Vorzeichenwahl $(-1)^p$ und die Forderungen $d'd'' = d''d'$ und $d'^2 = 0$ und $d''^2 = 0$ dafür sorgen, dass dies wirklich ein Komplex ist.

  In Vorlesung erkläre dies am Bild in der Zeichenebene!
- auf Morphismen: Ist $f \colon A \to B$ ein Morphismus von Bikomplexen, so ist die n-te Komponente von $\mathrm{Tot}(f) \colon \mathrm{Tot}(A) \to \mathrm{Tot}(B)$ als

$$\begin{aligned} \mathrm{Tot}(f)_n := \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=n}} f_{p,q} \colon\ & \mathrm{Tot}(A)_n \to \mathrm{Tot}(B)_n, \\ & (x_{p,q})_{p,q} \mapsto (f_{p,q}(x_{p,q}))_{p,q}, \end{aligned}$$

  definiert.

Definition 6.6.8. Wir definieren den Funktor **Tensorprodukt(-Komplex) von Komplexen** als Verknüpfung

$$\otimes_R = - \otimes_R - \colon \mathrm{Kom}(\text{Mod-}R) \times \mathrm{Kom}(R\text{-Mod}) \xrightarrow[(6.6.1)]{\otimes^{\mathrm{bi}}_R} \mathrm{BiKom}(\mathbb{Z}) \xrightarrow[(6.6.2)]{\mathrm{Tot}} \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}). \tag{6.6.3}$$

Sind also L und K Komplexe von R-Rechts- bzw. R-Linksmoduln, so ist das n-te Differential von $L \otimes_R K$ wie folgt gegeben:

$$d_n^{L\otimes_R K}\colon (L\otimes_R K)_n = \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=n}} K_p \otimes_R L_q \to \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=n-1}} K_p \otimes_R L_q$$
$$K_p \otimes_R L_q \ni x\otimes y \mapsto d(x)\otimes y + (-1)^p x \otimes d(y).$$

Beispiel 6.6.9. Ist L dabei im Grad Null konzentriert, also $L = M[0]$ für einen R-Rechtsmodul M, so entsteht $L \otimes_R K = M[0] \otimes K$ aus dem Komplex K (aufgefasst als Diagramm in R-Mod) durch Anwenden des Funktors $M \otimes_R -$. Analoges gilt im anderen Tensorfaktor.

6.6.10. Sei R ein kommutativer Ring. Wie in 6.2.16 erklärt, können dann in (6.6.1) und (6.6.3) Rechtsmoduln durch Linksmoduln ersetzen; außerdem kann man $\mathrm{BiKom}(\mathbb{Z})$ durch $\mathrm{BiKom}(R)$ und $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})$ durch $\mathrm{Kom}(R) = \mathrm{Kom}(R\text{-Mod})$ ersetzen. Sind A und B Komplexe von R-Moduln, so ist

$$A \otimes_R B \xrightarrow{\sim} B \otimes_R A, \tag{6.6.4}$$
$$(A\otimes B)_n \supset A_p \otimes_R B_q \ni a\otimes b \mapsto (-1)^{pq} b\otimes a \in B_q \otimes A_p \subset (B\otimes A)_n,$$

wobei $p+q=n$, ein Isomorphismus von Komplexen von R-Moduln (vgl. (6.2.17)).[137] Man beachte, dass diese Aussage ohne den Faktor $(-1)^{pq}$ im Allgemeinen falsch ist. Hier ist die Rechnung, dass der obige Isomorphismus, nennen wir ihn σ, mit den Differentialen verträglich ist; es reicht, dies auf reinen Tensoren $a\otimes b$ mit $a\in A_p$ und $b\in B_q$ zu prüfen: Die Elemente

$$\begin{aligned} d_{B\otimes_R A}(\sigma(a\otimes b)) &= (-1)^{pq} d_{B\otimes_R A}(b\otimes a)\\ &= (-1)^{pq} d(b)\otimes a + (-1)^{pq}(-1)^q b\otimes d(a)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma(d_{A\otimes_R B}(a\otimes b))) &= \sigma\big(d(a)\otimes b + (-1)^p a\otimes d(b)\big)\\ &= (-1)^{(p-1)q} b\otimes d(a) + (-1)^p (-1)^{p(q-1)} d(b)\otimes a\end{aligned}$$

stimmen aber überein.

Aufgabe 6.6.11. Der Funktor (6.6.3) induziert einen Funktor auf dem Level von Homotopiekategorien: Es gibt genau einen gepunkteten Funktor, der das folgende Diagramm kommutativ macht, wobei die Vertikalen die offensichtlichen Funktoren sind; dieser wird wir angedeutet ebenfalls als $\otimes_R$ notiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kom}(\text{Mod-}R)\times\mathrm{Kom}(R\text{-Mod}) & \xrightarrow{\otimes_R} & \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hot}(\text{Mod-}R)\times\mathrm{Hot}(R\text{-Mod}) & \xrightarrow{\otimes_R} & \mathrm{Hot}(\mathbb{Z}). \end{array}$$

Hinweis: Jede Homotopie zwischen Abbildungen im ersten Faktor liefert relativ schnell eine Homotopie zwischen den entsprechenden Abbildungen zwischen den Tensorprodukten. Im zweiten Faktor muss man mit den Vorzeichen aufpassen.

Aufgabe 6.6.12. Sei $A \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen von R-Linksmoduln. Sei F ein Komplex flacher R-Rechtsmoduln. Dann ist

$$F\otimes_R A \xrightarrow{\mathrm{id}_F\otimes i} F\otimes_R B \xrightarrow{\mathrm{id}_F\otimes p} F\otimes_R C$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen abelscher Gruppen.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $F\otimes_R^{\mathrm{bi}} A \xrightarrow{\mathrm{id}_F\otimes^{\mathrm{bi}} i} F\otimes_R^{\mathrm{bi}} B \xrightarrow{\mathrm{id}_F\otimes^{\mathrm{bi}} p} F\otimes_R^{\mathrm{bi}} C$ eine kurze exakte Sequenz von Bikomplexen (:= kurz exakte Sequenz abelscher Gruppen in jedem Grad $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$) ist.

[137] Er kommt vermutlich von einem Isomorphismus von Bikomplexen zwischen $A\otimes_R^{\mathrm{bi}} B$ und einer geeigneten „Spiegelung des Bikomplexes $B\otimes_R^{\mathrm{bi}} A$ an der ersten Winkelhalbierenden“.

Aufgabe 6.6.13. Seien R ein Ring und F ein Komplex flacher R-Rechtsmoduln mit $F_p = 0$ für alle $p < 0$. Sei A ein azyklischer Komplex von R-Linksmoduln (wer mag, darf annehmen, dass R kommutativ ist, was die Schwierigkeit der Aufgabe nicht verändert). Dann ist $F \otimes_R A$ azyklisch.

Hinweis: Der Bikomplex $F \otimes_R^{\mathrm{bi}} A$ hat zwei nützliche Eigenschaften; jeder Bikomplex mit diesen Eigenschaften hat azyklischen Totalkomplex, wie man per Diagrammjagd zeigen kann.

Bemerkung: In gehobener Terminologie (und minimal verallgemeinert) zeigt dies, dass jeder „in Pfeilrichtung der Differentiale beschränkte“ Komplex flacher Moduln h-flach (= „homotopie-flach“) ist. Dass auf die Beschränktheitsbedingung im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann, zeigt Aufgabe 6.6.14. (Beispielsweise im Fall $R = \mathbb{Z}$ kann auf die Beschränktheisbedingung verzichtet werden: Dies folgt aus Satz 7.6.2.)

Aufgabe 6.6.14. Betrachte den Komplex

$$F := (\dots \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \dots)$$

abelscher Gruppen. Bestimme $\mathrm{H}_0(F \otimes_{\mathbb{Z}} F)$ und zeige so insbesondere, dass diese abelsche Gruppe nicht Null ist.

Bemerkung: Der Komplex F ist azyklisch und besteht aus freien und damit flachen R-Moduln. Die Aufgabe zeigt, dass das Tensorprodukt eines Komplexes flacher Moduln mit einem azyklischen Komplex im Allgemeinen nicht azyklisch ist. In gehobener Terminologie bedeutet dies, dass Komplexe flacher Moduln im Allgemeinen nicht h-flach sind.

Ende der 25. Vorlesung am 04.02.2021.

6.7. Torsionsprodukt abelscher Gruppen.

6.7.1. Wir erklären nun das Torsionsprodukt $M * N = M *_{\mathbb{Z}} N$ zweier abelscher Gruppen M und N, welches eine abelsche Gruppe ist.

Allgemeiner kann man für $M \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ und $N \in R\text{-}\mathrm{Mod}$ das p-te Torsionsprodukt $\mathrm{Tor}_p^R(M, N)$ für alle $p \geq 0$ definieren, welches der p-te linksderivierte Funktor von $\otimes_R$ ausgewertet bei M, N ist. Es gilt stets $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$. Im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$ gelten $M * N = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, N)$ und $\mathrm{Tor}_p^{\mathbb{Z}}(M, N) = 0$ für alle $p > 1$.

6.7.2. Wir schreiben im Folgenden oft $\otimes$ statt $\otimes_{\mathbb{Z}}$. Ist M eine abelsche Gruppe, schreiben wir im Folgenden oft M statt $M[0]$ für den entsprechenden, im Grad Null konzentrierten Komplex (siehe Definition 5.1.3).

Definition 6.7.3. Sei M eine abelsche Gruppe. Betrachte den surjektiven Morphismus

$$\pi_M \colon \mathbb{Z}M = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow M,$$
$$\sum_{m \in M} x_m m = (x_m)_{m \in M} \mapsto \sum_{m \in M} x_m m,$$

abelscher Gruppen.[138] Wir notieren seinen Kern als $\mathrm{K}M$ und erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{K}M \xhookrightarrow{\kappa_M} \mathbb{Z}M \xrightarrow{\pi_M} M.$$

Wir nennen den Komplex

$$\mathcal{F}(M) := (\dots \to 0 \to \mathrm{K}M \xhookrightarrow{\kappa_M} \mathbb{Z}M \to 0 \to \dots)$$

abelscher Gruppen mit $\mathbb{Z}M$ im Grad Null zusammen mit dem Quasi-Isomorphismus

$$\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\pi_M} M = M[0],$$

der im Grad Null durch π_M und anderswo durch die Nullabbildung gegeben ist, die **Standardauflösung von** M.[139]

[138] Links ist hier die freie abelsche Gruppe über der *Menge* M gemeint, die man genauer als $\mathbb{Z}VM$ bezeichnen man, wobei $V \colon \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Set}$ der Vergissfunktor ist. Der angegebene Morphismus entspricht unter der Adjunktionsbijektion

$$\alpha_{VM,M} \colon \mathrm{Ab}(\mathbb{Z}VM, M) \xrightarrow[\sim]{(\mathrm{A}.0.3)} \mathrm{Set}(VM, VM)$$

der Identität auf der rechten Seite.

[139] Das $\mathcal{F}$ steht hier nicht für die Potenzmenge!

Die Zuordnung $M \mapsto \mathcal{F}(M)$ erweitert in offensichtlicher Weise (vgl. Fußnote 130) zu einem Funktor

$$\mathcal{F}\colon \operatorname{Mod}(\mathbb{Z}) \to \operatorname{Kom}(\mathbb{Z}).$$

Genauer definieren die Quasi-Isomorphismen π_M eine natürliche Transformation $\pi\colon \mathcal{F} \Rightarrow [0]\colon \operatorname{Mod}(\mathbb{Z}) \to \operatorname{Kom}(\mathbb{Z})$, wobei $[0]$ der Funktor ist, der einen abelsche Gruppe M auf den im Grad Null konzentrierten Komplex $M[0]$ abbildet.

6.7.4. Alle Komponenten der Standardauflösung $\mathcal{F}(M)$ von M sind torsionsfrei und somit flach (siehe Proposition 6.4.7). Genauer sind sie sogar frei nach Satz 6.8.2.

Definition 6.7.5. Das **Torsionsprodukt** zweier abelscher Gruppen M, $N \in \operatorname{Mod}(\mathbb{Z})$ ist durch

$$M * N := M *_{\mathbb{Z}} N := \mathrm{H}_1\big(\mathcal{F}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}(N)\big) = \mathrm{H}_1\big(\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N)\big)$$

definiert. (In der Literatur wird es meist als $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,N)$ notiert.)

Diese Konstruktion ist funktoriell: Der Funktor **Torsionsprodukt** ist definiert als die Verknüpfung

$$\operatorname{Mod}(\mathbb{Z}) \times \operatorname{Mod}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} \operatorname{Kom}(\mathbb{Z}) \times \operatorname{Kom}(\mathbb{Z}) \xrightarrow[(6.6.3)]{\otimes_{\mathbb{Z}}=\otimes} \operatorname{Kom}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{H}_1} \operatorname{Mod}(\mathbb{Z}).$$

Da $\mathbb{Z}$ kommutativ ist, durften wir hier implizit 6.6.10 verwenden.

6.7.6. Die Berechnung des Torsionsprodukts direkt aus dieser Definition macht vermutlich wenig Vergnügen.

6.7.7 (Symmetrie des Torsionsprodukts)**.** Der Isomorphismus $\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(N) \otimes \mathcal{F}(M)$ aus 6.6.10 liefert einen Isomorphismus $M * N \xrightarrow{\sim} N * M$ abelscher Gruppen.

Lemma 6.7.8 (Vereinfachte Berechnung des Torsionsprodukts bzw. der Homologie von $\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N)$)**.** *Sind M und N abelsche Gruppen, so ist der Morphismus*

$$\mathcal{F}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\pi_M \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(N)}} M \otimes \mathcal{F}(N)$$

ein Quasi-Isomorphismus. Insbesondere hat $\mathcal{F}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}(N)$ nur Homologie in den Graden 0 und 1 (da der rechte Komplex in diesen Graden konzentriert ist) und es gibt kanonische Isomorphismen

$$M * N = \mathrm{H}_1\big(\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1\big(M \otimes \mathcal{F}(N)\big) = \ker\big(M \otimes \mathrm{K}N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \kappa_M} M \otimes \mathbb{Z}N\big), \tag{6.7.1}$$

$$\mathrm{H}_0\big(\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0\big(M \otimes \mathcal{F}(M)\big) = \operatorname{cok}\big(M \otimes \mathrm{K}N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \kappa_M} M \otimes \mathbb{Z}N\big) \xrightarrow{\sim} M \otimes N$$

abelscher Gruppen (der zweite wegen der Rechtsexaktheit von $- \otimes N$). Ist M flach (= torsionsfrei), so gilt $M * N = 0$ (denn $\mathrm{id}_M \otimes \kappa_M$ ist injektiv).

Analoges gilt im zweiten Tensorfaktor.

Beweis. Der Kern der Standardauflösung $\pi_M\colon \mathcal{F}(M) \twoheadrightarrow M = M[0]$, die ein surjektiver Morphismus von Komplexen ist, ist der Komplex $U = (\dots 0 \to \mathrm{K}M \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{K}M \to 0 \to \dots)$ mit $\mathrm{K}M$ in den Graden 0 und 1. Der obere Teil des folgenden kommutativen Diagramms illustriert die nichttrivialen Komponenten in den Graden 0 und 1 der darunter angegebenen kurzen exakten Sequenz von Komplexen.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{K}M & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{K}M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_M} & & \downarrow \\
\mathrm{K}M & \xhookrightarrow{\kappa_M} & \mathbb{Z}M & \xrightarrow{\pi_M} & M
\end{array}$$

$$U \hookrightarrow \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\pi_M} M$$

Das Tensorprodukt dieser kurzen exakten Sequenz mit dem Komplex $\mathcal{F}(N)$ flacher Moduln ist nach Aufgabe 6.6.12 eine kurze exakte Sequenz

$$U \otimes \mathcal{F}(N) \hookrightarrow \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\pi_M \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(N)}} M \otimes \mathcal{F}(N) \tag{6.7.2}$$

von Komplexen. Da der Komplex U offensichtlich nullhomotop (= isomorph zu 0 in $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$) ist, ist auch $U \otimes \mathcal{F}(N)$ nullhomotop (nach Aufgabe 6.6.11) und insbesondere azyklisch. Die lange exakte Homologie-Sequenz zur kurzen exakten Sequenz (6.7.2) von Komplexen liefert zeigt dann, dass $\pi_M \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(N)}$ ein Quasi-Isomorphismus ist. □

6.7.9. Der Isomorphismus (6.7.1) zeigt $0 * N = 0$ und $(M \oplus M') * N \cong (M * N) \oplus (M' * N)$ (unter dem offensichtlichen Isomorphismus). Diese trivial erscheinenden Aussagen sind nicht unmittelbar aus Definition 6.7.5 ersichtlich!

Satz 6.7.10 (Tor-Sequenz oder Torsions-Sequenz im ersten Eintrag)**.** *Sei $M' \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{p}{\twoheadrightarrow} M''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Dann gibt es für jede abelsche Gruppe N eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow M' * N \xrightarrow{i*\mathrm{id}_N} M * N \xrightarrow{p*\mathrm{id}_N} M'' * N \xrightarrow{\delta} M' \otimes N \xrightarrow{i\otimes\mathrm{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{p\otimes\mathrm{id}_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

abelscher Gruppen, wobei die Definition der „Verbindungsabbildung δ“ aus dem Beweis hervorgeht. Diese Sequenz ist natürlich in N und in der kurzen exakten Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$.

Analoges gilt für kurze exakte Sequenzen im anderen Tensorfaktor.

6.7.11. Die obige exakte Sequenz erklärt, inwiefern das Tensorprodukt $- \otimes_N$ nicht exakt ist.

Beweis. Da $\mathcal{F}(N)$ aus flachen abelschen Gruppen besteht, ist nach Aufgabe 6.6.12

$$M' \otimes \mathcal{F}(N) \hookrightarrow M \otimes \mathcal{F}(N) \twoheadrightarrow M'' \otimes \mathcal{F}(N)$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen, die alle in den Graden 0 und 1 konzentriert sind. Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz mitsamt der Isomorphismen (6.7.1) liefert die gesuchte exakte Sequenz. Die Natürlichkeit ist klar nach Konstruktion. □

Korollar 6.7.12. *Eine abelsche Gruppe M ist genau dann flach, wenn $M * N = 0$ für alle abelschen Gruppen N gilt.*

Beweis. Ist M flach, so haben wir in bereits in Lemma 6.7.8 gesehen, dass alle $M * N$ verschwinden.

Gelte nun $M * N$ für alle abelschen Gruppen N. Sei $i\colon K \hookrightarrow L$ ein injektiver Morphismus abelscher Gruppen (vgl. 6.4.2). Dann erhalten wir nach Satz 6.7.10 (im anderen Tensorfaktor) eine exakte Sequenz

$$M * \frac{L}{K} \to M \otimes K \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes i} M \otimes L \to M \otimes \frac{L}{K} \to 0.$$

Wegen $M * \frac{L}{K} = 0$ ist $\mathrm{id}_M \otimes i$ wie gewünscht injektiv. □

Korollar 6.7.13 (Berechnung des Torsionsprodukts)**.** *Seien M und N abelsche Gruppen. Ist $U \hookrightarrow F \twoheadrightarrow M$ eine kurze exakte Sequenz, deren Mitte F eine flache (= torsionsfreie, beispielsweise freie) abelsche Gruppe ist. Dann hat der in den Graden 0 und 1 konzentrierte Komplex*

$$\ldots \to 0 \to U \otimes N \to F \otimes N \to 0 \to \ldots$$

erste Homologie kanonisch isomorph zu $M * N$ und nullte Homologie kanonisch isomorph zu $M \otimes N$.

Mit anderen Worten hat $U \otimes N \to F \otimes N$ als Kern $M * N$ und als Kokern $M \otimes N$.

6.7.14. Ein Beispiel für so eine kurze exakte Sequenz ist $\mathrm{K}M \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$.

Beweis. Satz 6.7.10 liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to U * N \to F * N \to M * N \xrightarrow{\delta} U \otimes N \to F \otimes N \twoheadrightarrow M \otimes N \to 0.$$

Weil F flach ist, gilt $F * N = 0$, und die Behauptung folgt. □

Beispiel 6.7.15. Sei $m \neq 0$ eine ganze Zahl. Die kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z} \overset{m\cdot}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ liefert nach Korollar 6.7.13 für jede abelsche Gruppe A den Isomorphismus

$$\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} * A \xrightarrow{\sim} A_m := \{a \in A \mid ma = 0\}.$$

Da A_m die sogenannte m-**Torsionsuntergruppe** von A ist[140] erklärt dies wohl den Namen Torsionsprodukt für die linke Seite.

Damit kann man das Torsionsprodukt jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe mit einer beliebigen abelschen Gruppe ausrechnen.

Korollar 6.7.16. *Sei $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Ist M'' flach, so ist das Tensorprodukt dieser kurzen exakten Sequenz mit einer beliebigen abelschen Gruppe N wiederum eine kurze exakte Sequenz*

$$M' \otimes N \hookrightarrow M \otimes N \twoheadrightarrow M'' \otimes N.$$

Beweis. Dies ist klar nach der Tor-Sequenz aus Satz 6.7.10, denn es gilt $M'' * N = 0$ wegen der Flachheit von M'' und Lemma 6.7.8. □

6.8. **Untergruppen freier abelscher Gruppen.**

6.8.1. Der Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen zeigt sofort, dass eine solche Gruppe genau dann frei ist, wenn sie torsionsfrei ist. Insbesondere ist jede Untergruppe einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe frei. Allgemeiner gilt der folgende Satz 6.8.2.

Satz 6.8.2. *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.*

Beweis. Sei $F = \mathbb{Z}I = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$ die freie abelsche Gruppe über einer Menge I und sei $U \subset F$ eine Untergruppe. Zu zeigen ist, dass U frei ist. Betrachte die Menge

$$\mathcal{M} := \big\{(J, B) \in \mathcal{P}(I) \times \mathcal{P}(F) \mid B \text{ ist } \mathbb{Z}\text{-Basis von } U \cap \mathbb{Z}J\big\}$$

aller Paare (J, B), wobei $J \subset I$ und $B \subset F$ Teilmengen sind, so dass B eine $\mathbb{Z}$-Basis von $U \cap \mathbb{Z}J$ ist. Diese Menge ist per

$$(J, B) \leq (K, C) \overset{\text{def.}}{\iff} J \subset K \text{ und } B \subset C$$

partiell geordnet. Sie ist nicht leer, da $(\varnothing, \varnothing) \in \mathcal{M}$. Ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ eine Kette (= (total) geordnete Teilmenge), so ist

$$\Big(\bigcup_{(J,B)\in\mathcal{K}} J, \bigcup_{(J,B)\in\mathcal{K}} B \Big)$$

ein Element von $\mathcal{M}$ und eine obere Schranke von $\mathcal{K}$ (der offensichtliche Beweis ist dem Leser überlassen). Nach dem Zornschen Lemma hat also $\mathcal{M}$ ein maximales Element (J, B). Im Fall $J = I$ sind wir fertig. Sonst sei $i \in I \setminus J$ beliebig. Sei V wie im folgenden kommutativen Diagramm angedeutet das Bild von $U \cap \mathbb{Z}(J \sqcup \{i\})$ unter der Projektion auf die i-te Komponente.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Z}I & \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_i\ } & \mathbb{Z} \\ & & \cup & & \cup \\ U \cap \mathbb{Z}J & \subset & U \cap \mathbb{Z}(J \sqcup \{i\}) & \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_i\ } & V \end{array}$$

Die untere Zeile ist offensichtlich eine kurze exakte Sequenz. Als Untergruppe von $\mathbb{Z}$ gilt $V = \mathbb{Z}r$ für eine eindeutige natürliche Zahl $r \in \mathbb{Z}$.

- Fall $r = 0$: Dann gilt $U \cap \mathbb{Z}J = U \cap \mathbb{Z}(J \sqcup \{i\})$. Somit ist $(J \sqcup \{i\}, B)$ ein Element von $\mathcal{M}$, das echt größer als (J, B) ist. Dies widerspricht der Maximalität von (J, B).
- Fall $r > 0$: Dann gibt es ein $b \in U \cap \mathbb{Z}(J \sqcup \{i\})$ mit $\mathrm{pr}_i(b) = r$. Beachte $b \notin B$ (wegen $\mathrm{pr}_i(B) = \{0\}$). Man prüft leicht direkt, dass $B \sqcup \{b\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $U \cap \mathbb{Z}(J \sqcup \{i\})$ ist.[141] Somit ist $(J \sqcup \{i\}, B \sqcup \{b\})$ ein Element von $\mathcal{M}$, das echt größer als (J, B) ist. Dies widerspricht der Maximalität von (J, B). □

[140] Achtung, ich unterscheide zwischen m-Torsionsuntergruppe und m-Potenz-Torsionsuntergruppe.

[141] Das folgt auch aus dem Beweis von Aufgabe 5.1.8: Die Abbildung $V = \mathbb{Z}r \to U \cap \mathbb{Z}(J \sqcup \{i\})$, $mr \mapsto mb$, ist eine Spaltung unserer kurzen exakten Sequenz.

6.9. **Universelles Koeffizientheorem für Komplexe freier abelscher Gruppen.**

Satz 6.9.1 (Universelles Koeffiziententheorem - Homologische-Algebra-Version)**.** *Seien A ein Komplex flacher abelscher Gruppen und M eine beliebige abelsche Gruppe. Dann gibt es für alle $q \in \mathbb{Z}$ eine kurze exakte Sequenz*

$$\mathrm{H}_q(A) \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{(6.5.5)} \mathrm{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} M) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{q-1}(A) * M$$

abelscher Gruppen. [142] *Diese kurze exakte Sequenz ist sowohl in Komplexen flacher abelscher Gruppen als auch in $M \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ natürlich.*

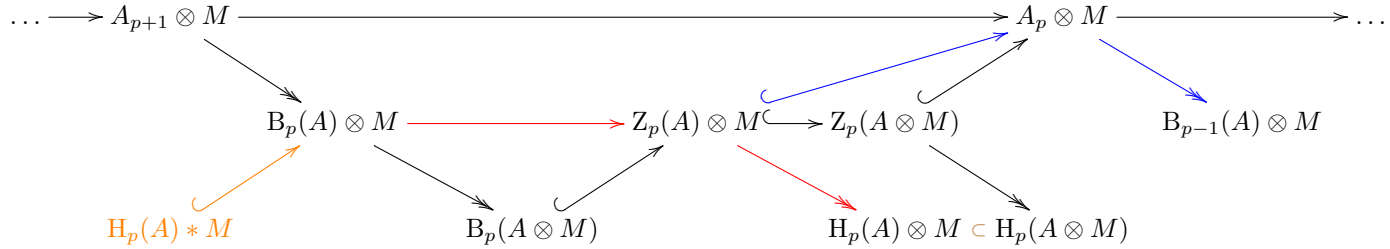
Sind sogar alle Komponenten von A frei, so gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q(A \otimes_{\mathbb{Z}} M) \cong \Big(\mathrm{H}_q(A) \otimes_{\mathbb{Z}} M\Big) \oplus \Big(\mathrm{H}_{q-1}(A) * M\Big)$$

abelscher Gruppen. Genauer spaltet die obige kurze exakte Sequenz, aber nicht Gegenbeispiel siehe Beweis von [HS97, Theorem V.2.1] natürlich in A (für fixiertes M).[143] [144]

Erster Beweis (von Hand; möglicherweise nah am historisch ersten Beweis). Wir schreiben $\otimes$ statt $\otimes_{\mathbb{Z}}$. Betrachte das Diagramm (6.5.1). In der dortigen blauen kurzen exakten Sequenz ist $B_{p-1}(A)$ als Untergruppe der flachen abelschen Gruppe A_{p-1} ebenfalls flach (nach Proposition 6.4.7). Somit zeigt Korollar 6.7.16, dass die blaue rechtsexakte Sequenz in Diagramm (6.5.2) sogar eine kurze exakte Sequenz ist. Wir expandieren dieses Diagramm zu dem folgenden kommutativen Diagramm, indem wir zusätzlich $\mathrm{Z}_p(A \otimes M)$ und $\mathrm{B}_p(A \otimes M)$ und $\mathrm{Z}_p(A \otimes M)$ eintragen. Nur $\mathrm{B}_p(A \otimes M)$ ist vielleicht erklärungbedürftig: Man faktorisiere den linken roten Pfeil in eine Surjektion gefolgt von einer Injektion und sieht sofort, dass das Bild der Surjektion $\mathrm{B}_p(A \otimes M)$ sein muss. Der braune und orange Teil ist zunächst zu ignorieren.

(6.9.1)



Da die rote Sequenz rechtsexakt ist, ist $\mathrm{H}_p(A) \otimes M$ der Quotient von $\mathrm{Z}_p(A) \otimes M$ modulo dem Bild der linken roten Abbildung, welches $\mathrm{B}_p(A \otimes M)$ ist; dies zeigt die folgende Gleichheit, die Inklusion ist dann offensichtlich; sie ist im obigen Diagramm braun eingezeichnet.

$$\mathrm{H}_p(A) \otimes M = \frac{\mathrm{Z}_p(A) \otimes M}{\mathrm{B}_p(A \otimes M)} \subset \frac{\mathrm{Z}_p(A \otimes M)}{\mathrm{B}_p(A \otimes M)} = \mathrm{H}_p(A \otimes M). \tag{6.9.2}$$

Der Kokern der Inklusion (6.9.2) ist offensichtlich zum Quotienten $\frac{\mathrm{Z}_p(A \otimes M)}{\mathrm{Z}_p(A) \otimes M}$ isomorph; somit bleibt zu zeigen, dass dieser Quotient zu $\mathrm{H}_{p-1}(A) * M$ isomorph ist.

Um weiter mit dem obigen Diagramm argumentieren zu können, zeigen wir stattdessen äquivalent einen Isomorphismus

$$\frac{\mathrm{Z}_{p+1}(A \otimes M)}{\mathrm{Z}_{p+1}(A) \otimes M} \cong \mathrm{H}_p(A) * M.$$

Betrachte die rote kurze exakte Sequenz in Diagramm (6.5.1). Ihre Mitte $\mathrm{Z}_p(A)$ (und auch ihr linker Term $\mathrm{B}_p(A)$) sind als Untergruppe der flachen (= torsionsfreien) abelschen Gruppe A_p flach. Somit können wir diese rote kurze exakte Sequenz nach Korollar 6.7.13 zum Berechnen von $\mathrm{H}_p(A) * M$ verwenden und sehen, dass $\mathrm{H}_p(A) * M$ wie im obigen Diagramm in orange angedeutet der Kern der roten horizontalen Abbildung ist, der sicherlich mit dem Kern der Abbildung $\mathrm{B}_p(A) \otimes M \twoheadrightarrow \mathrm{B}_p(A \otimes M)$ übereinstimmt. Offensichtlich gilt $\mathrm{B}_p(A \otimes M) = \frac{A_{p+1} \otimes M}{\mathrm{Z}_{p+1}(A \otimes M)}$ (vgl. die blaue kurze exakte Sequenzen im Diagramm (6.5.3)). Die blaue kurze

[142] Für fixiertes q existiert diese kurze exakte Sequenz bereits, falls A_{q-1} flach ist. (Nochmal checken!)

[143] Für fixiertes q existiert diese Spaltung bereits, falls A_{q-1} frei ist. (Nochmal checken!)

[144] Für fixiertes A spaltet sie natürlich in M.

exakte Sequenz im Diagramm (6.9.1) zeigt $\mathrm{B}_{p-1}(A)\otimes M = \frac{A_p\otimes M}{\mathrm{Z}_p(A)\otimes M}$ und analog für $\mathrm{B}_p(A)\otimes M$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_p(A)*M &= \ker\left(\mathrm{B}_p(A)\otimes M \twoheadrightarrow \mathrm{B}_p(A\otimes M)\right)\\ &= \ker\left(\frac{A_{p+1}\otimes M}{\mathrm{Z}_{p+1}(A)\otimes M} \twoheadrightarrow \frac{A_{p+1}\otimes M}{\mathrm{Z}_{p+1}(A\otimes M)}\right)\\ &\cong \frac{\mathrm{Z}_{p+1}(A\otimes M)}{\mathrm{Z}_{p+1}(A)\otimes M},\end{aligned}$$

wobei der letzte Isomorphismus die Inklusion $\mathrm{Z}_{p+1}(A)\otimes M \subset \mathrm{Z}_{p+1}(A\otimes M)$ verwendet, die (einen Grad tiefer) im Diagramm (6.9.1) beobachtet wurde.

Unsere bisherigen Konstruktionen sind offensichtlich natürlich in komponentenweise flachen Komplexen A und beliebigen abelschen Gruppen M.

Seien nun alle Komponenten von A freie (und somit flache) abelsche Gruppen. Die blaue kurze exakte Sequenz im Diagramm (6.5.1) spaltet nach Aufgabe 5.1.8, denn $B_{p-1}(A)$ ist als Untergruppe der freien abelschen Gruppe A_{p-1} frei nach Satz 6.8.2. Dies impliziert, dass auch die blaue exakte Sequenz im Diagramm (6.9.1) spaltet: Genauer liefert jede Spaltung σ der Injektion $\mathrm{Z}_p(A)\hookrightarrow A_p$ eine Spaltung $\sigma\otimes\mathrm{id}_M$ der (somit injektiven) Abbildung $\mathrm{Z}_p(A)\otimes M\to A_p\otimes M$ (= der linke blaue Pfeil in Diagramm (6.9.1). Diese Spaltung $\sigma\otimes\mathrm{id}_M$ restringiert offensichtlich zu einer Spaltung der Injektion $\mathrm{Z}_p(A)\otimes M\hookrightarrow \mathrm{Z}_p(A\otimes M)$ und steigt zu einer Spaltung der braunen Inklusion (6.9.2) ab. □

Zweiter Beweis. Wir tensorieren die kurze exakte Sequenz $\mathrm{K}M\hookrightarrow\mathbb{Z}M\twoheadrightarrow M$ abelscher Gruppen mit dem Komplex A, dessen Komponenten nach Annahme flach sind. Somit ist das Resultat nach Aufgabe 6.6.12 (wo die kurze exakte Sequenz sogar aus Komplexen bestehen darf) eine kurze exakte Sequenz

$$A\otimes\mathrm{K}M\hookrightarrow A\otimes\mathbb{Z}M\twoheadrightarrow A\otimes M. \tag{6.9.3}$$

Da $\mathbb{Z}M$ und $\mathrm{K}M$ flach sind, liefert Proposition 6.5.5 Isomorphismen

$$\mathrm{H}_q(A)\otimes\mathrm{K}M \xrightarrow[\sim]{(6.5.5)} \mathrm{H}_q(A\otimes\mathrm{K}M),$$
$$\mathrm{H}_q(A)\otimes\mathbb{Z}M \xrightarrow[\sim]{(6.5.5)} \mathrm{H}_q(A\otimes\mathbb{Z}M).$$

Modulo dieser Isomorphismen ist die lange exakte Homologie-Sequenz zur kurzen exakten Sequenz (6.9.3) die exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_q(A)\otimes\mathrm{K}M\to\mathrm{H}_q(A)\otimes\mathbb{Z}M\to\mathrm{H}_q(A\otimes M)\to\mathrm{H}_{q-1}(A)\otimes\mathrm{K}M\to\mathrm{H}_{q-1}(A)\otimes\mathbb{Z}M.$$

Nach Lemma 6.7.8 (oder Korollar 6.7.13) hat die linke Abbildung Kokern $\mathrm{H}_q(A)\otimes M$ und die rechte Kern $\mathrm{H}_{q-1}(A)*M$. Somit[145] ergibt sich eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_q(A)\otimes M\hookrightarrow\mathrm{H}_q(A\otimes M)\twoheadrightarrow\mathrm{H}_{q-1}(A)*M.$$

Diese ist offensichtlich natürlich in A und M. Die Spaltbarkeit dieser kurzen exakten Sequenz im Fall, dass A freie Komponenten hat, wird wie im ersten Beweis gezeigt. □

6.10. **Das universelle Koeffiziententheorem der singulären Homologie.**

Satz 6.10.1 (Universelles Koeffiziententheorem der singulären Homologie, vgl. [Wik20, Universeller Koeffizientensatz, Homologische Fassung])**.** *Seien X ein topologischer Raum und M eine abelsche Gruppe (= ein $\mathbb{Z}$-Modul). Dann gibt es für alle $q\in\mathbb{Z}$ eine kurze exakte Sequenz*

$$\mathrm{H}_q(X)\otimes_{\mathbb{Z}} M \xhookrightarrow{(6.5.6)} \mathrm{H}_q(X;M)\twoheadrightarrow \mathrm{H}_{q-1}(X)*M$$

abelscher Gruppen, wobei wir wie üblich $\mathrm{H}_q(X)=\mathrm{H}_q(X;\mathbb{Z})$ abkürzen. Diese kurze exakte Sequenz ist sowohl in $X\in\mathrm{Top}$ als auch in $M\in\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ natürlich.

[145] Ist $U\xrightarrow{u}V\xrightarrow{v}W\xrightarrow{w}X\xrightarrow{x}Y$ eine exakte Sequenz abelscher Gruppen, so ist sicherlich $v(V)\hookrightarrow W\twoheadrightarrow w(W)$ eine kurze exakte Sequenz und es gelten $v(V)=\frac{V}{\ker(v)}=\frac{V}{u(U)}=\mathrm{cok}(u)$ und $w(W)=\ker(x)$.

Außerdem gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_q(X;M) \cong \Big(\mathrm{H}_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M\Big) \oplus \Big(\mathrm{H}_{q-1}(X) * M\Big)$$

abelscher Gruppen. Genauer spaltet die obige kurze exakte Sequenz, aber nicht natürlich in X (für fixiertes M). Gegenbeispiel fehlt![146] [147]

Beweis. Mit dem kanonischen Isomorphismus $\mathrm{S}X \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathrm{S}(X;M)$ aus Korollar 6.5.6 folgt dies sofort aus Satz 6.9.1. □

Beispiel 6.10.2. Erkläre Beispiele (dies wird in einer der Hausaufgaben erklärt): Tensoriere $\mathbb{Z}$-Homologie $\oplus$ verschobenes von $*$ von $\mathbb{Z}$-Homologie.

6.10.3. Da die nullte Homologie $\mathrm{H}_0(X)$ stets eine freie abelsche Gruppe ist (Lemma 3.1.24), ist sie flach. Folglich ist die offensichtliche Abbildung stets eine Isomorphismus

$$\mathrm{H}_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(X;M) \tag{6.10.1}$$

nach Satz 6.10.1.

Ende der 26. Vorlesung am 05.02.2021.

Hausaufgaben:

(1) Aufgabe 6.6.11 ($\otimes$ wohldefiniert auf der Homotopiekategorie von Komplexen)
(2) Aufgabe 6.6.12 (Tensorprodukt mit Komplex flacher Moduln erhält kurze exakte Sequenzen von Komplexen)
(3) Aufgabe 6.6.13
(4)
- Berechne $A * A$ für $A := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- Bestätige das universelle Koeffiziententheorem der singulären Homologie 6.10.1 an allen Flächen aus Satz 4.6.3.

(5) Bonus: Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die Spaltung in Satz 6.9.1 bzw. noch besser in Satz 6.10.1 nicht natürlich gewählt werden kann (ich hoffe: weder in M noch in A bzw. X).
(6) Bonus: Aufgabe 6.6.14

Proposition 6.10.4. *Weggelassen in Vorlesung Sei $f\colon X \to X$ eine stetige Selbstabbildung eines topologischen Raums. Ist für jedes n die abelsche Gruppe $\mathrm{H}_n(X)$ endlich erzeugbar und verschwinden alle bis auf endlich viele der $\mathrm{H}_n(X)$,*[148] *so ist (die rationale Zahl) $\Lambda_{f,\mathbb{Q}}$ eine ganze Zahl und es gilt*

$$\Lambda_{f,k} = \Lambda_{f,\mathbb{Q}}$$

in k für jeden Körper k (rechts ist das Bild von $\Lambda_{f,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}$ unter dem eindeutigen Ringmorphismus $\mathbb{Z} \to k$ gemeint).

(Im Beweis wird die schöne Formel (6.10.8) mitbewiesen (Notation ebenfalls im Beweis erklärt), die nur von $\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(f;\mathbb{Z})$ abhängt. Dies ist die Definition der Lefschetz-Zahl in [Mun84]*.)*

Insbesondere gelten $\chi(X;\mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}$ und

$$\chi(X;k) = \chi(X;\mathbb{Q})$$

für alle Körper k (nimm $f = \mathrm{id}_X$ und verwende 4.14.4).

Beweis. Beweis selbst zusammengeschustert. Geht das einfacher? Besser in einige Lemmata zerlegen? Allgemeinere Aussage beweisen (rein algebraisch)? Kann ich was in der Literatur finden?

Wir können uns auf die Fälle $k = \mathbb{Q}$ und $k = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p beschränken, denn für allgemeines k mit Primkörper l ist $\otimes_l k\colon \mathrm{Mod}(l) \to \mathrm{Mod}(k)$ exakt und somit $\mathrm{H}(X;l) \otimes_l k \to \mathrm{H}(X;k)$ ein Isomorphismus

[146] Eventuell Fußnoten aus Satz 6.9.1 sinngemäß ergänzen.

[147] Für fixiertes X spaltet sie natürlich in M.

[148] Folgt das schon aus der entsprechenden Aussage mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten? Ziemlich sicher nicht: Konstruiere Raum mit einer Homologiegruppe isomorph zu abzählbar vielen Kopien von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alle anderen harmlos. Vielleicht Einpunktvereinigung von abzählbar vielen reellen projektiven Ebenen? (Umgekehrt stimmt es sicher und wird wohl im folgenden Beweis verwendet, ich sollte es aber vielleicht separat aufschreiben.)

(wende den Funktor $\otimes_l k$ auf das Diagramm (4.9.4) für $A = \mathrm{S}(X;l)$ an), unter dem sich $\mathrm{H}(f;l) \otimes_l \mathrm{id}_k$ und $\mathrm{H}(f;k)$ entsprechen. Es folgt

$$\mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f;k)\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f;l) \otimes \mathrm{id}_k\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f;l)\big),$$

wobei die letzte Gleichung offensichtlich ist.

Gelte also ohne Einschränkung $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p.

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$ und $* = *_{\mathbb{Z}}$. Nach Satz 6.10.1 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}_n(X) \otimes k & \hookrightarrow & \mathrm{H}_n(X;k) & \twoheadrightarrow & \mathrm{H}_{n-1}(X) * k \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_n(f)\otimes \mathrm{id}_k} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_n(f;k)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_{n-1}(f)*\mathrm{id}_k} \\ \mathrm{H}_n(X) \otimes k & \hookrightarrow & \mathrm{H}_n(X;k) & \twoheadrightarrow & \mathrm{H}_{n-1}(X) * k \end{array} \tag{6.10.2}$$

abelscher Gruppen (genauer von k-Vektorräumen! klar oder zu erklären?). Beachte, dass beide Randterme endlich-dimensionale k-Vektorräume sind (muss $\mathbb{Z}/q^n * \mathbb{F}_p$ und $\mathbb{Z}/q^n * \mathbb{Q}$ ausrechnen, falls nicht bekannt; Hauptsatz erwähnen). Die Additivitität der Spur liefert

$$\mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f;k)\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f) \otimes \mathrm{id}_k\big) + \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_{n-1}(f) * \mathrm{id}_k\big) \qquad \text{in } k. \tag{6.10.3}$$

Sei $\alpha\colon A \to A$ ein Endomorphismus einer endlich erzeugten abelschen Gruppe (etwa $\mathrm{H}_n(f)\colon \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$). Sei $\mathrm{T}(A) = \bigoplus_q \mathrm{T}_q(A)$ die Torsionsuntergruppe von A. Dann gilt $\mathrm{T}(A) = \bigoplus_q \mathrm{T}_q(A)$, wobei q alle Primzahlen durchläuft und $\mathrm{T}_q(A) := \{a \in A \mid q^m a = 0 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$ die q-Potenz-Torsions-Untergruppe[149] ist. Wir erhalten einen Endomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus \mathrm{T}_q(A) & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\mathrm{T}(A)} \\ \downarrow{\scriptstyle \bigoplus \alpha_q} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\alpha}} \\ \bigoplus \mathrm{T}_q(A) & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\mathrm{T}(A)} \end{array} \tag{6.10.4}$$

der angegebenen kurzen exakten Sequenz (beachte, dass α jede der Untergruppen $\mathrm{T}_q(A)$ in sich abbildet – die induzierte Abbbildung ist hier als α_q notiert). Dies kurze exakte Sequenz spaltet[150] (aber im Allgemeinen nicht kompatibel mit α). Alle hier vorkommenden abelschen Gruppen sind endlich erzeugbar (Lemma 4.8.17).

Da $\frac{A}{\mathrm{T}(A)}$ isomorph zu $\mathbb{Z}^r$ ist, für ein geeignetes $r \in \mathbb{Z}$, kann man die Spur $\mathrm{tr}(\overline{\alpha}) \in \mathbb{Z}$ (eine ganze Zahl!) in offensichtlicher Weise definieren (stelle als $\overline{\alpha}$ bezüglich einer beliebigen $\mathbb{Z}$-Basis als Matrix dar, nimm die Summe der Diagonaleinträge; dies ist unabhängig von Wahl der $\mathbb{Z}$-Basis).

Wenden wir auf (6.10.4) den Funktor $\otimes k$ an (der mit direkten Summen vertauscht), so erhalten wir den Endomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus(\mathrm{T}_q(A) \otimes k) & \hookrightarrow & A \otimes k & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\mathrm{T}(A)} \otimes k \\ \downarrow{\scriptstyle \bigoplus(\alpha_q\otimes \mathrm{id}_k)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\otimes\mathrm{id}_k} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\alpha}\otimes\mathrm{id}_k} \\ \bigoplus(\mathrm{T}_q(A) \otimes k) & \hookrightarrow & A \otimes k & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\mathrm{T}(A)} \otimes k \end{array} \tag{6.10.5}$$

der angegebenen (spaltenden) kurzen exakten Sequenz von *endlichdimensionalen* k-Vektorräumen (da die vorige kurze exakte Sequenz spaltend war). Analog können wir auf (6.10.4) den Funktor k anwenden (der mit direkten Summen vertauscht) und erhalten wegen $\frac{A}{\mathrm{T}(A)} * k = 0$ (da $\frac{A}{\mathrm{T}(A)} \cong \mathbb{Z}^r$ flach) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus(\mathrm{T}_q(A) * k) & \xrightarrow{\sim} & A * k \\ \downarrow{\scriptstyle \bigoplus(\alpha_q * \mathrm{id}_k)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha*\mathrm{id}_k} \\ \bigoplus(\mathrm{T}_q(A) * k) & \xrightarrow{\sim} & A * k \end{array} \tag{6.10.6}$$

[149] Oft auch einfach q-Torsionsuntergruppe genannt.

[150] Besser wäre die Terminologie „ist spaltbar“.

mit Isomorphismen als horizontale Abbildungen.

- Fall $k = \mathbb{Q}$. Die Terme links in (6.10.5) sind Null und wir erhalten

$$\operatorname{tr}(\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}) = \operatorname{tr}(\overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}) = \operatorname{tr}(\overline{\alpha}), \tag{6.10.7}$$

wobei die letzte Gleichheit offensichtlich ist. Diese Gleichheit gilt a priori in $\mathbb{Q}$, aber da rechts offensichtlich eine ganze Zahl steht, gilt sie bereits in $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Da in (6.10.2) die beiden Terme auf der rechten Seite verschwinden (da $\mathbb{Q}$ als Lokalisierung ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul), erhalten wir

$$\operatorname{tr}\big(\mathrm{H}_n(f;\mathbb{Q})\big) \overset{(6.10.3)}{=} \operatorname{tr}\big(\mathrm{H}_n(f) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\big) \overset{(6.10.7)}{=} \operatorname{tr}\Big(\overline{\mathrm{H}_n(f)}\Big) \qquad \text{in } \mathbb{Z}.$$

Somit gilt

$$\Lambda_{f,\mathbb{Q}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}\Big(\overline{\mathrm{H}_n(f)}\Big) \qquad \text{in } \mathbb{Z}. \tag{6.10.8}$$

- Fall $k = \mathbb{F}_p$. Wir behaupten, dass $\mathrm{T}_q(A) \otimes \mathbb{F}_p$ und $\mathrm{T}_q(A) * \mathbb{F}_p$ für $q \neq p$ verschwinden (was vermutlich wohlbekannt ist).

  Wir verwenden die freie (und damit flache) Auflösung $(\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p\cdot} \mathbb{Z}) \to \mathbb{F}_p$ von $\mathbb{F}_p$ als abelsche Gruppe ist (sie ist in den Graden 1 und 0 konzentriert). Ihr Tensorprodukt mit $\mathrm{T}_q(A)$ ist kanonische isomorph zu $\ldots \to 0 \to \mathrm{T}_q(A) \xrightarrow{p} \mathrm{T}_q(A) \to 0 \to \ldots$. Erste bzw. nullte Homologie dieses Komplexes sind mehr oder weniger per Definition $\mathrm{T}_p(A) * \mathbb{F}_p$ bzw. $\mathrm{T}_p(A) \otimes \mathbb{F}_p$. Mit anderen Worten ist

$$0 \to \mathrm{T}_q(A) * \mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathrm{T}_q(A) \xrightarrow{p} \mathrm{T}_q(A) \twoheadrightarrow \mathrm{T}_q(A) \otimes \mathbb{F}_p \to 0 \tag{6.10.9}$$

eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Für $p \neq q$ ist die Abbildung $\mathrm{T}_q(A) \xrightarrow{p} \mathrm{T}_q(A)$ bijektiv (da p und q und damit p und q^m ggT Eins haben und es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mathrm{T}_q(A) = \{a \in A \mid q^m a = 0)$. Also folgt die Behauptung.

Im Diagramm (6.10.5) überlebt links also nur die Abbildung $\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}$. Additivität der Spur liefert somit

$$\operatorname{tr}(\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) = \operatorname{tr}(\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) + \underbrace{\operatorname{tr}(\overline{\alpha} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})}_{=\operatorname{tr}(\overline{\alpha})} \qquad \text{in } \mathbb{F}_p, \tag{6.10.10}$$

wobei die Gleichheit zum unterklammerten Term offensichtlch ist (dieser lebt in $\mathbb{Z}$, aber hier ist sein Bild unter $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ gemeint). Analog überlebt im Diagramm (6.10.6) links nur die Abbildung $\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}$ und wir erhalten

$$\operatorname{tr}(\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) = \operatorname{tr}(\alpha * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) \qquad \text{in } \mathbb{F}_p. \tag{6.10.11}$$

Wir behaupten

$$\operatorname{tr}(\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_q}) = \operatorname{tr}(\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}). \tag{6.10.12}$$

Tensorieren wir die obige Auflösung $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}$ von $\mathbb{F}_p$ nun mit $\alpha_p \colon \mathrm{T}_p(A) \to \mathrm{T}_p\, a$, so erhalten wir den Endomorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{T}_p(A) * \mathbb{F}_p & \hookrightarrow & \mathrm{T}_p(A) & \xrightarrow{p} & \mathrm{T}_p(A) & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_p(A) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{T}_p(A) * \mathbb{F}_p & \hookrightarrow & \mathrm{T}_p(A) & \xrightarrow{p} & \mathrm{T}_p(A) & \twoheadrightarrow & \mathrm{T}_p(A) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow 0
\end{array} \tag{6.10.13}$$

der angegebenen exakten Sequenzen abelscher Gruppen (welche (6.10.9) für $q = p$ ist).[151] Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\mathrm{T}_p(A) = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ für geeignete $t \in \mathbb{N}$ und $m_i \in \mathbb{N}_{>0}$

[151] Ein fehlerhafter Beweis geht nun wie folgt: Aus der Additivität der Spur oder abstrakter aus Lemma 4.10.8 erhalten wir wie gewünscht

$$0 = \operatorname{tr}(\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_q}) - \operatorname{tr}(\alpha_p) + \operatorname{tr}(\alpha_p) - \operatorname{tr}(\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) = \operatorname{tr}(\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_q}) - \operatorname{tr}(\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}).$$

Das Problem ist, dass wir keine exakte Sequenz von $\mathbb{F}_p$-Vektorräumen haben, die Spur $\operatorname{tr}(\alpha_p)$ also nicht definiert ist. (Dasselbe Argument würde auch für beliebiges endlich erzeugte A (samt $\alpha \colon A \to A$) statt $\mathrm{T}_p(A)$ funktionieren, wo es die offensichtlich

gilt (wir verlangen nicht, dass α mit dieser direkten Summenzerlegung kompatibel ist). Dann wird (6.10.13) zu (bzw. genauer kann es kanonisch mit dem folgenden identifiziert werden; die linken horizontalen Inklusionen sind Multiplikation mit p^{m_i-1} in der i-ten Komponente; diese Inklusionen gehen isomorph auf den Kern der nächsten horizontalen Abbildung)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xhookrightarrow{\oplus p^{m_i-1}} & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}} & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xhookrightarrow{\oplus p^{m_i-1}} & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Wir schreiben α_p als Matrix $\big((\alpha_p)_{ij}\big)_{i,j}$ bezüglich unserer direkten Summenzerlegung und analog für die anderen beiden Vertikalen. (Wir sind wegen der Spurberechnung im Folgenden nur an den Diagonaleinträgen interessiert.) Einschränken unseres vertikalen Morphismus auf die i-ten Komponenten (Präkomposition mit den i-ten Inklusionen) und Hintendranhängen der Projektionen auf die i-ten Komponenten liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xhookrightarrow{p^{m_i-1}} & \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})_{ii}} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha_p)_{ii}} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha_p)_{ii}} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})_{ii}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \xhookrightarrow{p^{m_i-1}} & \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Nun ist $(\alpha_p)_{ii}$ ein Endomorphismus von $\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ alias ein Element von $\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ (also genauer Multiplikation mit diesem (eindeutigen) Element. Analog sind die beiden äußeren Vertikalen durch Elemente von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ gegeben. Da das obige Diagramm kommutiert, wenn man alle Vertikalen durch Multiplikation mit der jeweiligen Klasse eines Elements $d \in \mathbb{Z}$ ersetzt, folgt

$$(\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})_{ii} = (\alpha_p)_{ii} = (\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})_{ii} \qquad \text{in } \mathbb{F}_p$$

für alle $i = 1, \dots, t$. Dies folgt sofort die behauptete Gleichheit (6.10.12).

Nun können wir die obigen Gleichheiten kombinieren und erhalten

$$\mathrm{tr}(\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) \overset{(6.10.10)}{=} \mathrm{tr}(\alpha_p \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) + \mathrm{tr}(\overline{\alpha}) \overset{(6.10.12)}{=} \mathrm{tr}(\alpha_p * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) + \mathrm{tr}(\overline{\alpha}) \overset{(6.10.11)}{=} \mathrm{tr}(\alpha * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}) + \mathrm{tr}(\overline{\alpha})$$

Im Spezialfall $\alpha = \mathrm{H}_n(f)$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f; \mathbb{F}_p)\big) &\overset{(6.10.3)}{=} \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_{n-1}(f) * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}\big) \\
&= \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_n(f) * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}\big) + \mathrm{tr}\big(\overline{\mathrm{H}_n(f)}\big) + \mathrm{tr}\big(\mathrm{H}_{n-1}(f) * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}\big).
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\Lambda_{f,\mathbb{F}_p} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \mathrm{tr}\Big(\overline{\mathrm{H}_n(f)}\Big) \qquad \text{in } \mathbb{F}_p.$$

Da wir oben die analoge Formel für $\Lambda_{f,\mathbb{Q}}$ bewiesen haben, ist die Proposition bewiesen. □

7. Künnethformeln

7.0.1. Das Ziel dieses Abschnitts sind die Künneth-Formeln für singuläre Homologie in Satz 7.6.4. Dies bedarf einiger Vorbereitungen.

---

falsche Behauptung

$$\mathrm{tr}(\alpha * \mathrm{id}_{\mathbb{F}_q}) = \mathrm{tr}(\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p})$$

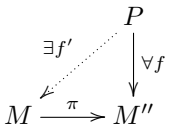
liefern würde (nimm etwa $A = \mathbb{Z}$ und $\alpha = \mathrm{id}$, so dass $\mathbb{Z} * \mathbb{F}_q = 0$ gilt).)

7.1. **Hauptsatz der homologischen Algebra.** Sei R ein Ring. Mit einem R-Modul meinen wir einen R-Linksmodul.[152]

Definition 7.1.1. Ein R-Modul P heißt **projektiv**, falls für jeden surjektiven Morphismus $\pi\colon M \twoheadrightarrow M''$ von R-Moduln die Abbildung

$$\pi_* = (\pi\circ?)\colon \operatorname{Hom}_R(P, M) \to \operatorname{Hom}_R(P, M'')$$

surjektiv ist. Zur Illustration ein Bild:



7.1.2. Ein R-Modul P ist genau dann projektiv, wenn der Funktor $\operatorname{Hom}_R(P, -)\colon \operatorname{Mod}(R) \to \operatorname{Mod}(\mathbb{Z})$ exakt ist (er ist stets linksexakt nach Aufgabe 6.3.8.(a)).

Proposition 7.1.3. *Ein R-Modul ist genau dann projektiv, wenn er ein direkter Summand eines freien R-Moduls ist.*

Beweis. Direkte Summanden freier sind projektiv:

- Der freie R-Modul R vom Rang Eins ist projektiv, denn der Isomorphismus
$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_R(R, M) &\xrightarrow{\sim} M,\\ f &\mapsto f(1),\end{aligned}$$
(abelscher Gruppen) ist natürlich in $M \in \operatorname{Mod}(R)$.
- Ist $(P_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln, so ist der Isomorphismus
$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I} P_i, M\Big) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(P_i, M),\\ f &\mapsto (f\circ \operatorname{incl}_i)_{i\in I},\end{aligned}$$
bijektiv. Daraus folgt sofort, dass $\bigoplus P_i$ genau dann projektiv ist, wenn alle P_i projektiv sind.
- Aus den beiden vorigen Punkten folgt zuerst, dass jeder Modul der Form $\bigoplus_{i\in I} R$ projektiv ist; dann folgt, dass jeder direkte Summand eines solchen Moduls projektiv ist.

Projektive Moduln sind direkte Summanden freier: Sei P ein projektiver Modul. Dann gibt es sicherlich einen surjektiven Modulmorphismus $\pi\colon F \twoheadrightarrow P$ von einem freien Modul F auf P (etwa die offensichtliche Abbildung $RP = \bigoplus_{p\in P} R \twoheadrightarrow P$). Da P projektiv ist, kommt id_P von einem Morpismus $g\colon P \to F$ in dem Sinne, dass $\pi \circ g = \mathrm{id}_P$ gilt. Es folgt $F \cong P \oplus \ker(\pi)$ (wende Aufgabe 5.1.8 auf die kurze exakte Sequenz $\ker(\pi) \hookrightarrow F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} P$ an). □

Korollar 7.1.4. *Eine abelsche Gruppe (alias ein $\mathbb{Z}$-Modul) ist genau dann projektiv, wenn sie frei ist.*

Beweis. Jeder freie abelsche Gruppen ist projektiv nach Proposition 7.1.3. Jede projektive abelsche Gruppe ist nach derselben Proposition ein direkter Summand einer freien abelschen Gruppe, also frei als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe nach Satz 6.8.2. □

Satz 7.1.5 (Hauptsatz (oder Hauptlemma) der homologischen Algebra)**.** *In Vorlesung eventuell ersten Reduktionsschritt weglassen, gleich in Annahme packen. Sei R ein Ring. Sei P ein Komplex projektiver R-Moduln mit $P_p = 0$ für alle $p < 0$ und E ein Komplex von R-Moduln mit $\mathrm{H}_p(E) = 0$ für alle $p > 0$. (In Worten ist P also ein in nichtnegativen Graden konzentrierter Komplex projektiver Moduln und E ist ein in positiven Graden azyklischer Komplex.)*[153] *Dann ist das Bilden der nullten Homologie ein Isomorphismus*

$$\mathrm{H}_0\colon \operatorname{Hot}_R(P, E) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R\big(\mathrm{H}_0(P), \mathrm{H}_0(E)\big). \tag{7.1.1}$$

[152] Der Fall von Rechtsmoduln ist damit mitbehandelt, denn es gilt $\text{Mod-}R = R^{\mathrm{op}}\text{-Mod}$. Auch der Fall von Bimoduln ist mitbehandelt, denn es gilt $R\text{-Mod-}S = R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\mathrm{op}}\text{-Mod}$, wobei hier die Kenntnis vorausgesetzt wird, dass $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\mathrm{op}}$ ein Ring ist.

[153] Offensichtlich steht der Buchstabe P für *projektiv*. Der Buchstabe E steht für *exakt*.

Beweis. Betrachte einen Morphismus $f\colon P \to E$ in $\mathrm{Kom}(R)$ und eine Homotopie h wie im folgenden Diagramm angedeutet.

(7.1.2)
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & E_{-1} & \longrightarrow & \ldots \\
 & \overset{h_2}{\swarrow} & \uparrow{\scriptstyle f_2} & \overset{h_1}{\swarrow} & \uparrow{\scriptstyle f_1} & \overset{h_0}{\swarrow} & \uparrow{\scriptstyle f_0} & \overset{h_{-1}}{\swarrow} & \uparrow{\scriptstyle f_{-1}} & & \\
\ldots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Da f_0 notwendig in $\mathrm{Z}_0(E)$ landet und $f_p = 0$ für alle $p < 0$ gilt, landet f im Unterkomplex

$$\ldots \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathrm{Z}_0(E) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

von E. Wegen $h_p = 0$ für alle $p < 0$ landet h ebenfalls in diesem Unterkomplex. Da außerdem die Inklusion dieses Unterkomplexes nach E auf H_0 (und genauer auf allen nichtnegativen Homologien) einen Isomorphismus induziert, können wir ohne Einschränkung E durch diesen Unterkomplex ersetzen. Wir nehmen also im Folgenden $E_p = 0$ für alle $p < 0$ an. Insbesondere gilt $E_0 = \mathrm{Z}_0(E)$ und die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow \mathrm{H}_0(E) \longrightarrow 0$$

ist exakt. Drehen wir diese Sequenz um 90° im Gegenuhrzeigersinn und wenden darauf die exakten Funktoren $\mathrm{Hom}(P_p, -) := \mathrm{Hom}_R(P_p, -)$ an, so erhalten wir die exakten Spalten des folgenden kommutativen Diagramms abelscher Gruppen; die horizontalen Abbildungen sind die offensichtlichen; die Inklusion rechts oben kommt von der Surjektion $P_0 = \mathrm{Z}_0(P) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_0(P)$ her.

(7.1.3)
$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathrm{Hom}(P_2, \mathrm{H}_0(E)) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_1, \mathrm{H}_0(E)) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_0, \mathrm{H}_0(E)) & \supset & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_0(P), \mathrm{H}_0(E)) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathrm{Hom}(P_2, E_0) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_1, E_0) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_0, E_0) & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathrm{Hom}(P_2, E_1) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_1, E_1) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_0, E_1) & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathrm{Hom}(P_2, E_2) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_1, E_2) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(P_0, E_2) & &
\end{array}$$

Man stelle sich das Diagramm nach links und unten unendlich fortgesetzt vor. Alle Spalten sind nach dem obigen Argument exakt; außerdem ist die Verknüpfung je zweier konsekutiver waagerechter Pfeile Null, wobei wir die Inklusion rechts oben auch als waagrechten Pfeil interpretieren.

Ein Morphismus $f\colon P \to E$ in $\mathrm{Kom}(R)$ wie in (7.1.2) illustriert hat Komponenten $f_0, f_1, \ldots$ in den roten Morphismenmengen[154]. Sein Bild $\mathrm{H}_0(f)\colon \mathrm{H}_0(P) \to \mathrm{H}_0(E)$ unter der Abbildung (7.1.1) ist das Bild von f_0 unter dem Pfeil nach oben, aufgefasst als Element der blauen Teilmenge, in welcher es automatisch liegt, denn es geht nach links auf Null und die Sequenz $\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_0(P), \mathrm{H}_0(E)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, \mathrm{H}_0(E)) \to \mathrm{Hom}(P_1, \mathrm{H}_0(E))$ ist linksexakt, da $P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow \mathrm{H}_0(P)$ rechtsexakt ist (siehe Aufgabe 6.3.8.(b)).

Man beachte, dass eine Familie $\big(f_p \in \mathrm{Hom}(P_p, E_p)\big)_{p \geq 0}$ von Elementen der Mengen auf der roten Diagonalen genau dann einen Morphismus $f\colon P \to E$ in $\mathrm{Kom}(R)$ definiert, wenn das Bild jedes f_p unter dem Pfeil nach links mit dem Bild von f_{p+1} unter dem Pfeil nach oben übereinstimmt.

Man sieht nun per Diagrammjagd, dass die Abbildung im Hauptlemma surjekiv ist (das verwendet die Exaktheit der Spalten an den Positionen eins oberhalb der roten Mengen und die Eigenschaft, dass die „waagrechte Verknüpfung durch diese Positionen“ Null ist).

Da $f \mapsto \mathrm{H}_0(f)$ ein Morphismus abelscher Gruppen ist, genügt es für die Injektivität zu zeigen, dass aus $\mathrm{H}_0(f) = 0$ folgt, dass f homotop zur Nullabbildung ist. Gesucht ist also eine Homotopie h zwischen f und

[154] genauer sind diese Mengen abelsche Gruppen

0. Eine Diagrammjagd liefert die Komponenten einer solchen Homotopie in den hellblauen Hom-Räumen (das verwendet die Exaktheit der Spalten an den roten Positionen und die Eigenschaft, dass die „waagrechte Verknüpfung durch die roten Positionen“ Null ist). □

Beispiel 7.1.6. Sei X ein wegzusammenhängender (also inbesondere nichtleerer) toplogischer Raum mit $\mathrm{H}_p(X) = 0$ für alle $p > 0$ (beispielsweise könnte X zusammenziehbar sein). Wir können die Augmentation (3.1.8) als Morphismus $\varepsilon\colon \mathrm{S}X \to \mathbb{Z}[0]$ von Komplexen auffassen. Er ist ein Quasi-Isomorphismus. Wir behaupten, dass er sogar ein Isomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ ist.

Sowohl $\mathrm{S}X$ als auch $\mathbb{Z}[0]$ sind Komplexe freier abelscher Gruppen und haben Homologie nur im Grad Null. Deswegen liefert der Hauptsatz der homologischen Algebra 7.1.5 vier Bijektionen

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_0\colon \mathrm{Hot}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S}X, \mathrm{S}X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}_0(X), \mathrm{H}_0(X)),\\
\mathrm{H}_0\colon \mathrm{Hot}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S}X, \mathbb{Z}[0]) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}_0(X), \mathbb{Z}),\\
\mathrm{H}_0\colon \mathrm{Hot}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[0], \mathrm{S}X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathrm{H}_0(X)),\\
\mathrm{H}_0\colon \mathrm{Hot}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[0], \mathbb{Z}[0]) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten induziert $\mathrm{H}_0\colon \mathrm{Hot}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ eine Äquivalenz zwischen der vollen Unterkategorie von $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ mit Objekten $\mathrm{S}X$ und $\mathbb{Z}[0]$ und der vollen Unterkategorie von $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ mit Objekten $\mathrm{H}_0(X)$ und $\mathbb{Z}$. Da $\mathrm{H}_0(\varepsilon)$ ein Isomorphismus ist, muss auch ε ein Isomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ sein.

Alternativbeweis, falls X zusammenziehbar ist: Da X und $\{*\}$ in hTop isomorph sind, sind $\mathrm{S}X$ und $\mathrm{S}\{*\}$ in $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ isomorph wegen der Homotopie-Invarianz der singulären Homologie 3.3.1. Nach Beispiel 3.1.21 ist klar, dass $\mathrm{S}\{*\}$ und $\mathbb{Z}[0]$ in $\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})$ isomorph sind.

7.2. Satz über azyklische Modelle.

Definition 7.2.1. Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{C}$. Dann heißt der Funktor

$$\begin{aligned}
\mathrm{Free} = \mathrm{Free}_{(C_i)_{i\in I}} = \mathrm{Free}^{\mathbb{Z}}_{(C_i)_{i\in I}} \colon \mathcal{C} &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}),\\
X &\mapsto \mathrm{Free}(X) := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\mathcal{C}(C_i, X),
\end{aligned}$$

Freier-$\mathbb{Z}$-Modul-Funktor über der Familie $(C_i)_{i\in I}$ oder **freier Funktor (in die Kategorie abelscher Gruppen) über der Familie** $(C_i)_{i\in I}$.[155]

7.2.2. Es gilt

$$\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\mathcal{C}(C_i, X) \cong \mathbb{Z}\bigsqcup_{i\in I} \mathcal{C}(C_i, X)$$

natürlich in $X \in \mathcal{C}$.

Beispiel 7.2.3. Der Funktor $\mathrm{S}_q\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ der singulären q-Ketten ist der freie Funktor über der einelementigen Familie (Δ_q) topologischer Räume.

Lemma 7.2.4 (Verallgemeinerung von Lemma 4.3.3, Variante des Yoneda-Lemmas A.0.13)**.** *Sei $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann ist für jeden Funktor $G\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}\big(\mathrm{Free}_{(C_i)_{i\in I}}, G\big) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} G(C_i),\\
\tau &\mapsto \big(\tau_{C_i}(\mathrm{id}_i)\big)_{i\in I},
\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

eine in G natürliche Bijektion, wobei $\mathrm{id}_i \in \bigoplus_{j\in I} \mathbb{Z}\mathcal{C}(C_j, C_i)$ diejenige Familie ist, deren i-te Komponente id_{C_i} ist und deren andere Komponenten verschwinden.

[155] Wer mag, kann hier $\mathbb{Z}$ durch einen beliebigen Ring R ersetzen und erhält den **Freier-R-Modul-Funktor über der Familie** $(C_i)_{i\in I}$ oder **freien Funktor** $\mathrm{Free}^R_{(C_i)_{i\in I}}$ **(in die Kategorie von R-Moduln) über der Familie** $(C_i)_{i\in I}$.

Beweis. Die Komposition offensichtlicher Bijektionen

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Free}(X), G(X)\big) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}\mathcal{C}(C_i, X), G(X)\big) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Set}\big(\mathcal{C}(C_i, X), G(X)\big),$$

für $X \in \mathcal{C}$, restringiert zu einer Bijektion

$$\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}\big(\mathrm{Free}, G\big) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \big(\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}\big)\big(\mathcal{C}(C_i, -), G\big),$$

vgl. Definition A.0.4. Die rechte Seite wird mittels der Yoneda-Bijektionen mit $\prod_{i\in I} G(C_i)$ identifiziert (siehe Satz A.0.13). Der Leser prüft leicht, dass die so konstruierte Bijektion die angegebene Form hat und in G natürlich ist. □

Definition 7.2.5. Sei $G\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ ein Funktor.

- Ist $(C_i, c_i)_{i\in I}$ eine Familie von Paaren $(C_i, c_i)_{i\in I}$ mit $C_i \in \mathcal{C}$ und $c_i \in G(C_i)$, so existiert nach Lemma 7.2.4 genau eine natürliche Transformation (= genau ein Morphismus von Funktoren)

  $$\tau\colon \mathrm{Free}_{(C_i)_{i\in I}} \to G$$

  mit $\tau_{C_i}(\mathrm{id}_i) = c_i$ für alle $i \in I$. Wir nennen $(C_i, c_i)_{i\in I}$ eine **$\mathbb{Z}$-Basis von** G, wenn diese Transformation eine Isotransformation ist; wie der Leser leicht prüft, ist die folgende Forderung dazu äquivalent: Für jedes $X \in \mathcal{C}$ ist die Familie

  $$\big((G(f))(m_i)\big)_{i\in I, f\in\mathcal{C}(C_i,X)}$$

  eine $\mathbb{Z}$-Basis von $G(X)$.
- Wir nennen G einen **Freien-$\mathbb{Z}$-Modul-Funktor**, wenn er eine $\mathbb{Z}$-Basis hat.
- Sei $\mathcal{M} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ eine Teilmenge der Objekte von $\mathcal{C}$. Der Funktor G heißt **frei mit Modellen in** $\mathcal{M}$, wenn er eine $\mathbb{Z}$-Basis $(M_i, m_i)_{i\in I}$ mit $M_i \in \mathcal{M}$ für alle $i \in I$ hat.

7.2.6. Ist $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$, so bilden die Elemente $(C_i, \mathrm{id}_i)_{i\in I}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{Free}_{(C_i)_{i\in I}}$, wobei id_i wie in Lemma 7.2.4 definiert sei. Insbesondere sind unsere Bezeichnungen konsistent: Der Freie-$\mathbb{Z}$-Modul Funktor über der Familie $(C_i)_{i\in}$ ist ein Freier-$\mathbb{Z}$-Modul-Funktor im Sinne der Definition 7.2.5.

Beispiel 7.2.7. Die einelementige Familie $(\Delta_q, \mathrm{id}_{\Delta_q})$ ist eine $\mathbb{Z}$-Basis des Funktors $\mathrm{S}_q\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

Beispiel 7.2.8. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Funktor

$$\begin{aligned} &\mathrm{Top} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}),\\ &X \mapsto \mathrm{S}_n(X \times [0,1]) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X \times [0,1]), \end{aligned}$$

hat

$$\Big(\Delta_n, (\mathrm{id}_{\Delta_n}, \varphi)\Big)_{\varphi\in\mathrm{Top}(\Delta_n,[0,1])}$$

als $\mathbb{Z}$-Basis, wobei $(\mathrm{id}_{\Delta_n}, \varphi) \in \mathrm{S}_n(\Delta_n \times [0,1])$ den singulären n-Simplex $(\mathrm{id}_{\Delta_n}, \varphi)\colon \Delta_n \to \Delta_n \times [0,1]$, $x \mapsto (x, \varphi(x))$, bezeichnet.

Beispiel 7.2.9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Funktor

$$\begin{aligned} \mathrm{Top}^{\times 2} = \mathrm{Top} \times \mathrm{Top} &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}),\\ (X, Y) &\mapsto \Big(\mathrm{S}(X) \otimes \mathrm{S}(Y)\Big)_n = \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{N}\\ p+q=n}} \mathrm{S}_p(X) \otimes \mathrm{S}_q(Y), \end{aligned}$$

hat

$$\Big((\Delta_p, \Delta_q), \mathrm{id}_{\Delta_p} \otimes \mathrm{id}_{\Delta_q}\Big)_{\substack{p,q\in\mathbb{N}\\ p+q=n}}$$

als $\mathbb{Z}$-Basis.

Definition 7.2.10. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **$\mathbb{Z}$-linear** oder **angereichert in abelschen Gruppen/$\mathbb{Z}$-Moduln**, falls für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{A}$ die Morphismenmenge $\mathcal{A}(X,Y)$ die Struktur einer abelschen Gruppe (= eines $\mathbb{Z}$-Moduls) trägt und überdies für alle Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ die Verknüpfung $\mathcal{A}(Y,Z) \times \mathcal{A}(X,Y) \xrightarrow{\circ} \mathcal{A}(X,Z)$ $\mathbb{Z}$-bilinear ist.

Beispiel 7.2.11. Beispiele für $\mathbb{Z}$-lineare Kategorien sind

- R-Mod und Mod-R für jeden Ring R;[156]
- R-Mod-S für je zwei Ringe R, S.

Beispiel 7.2.12. Jede volle Unterkategorie einer $\mathbb{Z}$-linearen Kategorie ist $\mathbb{Z}$-linear. Beispielsweise können wir in $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ die volle Unterkategorie aller freien abelschen Gruppen von Primzahlrang betrachten (der Nullmodul ist nicht in dieser Unterkategorie).

Beispiel 7.2.13. Seien $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Kategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie, so ist die Funktorkategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ in offensichtlicher Weise ebenfalls eine $\mathbb{Z}$-lineare Kategorie.

Beispielsweise ist $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Kategorie.

7.2.14. Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Kategorie, so kann man Komplexe in $\mathcal{A}$ betrachten (dafür benötigt man eigentlich nur Nullmorphismen). Weiter kann man die Kategorie $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ der Komplexe in $\mathcal{A}$ und die Homotopie-Kategorie $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ in naheliegender Weise definieren (bei der Definition der Homotopie-Kategorie ist es wesentlich, Morphismen addieren zu könnn). Wir schreiben die Morphismen-abelschen-Gruppen dieser Kategorien als $\mathrm{Kom}_{\mathcal{A}}(A,B) := \mathrm{Kom}(\mathcal{A})(A,B)$ und $\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(A,B) := \mathrm{Hot}(\mathcal{A})(A,B)$.

Ist R ein Ring, so gelten $\mathrm{Kom}(\mathrm{Mod}(R)) = \mathrm{Kom}(R)$ und $\mathrm{Hot}(\mathrm{Mod}(R)) = \mathrm{Hot}(R)$.

Warnung 7.2.15. Da Morphismen in einer $\mathbb{Z}$-linearen Kategorie $\mathcal{A}$ im Allgemeinen keine Kerne bzw. Kokerne haben, ist die Homologie eines Komplexes in $\mathcal{A}$ nicht definiert.

(Manchmal geht das aber, etwa für $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$, wie wir in 7.2.17 erklären.)

7.2.16. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Kategorie, so ist der offensichtliche Funktor ein Isomorphismus

$$\mathrm{Kom}\left(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}\right) \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Kom}(\mathcal{A})\big)^{\mathcal{C}}$$

von Kategorien. Warnung: Der offensichtliche Funktor

$$\mathrm{Hot}\left(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}\right) \to \big(\mathrm{Hot}(\mathcal{A})\big)^{\mathcal{C}}$$

ist im Allgemeinen kein Isomorphismus von Kategorien und auch keine Äquivalenz von Kategorien. Ich hoffe, dass man dies bereits an der Kategorie $\mathcal{C}$ mit zwei Objekten und einem Nicht-Identitätspfeil sehen kann. Immerhin ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kom}\left(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}\right) & \xrightarrow{\sim} & \big(\mathrm{Kom}(\mathcal{A})\big)^{\mathcal{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hot}\left(\mathcal{A}^{\mathcal{C}}\right) & \longrightarrow & \big(\mathrm{Hot}(\mathcal{A})\big)^{\mathcal{C}} \end{array} \tag{7.2.2}$$

mit offensichtlichen Vertikalen kommutativ.

7.2.17. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann vererben sich „alle“ guten Eigenschaften ($\mathbb{Z}$-linearität, Existenz von Kernen, Kokernen, Bildern) von $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ auf die Kategorie $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$: Wir definieren den Kern $\ker(f)$ eines Morphismus $f\colon M \to N$ in $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$ objektweise durch

$$(\ker(f))(C) := \ker(f(C))$$

für alle $C \in \mathcal{C}$; ist $\gamma\colon C \to C'$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so induziert er in offensichtlicher Weise einen Morphismus $\ker(\gamma)\colon (\ker(f))(C) \to (\ker(f))(C')$. Analog definiert man $\mathrm{cok}(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ objektweise. Exakte Sequenzen sind analog objektweise definiert. Aufgabe 6.3.8 gilt mutatis mutandis für $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$.

[156] Ist R kommutativ, so sind diese Kategorien sogar R-linear (was man in offensichtlicher Weise definiere). Für Körper ist dies aus der linearen Algebra wohlbekannt.

Dies hat zur Folge, dass alle Konstruktionen und Resultate aus Abschnitt B sinngemäß auch für $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$ gelten. Insbesondere ist die Homologie eines Komplexes in $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$ definiert.

(Was wir hier zu erklären versuchen, sollte man eigentlich in einem allgemeineren Kontext erklären: Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie (wie etwa $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$), so ist aucu jede Kategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ abelsch.)

7.2.18. Sei $p \in \mathbb{Z}$. Wir ergänzen das kommutative Diagramm (7.2.3) im Spezialfall $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ zum folgenden Diagramm

(7.2.3)
$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Kom}\Big(\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}\Big) & \xrightarrow{\sim} & \Big(\mathrm{Kom}\big(\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)\big)\Big)^{\mathcal{C}} & = & \big(\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Hot}\Big(\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}\Big) & \longrightarrow & \Big(\mathrm{Hot}\big(\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)\big)\Big)^{\mathcal{C}} & = & \big(\mathrm{Hot}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p \circ ?} & & \\
\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}, & &
\end{array}$$

dessen untere Vertikalen in offensichtlicher Weise definiert sind. Es ist klar, dass dieses Diagramm kommutativ ist. Mit anderen Worten ist die p-te Homologie als Funktor auf den vier oberen Kategorien kompatibel definiert.

Satz 7.2.19 (über azyklische Modelle; [Wik20, Acyclic model])**.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien F, E Komplexe in $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$, so dass die folgenden Bedingungen gelten:*

- *$F_p = 0$ für alle $p < 0$;*
- *es gibt eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ mit*
  - *F_p ist frei mit Modellen in $\mathcal{M}$, für alle $p \geq 0$;*
  - *$\mathrm{H}_p\big(E(M)\big) = 0$ für alle $M \in \mathcal{M}$ und $p > 0$ („E ist in positiven Graden exakt/azyklisch auf den Modellen der F_p“);*

Dann ist das Bilden der nullten Homologie ein Isomorphismus

$$\mathrm{H}_0 \colon \mathrm{Hot}_{\left(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\mathcal{C}}}(F, E) \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}(\mathrm{H}_0(F), \mathrm{H}_0(E)).$$

7.2.20. Im Fall, dass $\mathcal{C}$ eine diskrete Kategorie mit genau einem Objekt ist, spezialisiert Satz 7.2.19 zu dem Spezialfall des Hauptsatzes der homologischen Algebra 7.1.5 für $R = \mathbb{Z}$ (denn alle projektiven abelschen Gruppen sind frei nach Korollar 7.1.4).

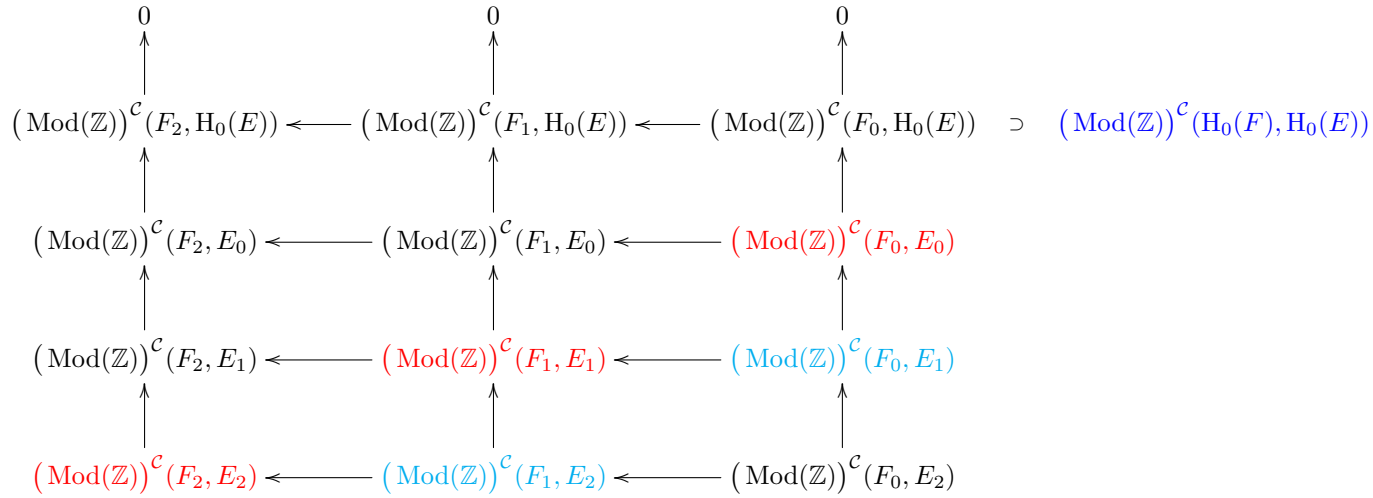
Beweis. Der Beweis des Hauptsatzes der homologischen Algebra 7.1.5 lässt sich an diese Situation anpassen. Der Anfang geht im Wesentlichen analog, so dass wir ohne Einschränkung $E_p = 0$ für alle $p < 0$ annehmen können. Insbesondere gilt für alle $M \in \mathcal{M}$ nach Annahme $E_0(M) = \mathrm{Z}_0(E(M))$ und die Sequenz

(7.2.4)
$$\ldots \longrightarrow E_2(M) \longrightarrow E_1(M) \longrightarrow E_0(M) \longrightarrow \mathrm{H}_0(E(M)) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Im Diagramm (7.1.3) ersetzt man dann $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_R$ durch $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$ und erhält das folgende kommutative Diagramm.

(7.2.5)



Die Verknüpfung je zweier konsekutiver horizontaler Pfeile ist Null. Der blaue Teilmenge besteht genau aus denjenigen Elementen von $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}(F_0, \mathrm{H}_0(E))$, die nach links auf Null gehen, wie der Leser leicht prüft.[157] Um wie im zitierten Beweis argumentieren zu können, müssen wir zeigen, dass alle Spalten exakt sind. Dafür sei $p \in \mathbb{N}$ fixiert. Da F_p frei mit Modellen in $\mathcal{M}$ ist, gibt es eine (von p abhängige) Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Objekten in $\mathcal{M}$ und einen Isomorphismus $F_p \cong \mathrm{Free}_{(M_i)_{i\in I}}$ von Funktoren. Mit Hilfe der natürlichen Isomorphismen (7.2.1) aus Lemma 7.2.4 verwandelt sich die „F_p-Spalte“ unseres Diagramms in das (nun als Zeile dargestellte) Diagramm

$$\ldots \to \prod_{i\in I} E_2(M_i) \to \prod_{i\in I} E_1(M_i) \to \prod_{i\in I} E_0(M_i) \to \prod_{i\in I} \underbrace{\mathrm{H}_0(E)(M_i)}_{\mathrm{H}_0(E(M_i))} \to 0.$$

Dieses Diagramm ist das Produkt über die exakten Sequenzen (7.2.4) für $M = M_i \in \mathcal{M}$ und somit exakt, denn allgemein sind beliebige Produkte exakter Sequenzen abelscher Gruppen exakt. □

Ende der 27. Vorlesung am 11.02.2021.

7.3. **Satz von Eilenberg-Zilber.**

7.3.1. Wir kürzen ab $\otimes := \otimes_{\mathbb{Z}}$. (Manches, was folgt, geht über beliebigen oder zumindest über kommutativen Ringen.)

7.3.2. Seien E und E Mengen. Dann gilt nach Proposition 6.2.17

$$(\mathbb{Z}E) \otimes (\mathbb{Z}F) = \Big(\bigoplus_{e\in E} \mathbb{Z}\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{f\in F} \mathbb{Z}\Big) \xrightarrow[\sim]{(6.2.16)} \bigoplus_{e\in E} \bigoplus_{f\in F} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \bigoplus_{(e,f)\in E\times F} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(E \times F), \tag{7.3.1}$$

$$e \otimes f \mapsto (e, f). \tag{7.3.2}$$

7.3.3. Seien X und Y zwei topologische Räume. Unser Ziel ist, die Beziehung zwischen der singulären Homologie $\mathrm{H}(X \times Y)$ des Produkts einerseits und den singulären Homologien $\mathrm{H}(X)$ und $\mathrm{H}(Y)$ andererseits zu verstehen.

[157] Für diejenigen, die wissen, was eine abelsche Kategorie ist: Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, so auch $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ (Kerne und Kokerne können objektweise definiert werden). Also ist $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}$ abelsch und die Sequenz $E_1 \to E_0 \twoheadrightarrow \mathrm{H}_0(E)$ ist rechtsexakt. Wende auf diese Sequenz den Funktor $\big(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathcal{C}}(-, \mathrm{H}_0(E)$ an.

In Grad Null geht das von Hand: Die Abbildung

$$\pi_0(X)\times\pi_0(Y)\xrightarrow{\sim}\pi_0(X\times Y),\quad([x],[y])\mapsto[(x,y)],\tag{7.3.3}$$

ist offensichtlich wohldefiniert und bijektiv, wobei $[z]$ die Wegzusammenhangskomponenten von z bezeichnet. Wir folgern Isomorphismen

$$\mathrm{H}_0(X)\otimes\mathrm{H}_0(Y)\xrightarrow[\sim]{(3.1.7)\otimes(3.1.7)}\mathbb{Z}\pi_0(X)\otimes\mathbb{Z}\pi_0(Y)\xrightarrow[\sim]{(7.3.1)}\mathbb{Z}(\pi_0(X)\times\pi_0(Y))\xrightarrow[\sim]{(7.3.3)}\mathbb{Z}\pi_0(X\times Y)\xleftarrow[\sim]{(3.1.7)}\mathrm{H}_0(X\times Y).$$

7.3.4. Wir bereiten den Satz von Eilenberg-Zilber 7.3.6 vor. Wir betrachten die beiden Funktoren

$$\mathrm{S}\otimes S:=\mathrm{S}(-)\otimes\mathrm{S}(-)\colon\ \mathrm{Top}^{\times 2}=\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}\to\mathrm{Kom}(\mathbb{Z}),\quad(X,Y)\mapsto \mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y$$

und

$$\mathrm{S}(-\times-)\colon\ \mathrm{Top}^{\times 2}=\mathrm{Top}\times\mathrm{Top}\to\mathrm{Kom}(\mathbb{Z}),\quad(X,Y)\mapsto \mathrm{S}(X\times Y).$$

Im folgenden nichtkommutativen (warum?) Diagramm ist der Funktor $\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}$ wie angedeutet die Komposition über die rechte obere Ecke, der Funktor $\mathrm{S}(-\times-)$ ist die Komposition über die linke untere Ecke:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Top}\times\mathrm{Top} & \xrightarrow{\mathrm{S}\times\mathrm{S}} & \mathrm{Kom}(\mathbb{Z})\times\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})\\ {\scriptstyle\times}\downarrow & \searrow^{\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}} & \downarrow{\scriptstyle\otimes}\\ \mathrm{Top} & \xrightarrow[\mathrm{S}]{\mathrm{S}(-\times-)} & \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}).\end{array}$$

Wir fassen die Objekte $\mathrm{S}\otimes S$ und $S(-\times-)$ von $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z})^{\mathrm{Top}^{\times 2}}$ $\xleftarrow{\sim}\mathrm{Kom}\left(\left(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\mathrm{Top}^{\times 2}}\right)$ (vgl. (7.2.3)) als Komplexe in $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\big)^{\mathrm{Top}^{\times 2}}$ auf.

7.3.5. Für topologische Räume X und Y haben wir Isomorphismen

$$(\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y)_0=\mathrm{S}_0(X)\otimes\mathrm{S}_0(Y)=\mathbb{Z}X\otimes\mathbb{Z}Y\xrightarrow[\sim]{(7.3.1)}\mathbb{Z}(X\times Y)=\mathrm{S}_0(X\times Y),\quad x\otimes y\mapsto(x,y).\tag{7.3.4}$$

[158] Die Untergruppe $\mathrm{B}_0(\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y)\subset\mathrm{Z}_0(\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y)=(\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y)_0$ ist von allen Ausdrücken der Form $(\alpha(1)-\alpha(0))\otimes y$ und $x\otimes(\beta(1)-\beta(0))$ erzeugt, für $x\in X$, $y\in Y$ und Wege α in X und β in Y. Diese Ausdrücke landen unter unserem Isomorphismus in $\mathrm{B}_0(X\times Y)\subset\mathrm{Z}_0(X\times Y)=\mathrm{S}_0(X\times Y)$. Also induziert unser Isomorphismus eine Morphismus

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y)\to\mathrm{H}_0(X\times Y),\tag{7.3.7}$$

$$[x\otimes y]\mapsto[(x,y)].\tag{7.3.8}$$

Dieser ist, wie man sich leicht überlegt, ein Isomorphismus. Alle Konstruktionen in diesem Abschnitt sind natürlich in X und Y, so dass (7.3.7) die Auswertung einer Isotransformation

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S})\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}_0(-\times-)=\mathrm{H}_0(\mathrm{S}(-\times-))\tag{7.3.9}$$

bei (X,Y) ist.

---

[158] Wegen

$$\mathrm{Top}(\Delta_q,X\times Y)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Top}(\Delta_q,X)\times\mathrm{Top}(\Delta_q,Y)\tag{7.3.5}$$

(dies gilt auch für einen beliebigen topologischen Raum Z anstelle von Δ_q) folgt allgemeiner

(7.3.6)

$$\mathrm{S}_q(X)\otimes\mathrm{S}_q(Y)=\mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q,X)\otimes\mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q,Y)\xrightarrow[\sim]{(7.3.1)}\mathbb{Z}(\mathrm{Top}(\Delta_q,X)\times\mathrm{Top}(\Delta_q,Y))\xrightarrow[\sim]{(7.3.5)}\mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q,X\times Y)=\mathrm{S}_q(X\times Y).$$

Mir ist jedoch aktuell nicht klar, wofür diese Identifikation nützlich ist.

Satz 7.3.6 (Eilenberg-Zilber; [Wik20, Satz von Eilenberg-Zilber]). *In der Homotopiekategorie* $\operatorname{Hot}\left(\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}\right)$ *gibt es genau einen Morphismus*

$$\zeta\colon \mathrm{S}\otimes\mathrm{S}\to\mathrm{S}(-\times-),$$

der auf der nullten Homologie die Abbildung (7.3.9) *induziert, in Formeln* $\mathrm{H}_0(\zeta)=$ (7.3.9).

Dieser Morphismus ζ *ist ein Isomorphismus*

$$\zeta\colon \mathrm{S}\otimes\mathrm{S}\xrightarrow{\sim}\mathrm{S}(-\times-) \tag{7.3.10}$$

und heißt ***Eilenberg-Zilber-Isomorphismus****. Insbesondere erhalten wir also einen in topologischen Räumen* X,Y *natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}(\zeta)\colon \mathrm{H}(\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}(X\times Y)$$

oder konkreter für jedes $n\in\mathbb{Z}$ *einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}_n(\zeta)\colon \mathrm{H}_n(\mathrm{S}X\otimes\mathrm{S}Y)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}_n(X\times Y) \tag{7.3.11}$$

Beweis. Wir behaupten, dass der Satz über azyklische Modelle 7.2.19 mit $\mathcal{C}=\operatorname{Top}^{\times 2}=\operatorname{Top}\times\operatorname{Top}$ in den vier Instanzen

- $F=\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}$ und $E=\mathrm{S}(-\times-)$;
- $F=\mathrm{S}(-\times-)$ und $E=\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}$;
- $F=E=\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}$;
- $F=E=\mathrm{S}(-\times-)$

anwendbar ist.

Nach Beispiel 7.2.9 hat $(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S})_n$ die $(n+1)$-elementige Familie

$$\big((\Delta_p,\Delta_q),\mathrm{id}_{\Delta_p}\otimes\mathrm{id}_{\Delta_q}\big)_{\substack{p,q\in\mathbb{N}\\ p+q=n}}$$

als $\mathbb{Z}$-Basis. Wegen

$$\mathrm{S}_n(X\times Y)=\mathbb{Z}\operatorname{Top}(\Delta_n,X\times Y)$$

hat $\mathrm{S}_n(-\times-)$ die $\mathbb{Z}$-Basis

$$\big((\Delta_n,\Delta_n),\mathrm{diag}\big),$$

wobei $\mathrm{diag}\in F_n(\Delta,\Delta_n)=\mathrm{S}_n(\Delta_n\times\Delta_n)$ die „Diagonale“ ist, also der singuläre n-Simplex $\mathrm{diag}\colon\Delta_n\to\Delta_n\times\Delta_n$, $x\mapsto(x,x)$.

In allen vier Instanzen, wo wir den Satz anwenden wollen, wählen wir

$$\mathcal{M}=\big\{(\Delta_p,\Delta_q)\mid p,q\in\mathbb{N}\big\}.$$

Seien $p,q\in\mathbb{N}$. Da $\Delta_p\times\Delta_q$ konvex ist, gilt

$$\mathrm{H}_n((\mathrm{S}(-\times-)(\Delta_p,\Delta_q))=\mathrm{H}_n((\mathrm{S}(\Delta_p\times\Delta_q))=\mathrm{H}_n(\Delta_p\times\Delta_q)=0\qquad\text{für alle } n>0.$$

Beispiel 7.1.6 zeigt, dass die Augmentationen $\varepsilon\colon\mathrm{S}\Delta_p\to\mathbb{Z}[0]$ und $\varepsilon\colon\mathrm{S}\Delta_q\to\mathbb{Z}[0]$ Homotopieäquivalenzen sind (also Isomorphismen in $\operatorname{Hot}(\mathbb{Z})$ werden). Folglich ist

$$\varepsilon\otimes\varepsilon\colon\mathrm{S}\Delta_p\otimes\mathrm{S}\Delta_q\to\mathbb{Z}[0]\otimes\mathbb{Z}[0]=\mathbb{Z}[0]$$

ebenfalls eine Homotopieäquivalenz (nach Aufgabe 6.6.11). Es folgt

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{S}\Delta_p\otimes\mathrm{S}\Delta_q)\xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}_n(\varepsilon\otimes\varepsilon)}\mathrm{H}_n(\mathbb{Z}[0])=0\qquad\text{für alle } n>0.$$

Somit können wir den Satz über azyklische Modelle anwenden und erhalten Bijektionen

$$\mathrm{H}_0\colon\operatorname{Hot}_{\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}}(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S},\mathrm{S}(-\times-))\xrightarrow{\sim}\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}(\mathrm{H}_0(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}),\mathrm{H}_0(-\times-));$$

$$\mathrm{H}_0\colon\operatorname{Hot}_{\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}}(\mathrm{S}(-\times-),\mathrm{S}\otimes\mathrm{S})\xrightarrow{\sim}\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}(\mathrm{H}_0(-\times-),\mathrm{H}_0(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}));$$

$$\mathrm{H}_0\colon\operatorname{Hot}_{\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}}(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S},\mathrm{S}\otimes\mathrm{S})\xrightarrow{\sim}\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}(\mathrm{H}_0(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}),\mathrm{H}_0(\mathrm{S}\otimes\mathrm{S}));$$

$$\mathrm{H}_0\colon\operatorname{Hot}_{\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}}(\mathrm{S}(-\times-),\mathrm{S}(-\times-))\xrightarrow{\sim}\left(\operatorname{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\operatorname{Top}^{\times 2}}(\mathrm{H}_0(-\times-),\mathrm{H}_0(-\times-)).$$

Dem Element (7.3.9) der rechten Seite der ersten Bijektion entspricht der gesuchte Morphismus ζ. Da (7.3.9) ein Isomorphismus ist, folgt dass aus den anderen Bijektionen, dass ζ ein Isomorphismus ist. □

7.3.7. Sei R ein Ring. Tensorieren wir den Eilenberg-Zilber-Isomorphismus (7.3.13) über $\mathbb{Z}$ mit R, so erhalten wir einen in topologischen Räumen X, Y natürlichen Isomorphismus

$$\zeta \otimes \mathrm{id}_R \colon \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y \otimes R \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X \times Y) \otimes R \tag{7.3.12}$$

in $\mathrm{Hot}(R)$. Modulo naheliegender Identifikationen (im Wesentlichen $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes R \cong R \cong R \otimes_R R$) ist dies ein Isomorphismus

$$\zeta_R \colon \mathrm{S}(X;R) \otimes_R \mathrm{S}(Y;R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(X \times Y;R). \tag{7.3.13}$$

Allgemeiner gilt Satz 7.3.6 analog mit Koeffizienten in R mit „demselben Beweis“ (man sollte dann etwa den Satz über azyklische Modelle 7.2.19 für R-Moduln formulieren).

7.4. Kreuzprodukt der singulären Homologie.

7.4.1. Wir schreiben weiter $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$.

7.4.2. Seien A und B Komplexe abelscher Gruppen. Dann ist für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_p(A) \otimes \mathrm{H}_q(B) &\to \mathrm{H}_{p+q}(A \otimes B), \\ [a] \otimes [b] &\mapsto [a \otimes b], \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

wohldefiniert, wie der Leser leicht prüft. Sie ist natürlich in A und B. Sind allgemeiner R ein Ring, A ein Komplex von R-Rechtsmoduln und B ein Komplex von R-Linksmoduln, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_p(A) \otimes_R \mathrm{H}_q(B) &\to \mathrm{H}_{p+q}(A \otimes_R B), \\ [a] \otimes [b] &\mapsto [a \otimes b], \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

wohldefiniert und natürlich in A und B.

7.4.3. Falls $A_r = 0 = B_r$ für alle $r < 0$ gilt, so ist $\mathrm{H}_0(A) \otimes \mathrm{H}_0(B) \to \mathrm{H}_0(A \otimes B)$ ein Isomorphismus: Dazu muss man sich nur überlegen, dass die Abbildung $[a \otimes b] \to [a] \otimes [b]$ in die umgekehrte Richtung wohldefiniert und dann offensichtlich invers ist.

Definition 7.4.4. Seien X und Y topologische Räume und $p, q \in \mathbb{Z}$. Dann heißt die $\mathbb{Z}$-balancierte Verknüpfung

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_p(X) \times \mathrm{H}_q(Y) \to \mathrm{H}_p(X) \otimes \mathrm{H}_q(Y) = \mathrm{H}_p(\mathrm{S}X) \otimes \mathrm{H}_q(\mathrm{S}Y) &\xrightarrow{(7.4.1)} \mathrm{H}_{p+q}(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y) \\ &\xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}_{p+q}(7.3.13)=\mathrm{H}_{p+q}(\zeta_{X,Y})} \mathrm{H}_{p+q}(\mathrm{S}(X \times Y)) = \mathrm{H}_{p+q}X \times Y) \end{aligned}$$

Kreuzprodukt der singulären Homologie und wird als

$$\begin{aligned} \times \colon \mathrm{H}_p(X) \times \mathrm{H}_q(Y) &\to \mathrm{H}_{p+q}X \times Y), \\ (c,d) = ([c'],[d']) &\mapsto c \times d = \mathrm{H}_{p+q}(\zeta)([c' \otimes d']), \end{aligned}$$

notiert. Manchmal versteht man darunter auch die entsprechende $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\times \colon \mathrm{H}_p(X) \otimes \mathrm{H}_q(Y) \to \mathrm{H}_{p+q}X \times Y)$, $c \otimes d \mapsto c \times d$.

Mit Hilfe von (7.3.13) und (7.4.2) definiert man analog für jeden Ring R das Kreuzprodukt $\times \colon \mathrm{H}_p(X;R) \otimes \mathrm{H}_q(Y;R) \to \mathrm{H}_{p+q}X \times Y;R)$.

7.4.5. Nach 7.4.3 ist $\mathrm{H}_0(X) \otimes \mathrm{H}_0(Y) \to \mathrm{H}(X \times Y)$, $[x] \otimes [y] \mapsto [x] \times [y] = [(x,y)]$ ein Isomorphismus (dies verwendet, dass $\mathrm{H}_0(\zeta)$ durch (7.3.7) gegeben ist).

Proposition 7.4.6 (Formelsammlung für das Kreuzprodukt)**.** *Das Kreuzprodukt der Homologie hat die folgenden Eigenschaften. Um die Notation abzukürzen, schreiben wir f_*a statt $\mathrm{H}_p(f)(a)$.*

(a) Natürlichkeit: Sind $f \colon X \to X'$ und $g \colon Y \to Y'$ stetige Abbildungen und $a \in \mathrm{H}_p(X)$ und $b \in \mathrm{H}_q(Y)$, so gilt

$$f_*a \times g_*b = (f \times g)_*(a \times b).$$

(b) *Eins (Unitarität?): Sind X ein topologischer Raum, $a \in \mathrm{H}_p(X)$ und $1 := [*] \in \mathrm{H}_0(\{*\})$ der kanonische Erzeuger der Homologie eines einpunktigen Raums, so gilt*

$$(\mathrm{pr}_X)_*(a \times 1) = a,$$

wobei $\mathrm{pr}_X \colon X \times \{*\} \xrightarrow{\sim} X$ die Projektion ist.

(c) *Assoziativität: Sind X, Y, Z topologische Räume und $a \in \mathrm{H}_p(X)$ und $b \in \mathrm{H}_q(Y)$ und $c \in \mathrm{H}_r(X)$ Homologieklassen, so gilt*

$$\mathrm{ass}_*((a \times b) \times c) = a \times (b \times c),$$

wobei $\mathrm{ass} \colon (X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$ der offensichtliche Homöomorphismus ist.

(d) *Graduierte Kommutativität: Seien X und Y topologische Räume und $a \in \mathrm{H}_p(X)$ und $b \in \mathrm{H}_q(Y)$ Homologieklassen, so gilt*

$$\tau_*(a \times b) = (-1)^{pq}\, b \times a$$

in $\mathrm{H}_{p+q}(Y \times X)$, wobei $\tau \colon X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$ die Vertauschungsabbildung ist.

Beweis. Natürlichkeit: Dies folgt sofort aus der Natürlichkeit der Eilenberg-Zilber-Abbildung.

Graduierte Kommutativität: Sei ζ der Eilenberg-Zilber-Isomorphismus. Die Verknüpfung

$$\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y \xrightarrow[\sim]{(6.6.4)} \mathrm{S}Y \otimes \mathrm{S}X \xrightarrow{\zeta} \mathrm{S}(Y \times X) \xrightarrow[\sim]{\tau_*} \mathrm{S}(X \times Y),$$

für variable topologische Räume X und Y als Morphismus in $\mathrm{Hot}\left(\left(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\mathrm{Top}^{\times 2}}\right)$ aufgefasst, induziert auf H_0 die Abbildung (7.3.9) und stimmt deswegen nach dem Satz von Eilenberg-Zilber (7.3.6) mit ζ überein. Daraus folgt sofort die behauptete Formel.

Eins: Betrachte die Komposition

$$\mathrm{S}X \xrightarrow{a \mapsto a \otimes *} \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}\{*\} \xrightarrow{\zeta} \mathrm{S}(X \times \{*\}) \xrightarrow[\sim]{(\mathrm{pr}_X)_*} \mathrm{S}X.$$

für variablen topologischen Raum X in $\mathrm{Hot}\left(\left(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\mathrm{Top}^{\times 2}}\right)$. Sie induziert auf H_0 die Identität (denn wir wissen genau, wie $\mathrm{H}_0(\zeta)$ aussieht) und muss somit nach dem Satz über azyklische Modelle 7.2.19 (anwendbar nach Beispiel 7.2.7) selbst die Identität sein.

Graduierte Assoziativität: Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}Y) \otimes \mathrm{S}Z & \xrightarrow{\zeta_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{S}Z}} & \mathrm{S}(X \times Y) \otimes \mathrm{S}Z & \xrightarrow{\zeta_{X \times Y, Z}} & \mathrm{S}((X \times Y) \times Z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w)}\ {\scriptstyle \sim} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{S}(\mathrm{ass})}\ {\scriptstyle \sim} \\
\mathrm{S}X \otimes (\mathrm{S}Y \otimes \mathrm{S}Z) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{S}Z} \otimes \zeta_{X,Y}} & \mathrm{S}X \otimes \mathrm{S}(Y \times Z) & \xrightarrow{\zeta_{X, Y \times Z}} & \mathrm{S}(X \times (Y \times Z))
\end{array}$$

mit variablen topologischen Räumen X, Y, Z als Diagramm in der Kategorie $\mathrm{Hot}\left(\left(\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})\right)^{\mathrm{Top}^{\times 3}}\right)$. Wir zeigen seine Kommutativität mit Hilfe des Satzes über azyklische Modelle. Die linke obere Ecke ist (als Funktor) frei mit Modellen in $(\Delta_p, \Delta_q, \Delta_r)_{p,q,r \in \mathbb{N}}$, die rechte untere Ecke ist auf diesen Modellen azyklisch in positiven Graden. Also ist der Satz über azyklische Modelle anwendbar und zeigt, dass unser Diagramm genau dann kommutativ ist, wenn es nach Anwenden von H_0 kommutativ ist. Letzteres ist aber offensichtlich. Daraus folgt sofort die behauptete graduierte Assoziativität. □

7.5. **Künneth-Formeln für Koeffizienten in einem Körper.**

Lemma 7.5.1 (Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper; Homologische-Algebra-Version)**.** *Seien A und B Komplexe über einem Körper k und sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die durch die Abbildungen (7.4.2), für $p + q = n$, induzierte Abbildung ein Isomorphismus*

$$\bigoplus_{\substack{p,q \in \mathbb{Z} \\ p+q=n}} \mathrm{H}_p(A) \otimes_k \mathrm{H}_q(B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(A \otimes_k B)$$

von Vektorräumen.

Alternativformulierung: Es gilt

$$\mathrm{H}(A) \otimes_k \mathrm{H}(B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(A \otimes_k B) \tag{7.5.1}$$

als Komplexe (mit verschwindenden Differentialen) von Vektorräumen.

Beweis. Da k ein Körper ist, gibt es in $\mathrm{Hot}(k)$ einen eindeutigen Isomorphismus $\alpha\colon \mathrm{H}(A) \xrightarrow{\sim} A$, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation liefert Das sollte eine Übungsaufgabe sein!. Sei $\beta\colon \mathrm{H}(B) \xrightarrow{\sim} B$ der analoge Isomorphismus für B. Nach Aufgabe 6.6.11 erhalten wir einen Isomorphismus $\alpha\otimes\beta\colon \mathrm{H}(A)\otimes_k\mathrm{H}(B) \xrightarrow{\sim} A \otimes_k B$ in $\mathrm{Hot}(k)$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=n}} \mathrm{H}_p(A) \otimes_k \mathrm{H}_q(B) & \longrightarrow & \mathrm{H}_n(A \otimes_k B) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \sim} \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(\alpha)\otimes\mathrm{H}_q(\beta) & & \Big\uparrow{\scriptstyle \sim} \mathrm{H}_n(\alpha\otimes\beta) \\ \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=n}} \mathrm{H}_p(\mathrm{H}(A)) \otimes_k \mathrm{H}_q(\mathrm{H}(B)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_n(\mathrm{H}(A) \otimes_k \mathrm{H}(B)) \end{array}$$

mit Horizontalen induziert durch (7.4.2) ist kommutativ, da die Abbildungen (7.4.2) natürlich in A und B sind. Die Vertikalen sind Isomorphismen. Die untere Horizontale ist ein Isomorphismus, da alle Differentiale in $\mathrm{H}(A)$ und $\mathrm{H}(B)$ verschwinden. Also ist die obere Horizontale ein Isomorphismus. □

Satz 7.5.2 (Künneth-Formel für singuläre Homologie mit Koeffizienten in einem Körper)**.** *Seien X und Y topologische Räume und sei k ein Körper. Dann liefert das Kreuzprodukt der singulären Homologie mit Koeffizienten in k Isomorphismen*

$$\bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p+q=n}} \mathrm{H}_p(X;k) \otimes_k \mathrm{H}_q(Y;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_n(X \times Y;k)$$

von Vektorräumen für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Alternativformulierung: Es gilt $\mathrm{H}(X;k) \otimes_k \mathrm{H}(Y;k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(X \times Y;k)$ als Komplexe (mit verschwindenden Differentialen) von Vektorräumen.

Beweis. Dies folgt aus den Isomorphismen

$$\mathrm{H}(X;k) \otimes_k \mathrm{H}(Y;k) = \mathrm{H}(\mathrm{S}(X;k)) \otimes_k \mathrm{H}(\mathrm{S}(Y;k)) \xrightarrow[\sim]{(7.5.1)} \mathrm{H}(\mathrm{S}(X;k) \otimes_k \mathrm{S}(Y;k))$$
$$\xrightarrow[\sim]{(7.3.13)} \mathrm{H}(\mathrm{S}(X \times Y;k)) = \mathrm{H}(X \times Y;k). \quad \square$$

Korollar 7.5.3 (Multiplikativität der Euler-Charakteristik)**.** *Seien X und Y topologische Räume mit wohldefinierten Eulercharakteristiken $\chi(X)$ und $\chi(Y)$. Dann ist $\chi(X \times Y)$ wohldefiniert und erfüllt*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Ist k ein Körper, so gilt analog $\chi(X \times Y;k) = \chi(X;k) \cdot \chi(Y;k)$.

Beweis. Wegen $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$ und $\dim V \otimes W = (\dim V) \cdot (\dim W)$ folgt dies sofort aus Satz 7.5.2. □

7.6. Künneth-Formeln für ganzzahlige Koeffizienten.

Beispiel 7.6.1. Betrachte die im Grad Null konzentrierten Komplexe $C = D = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[0]$ und den in den Graden Eins und Null konzentrierten Komplex $C' := (\ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots)$. Dann gelten $\mathrm{H}(C) = \mathrm{H}(C') = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[0]$, aber

$$\mathrm{H}_1(C' \otimes D) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0 = \mathrm{H}_1(C \otimes D).$$

Die Homologie des Tensorprodukts kann also im allgemeinen nicht aus der Homologie der Faktoren bestimmt werden. Unter der Annahme, dass einer der beteiligten Komplexe flache Komponenten hat, ist dies aber möglich, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 7.6.2 (Künneth-Formel – Homologische-Algebra-Version; [Wik20, Satz von Künneth])**.** *Seien C und D Komplexe abelscher Gruppen, von denen einer flache (= torsionsfreie) Komponenten hat. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine in C und D natürliche kurze exakte Sequenz*

$$\bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z},\\ p+q=n}} \mathrm{H}_p(C)\otimes \mathrm{H}_q(D) \hookrightarrow \mathrm{H}_n(C\otimes D) \twoheadrightarrow \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z},\\ p+q=n-1}} \mathrm{H}_p(C) * \mathrm{H}_q(D) \tag{7.6.1}$$

wobei die erste Abbildung von der offensichtlichen (injektiven) Abbildung $\mathrm{Z}_p(C)\otimes \mathrm{Z}_q(D) \to \mathrm{Z}_{p+q}(C\otimes D)$ herkommt, also auf der (p,q)-Komponente durch $[x]\otimes[y] \mapsto [x\otimes y]$ gegeben ist.

Überdies spaltet diese kurze exakte Sequenz, aber nicht in natürlicher Weise. (Wir beweisen nur, dass diese kurze exakte Sequenz spaltet, falls C und D Komplexe freier abelscher Gruppen sind – siehe [HS97, Theorem V.2.1] *für den allgemeinen Fall und die Begründung, warum die Spaltung nicht natürlich gewählt werden kann.)*

7.6.3. Der Spezialfall, dass C flache Komponenten hat und D im Grad Null konzentriert ist, ist das Homologische-Algebra-universelle Koeffziententheorem 6.9.1.

Beweis. Wir nehmen an, dass C flache Komponenten hat (der Fall, dass D flache Komponenten hat, geht analog). Als Untergruppen von C_p sind alle $\mathrm{Z}_p(C)$ und $\mathrm{B}_p(C)$ flach (Proposition 6.4.7). Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Z}_p(C) \hookrightarrow C_p \overset{d}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}_{p-1}(C) \tag{7.6.2}$$

flacher abelscher Gruppen. Insbesondere ist für jedes $q \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Z}_p(C)\otimes D_q \hookrightarrow C_p\otimes D_q \twoheadrightarrow \mathrm{B}_{p-1}(C)\otimes D_q \tag{7.6.3}$$

eine kurze exakte Sequenz (nach Korollar 6.7.16).

Bezeichne B' den Komplex mit Differential Null und $B'_p := \mathrm{B}_{p-1}(C)$ (die Verschiebung von $\mathrm{B}(C)$ um eins gegen die Richtung der Pfeile). Dann ist

$$\mathrm{Z}(C) \hookrightarrow C \overset{d}{\twoheadrightarrow} B'$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Ihr Bild unter dem Funktor $-\otimes D$ ist hat als Komponenten direkte Summen der kurzen exakten Sequenzen (7.6.3) und ist deshalb eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Z}(C)\otimes D \hookrightarrow C\otimes D \overset{d}{\twoheadrightarrow} B'\otimes D$$

von Komplexen. Die zugehörige lange exakte Homologie-Sequenz ist

$$\begin{tikzcd}
 & \dots \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(B'\otimes D) \arrow[dll, rounded corners] \\
\mathrm{H}_n(\mathrm{Z}(C)\otimes D) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(C\otimes D) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(B'\otimes D) \arrow[dll, rounded corners] \\
\mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{Z}(C)\otimes D) \arrow[r] & \dots &
\end{tikzcd}$$

Da die beiden Komplexe $\mathrm{Z}(C)$ und B' flache Komponenten und verschwindende Differentiale haben, sind die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen (man betrachte zuerst die Bikomplexen $\mathrm{Z}(C)\otimes^{\mathrm{bi}} D$ und $B'\otimes^{\mathrm{bi}} D$, deren horizontale Differentiale verschwinden, und wende Korollar 6.5.5 auf die Spalten an)

$$\mathrm{Z}(C)\otimes \mathrm{H}(D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(\mathrm{Z}(C)\otimes D),$$
$$B'\otimes \mathrm{H}(D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(B'\otimes D).$$

Damit verwandelt sich unsere lange exakte Sequenz in die exakte Sequenz (wir verwenden $\bigoplus_{p+q=n+1} B'_p \otimes \mathrm{H}_q(D) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{B}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D)$)

$$\begin{array}{l} \ldots \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{B}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D) \\ \xrightarrow{\delta_{n+1}} \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Z}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D) \longrightarrow \mathrm{H}_n(C \otimes D) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{B}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D) \\ \xrightarrow{\delta_n} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Z}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D) \longrightarrow \ldots \end{array}$$

und man sieht leicht, dass der Verbindungsmorphismus δ_{n+1} von den Inklusionen $i_p\colon \mathrm{B}_p(C) \subset \mathrm{Z}_p(C)$ herkommt, in Formeln $\delta_{n+1} = \bigoplus i_p \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{H}_q(C)}$. Wegen der Rechtsexaktheit von $- \otimes \mathrm{H}_q(D)$ ist

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D)$$

der Kokern von δ_{n+1}. Da in der kurzen exakten Sequenz $\mathrm{B}_p(C) \hookrightarrow \mathrm{Z}_p(C) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_p(C)$ die Mitte flach ist, zeigt Korollar 6.7.13, dass δ_n als Kern

$$\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{H}_p(C) * \mathrm{H}_q(D)$$

hat. Dies liefert die gewünschte kurze exakte Sequenz (7.6.1); es ist klar, dass die Injektion die behauptete Beschreibung hat[159]. Die erste Inklusion ist offensichtlich natürlich in C und D[160]; somit ist die gesamte kurze exakte Sequenz natürlich in C und D.[161]

Nun nehmen wir an, dass sowohl C als auch D Komplexe freier abelscher Gruppen sind.

Die kurze exakte Sequenz (7.6.2) spaltet dann, denn $\mathrm{B}_{p-1}(C)$ ist frei als Untergruppe der freien abelschen Gruppe C_{p-1} (Satz 6.8.2). Also hat die Inklusion $\mathrm{Z}_p(C) \hookrightarrow C_p$ eine Spaltung $s_p\colon C_p \twoheadrightarrow \mathrm{Z}_p(C)$.

Analog hat die Inklusion $\mathrm{Z}_p(D) \hookrightarrow D_p$ eine Spaltung $t_p\colon D_p \twoheadrightarrow \mathrm{Z}_p(D)$.

Die Verknüpfungen $C_p \otimes D_q \xrightarrow{s_p \otimes t_q} \mathrm{Z}_p(C) \otimes \mathrm{Z}_q(D) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D)$, $x \otimes y \mapsto [s_p(x)] \otimes [t_q(y)]$, liefern eine Abbildung

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D).$$

Sie verschwindet auf $\mathrm{B}_n(C \otimes D)$, denn diese Untergruppe ist erzeugt von Elementen $d(x) \otimes y \pm x \otimes d(y)$, welche unter unserer Abbildung nach

$$[s_p(d(x))] \otimes [t_q(y)] \pm [s_p(x)] \otimes [t_q(d(y))] = [d(x)] \otimes [t_q(y)] \pm [s_p(x)] \otimes [d(y)] = 0$$

gehen (denn s_p und t_p sind auf Zykeln und erst recht Bildern die Identität). Also faktorisiert die Restriktion unserer Abbildung auf $\mathrm{Z}_n(C \otimes D)$ zu einem Gruppenmorphismus

$$\mathrm{H}_n(C \otimes D) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}_p(C) \otimes \mathrm{H}_q(D),$$

welcher offensichtlich die Injektion in unserer kurzen exakten Sequenz (7.6.1) spaltet. □

Satz 7.6.4 (Künneth-Formel für singuläre Homologie; [Wik20, Künneth theorem])**.** *Seien X und Y topologische Räume. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine in X und Y natürliche kurze exakte Sequenz*

$$\bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z},\\ p+q=n}} \mathrm{H}_p(X) \otimes \mathrm{H}_q(Y) \hookrightarrow \mathrm{H}_n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{\substack{p,q\in\mathbb{Z},\\ p+q=n-1}} \mathrm{H}_p(X) * \mathrm{H}_q(Y) \tag{7.6.4}$$

[159]Wir bgründen noch, dass die Abbildung $\mathrm{Z}_p(C) \otimes \mathrm{Z}_q(D) \to \mathrm{Z}_{p+q}(C \otimes D)$ injektiv ist. Tensorieren wir die kurze exakte Sequenz (7.6.2) flacher abelscher Gruppen mit D_q, so erhalten wir nach Korollar 6.7.16 insbesondere die Injektion $\mathrm{Z}_p(C) \otimes D_q \hookrightarrow C_p \otimes D_q$. Da $\mathrm{Z}_p(C)$ flach ist, liefert die Inklusion $\mathrm{Z}_q(D) \subset D_q$ die Inklusion $\mathrm{Z}_p(C) \otimes \mathrm{Z}_q(D) \hookrightarrow \mathrm{Z}_p(C) \otimes D_q$. Der Verknüpfung der beiden soeben bewiesenen Inklusionen ist die Inklusion $\mathrm{Z}_p(C) \otimes \mathrm{Z}_q(D) \hookrightarrow C_p \otimes D_q$. Diese landet sicherlich in $\mathrm{Z}_{p+q}(C \otimes D)$ und die dorthin induzierte Abbildung ist dann natürlich ebenfalls injektiv.

[160]Sie ist natürlich in beliebigen Komplexen C und D als möglicherweise nicht injektive Abbildung – dafür ist die Voraussetzung, dass einer flache Komponenten hat, nicht nötig

[161]Also auch in Abbildungen $C \to C'$ und $D \to D'$ wo etwa C und D' flache Komponenten haben.

wobei die erste Abbildung auf allen Summanden durch das Kreuzprodukt der Homologie gegeben ist.

Überdies spaltet diese kurze exakte Sequenz, aber (bisher ohne Beweis, hoffentlich korrekt) nicht in natürlicher Weise.

Beweis. Dies folgt aus der Künneth-Formel der homologischen Algebra 7.6.2, angewandt auf die Komplexe SX und SY abelscher Gruppen mit freien Komponenten und dem Isomorphismus (7.3.11) aus dem Satz von Eilenberg-Zilber. □

Beispiel 7.6.5. Formel (7.6.4) „graphisch“ auswerten: zwei Tabellen, einmal Einträge $\mathrm{H}_p(X) \otimes \mathrm{H}_q(X)$, einmal $\mathrm{H}_p(X) * \mathrm{H}_q(X)$. Nimm Totalkomplexe, verschiebe den von $*$ um eins „nach oben“, nimm direkte Summe.

Für $X = \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ gilt $\mathrm{H}(X) = \mathbb{Z}[0] \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[1]$. Wir berechnen die Homologie von $X \times X$ (links der $\otimes$-Teil, rechts der $*$-Teil) zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_3(X) &= 0 && \oplus\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\\
\mathrm{H}_2(X) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} && \oplus\, 0,\\
\mathrm{H}_1(X) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} && \oplus\, 0,\\
\mathrm{H}_0(X) &= \mathbb{Z} && \oplus\, 0.
\end{aligned}$$

Alle anderen Homologien verschwinden.

Ende der 28. Vorlesung am 12.02.2021 (letzte Vorlesung).

Anhang A. Kategorientheorie

A.0.1. Für die Grundbegriffe der Kategorientheorie (*Kategorie*, *Funktor*) verweisen wir auf [Sch20, Appendix A]. In dem zitierten Skript werden auch die Begriffe *natürliche Transformation* und *Adjunktion* erklärt [Sch20, Definitionen 5.3.7 und 5.3.11]. Das geschieht jedoch etwas versteckt und relativ weit am Ende, weswegen wir es hier wiederholen.

Definition A.0.2. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Dann nennt man die wie folgt definierte Kategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ das **Produkt von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$**:

- Ihre Objekte sind Paare (C, D), wobei C ein Objekt von $\mathcal{C}$ und D ein Objekt von $\mathcal{D}$ ist.
- Morphismenmengen sind durch die Formel
$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})\Big((C, D), (C'.D')\Big) := \mathcal{C}(C, C') \times \mathcal{D}(D, D')$$
gegeben, für beliebige Objekte $(C, D), (C'.D') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$.
- Verknüpfungen sind komponentenweise definiert: $(f, g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g')$.
- Der Identitätsmorphismus eines Obje (C, D) ist als $\mathrm{id}_{(C,D)} := (\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_D)$ definiert.

Aufgabe A.0.3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Erkläre, wie

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(-, ?) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} &\to \mathrm{Set},\\
(X, Y) &\mapsto \mathcal{C}(X, Y)
\end{aligned}$$

ein Funktor ist.

Definition A.0.4. Seien $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\sigma \colon F \Rightarrow G$ (manchmal auch als $\sigma \colon F \to G$ notiert) ist eine Familie $(\sigma_C)_{C \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}}$ von Morphismen $\sigma_C \colon F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C')\\
{\scriptstyle \sigma_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{C'}}\\
G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C')
\end{array}$$

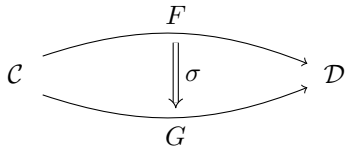
in $\mathcal{D}$ für alle Morphismen $f \colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$ kommutiert, also $\sigma_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \sigma_C$ gilt. Oft wird hierfür die Sprechweise verwendet, dass ein Morphismus $\sigma_C \colon F(C) \to G(C)$ in $\mathcal{D}$ **natürlich in** $C \in \mathcal{C}$ ist.

Will man in kurzer Notation auch die beiden Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ erwähnen, so schreibt man eine solche natürliche Transformation als $\sigma\colon F \Rightarrow G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Die **Kategorie $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ der Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$**[162] hat als Objekte die Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ und als Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren; die Identitätsmorphismen sind offensichtlich; gegeben Morphismen $\sigma\colon F \Rightarrow G$ und $\tau\colon G \Rightarrow H$ ist $\tau\sigma = \tau\circ\sigma\colon F \Rightarrow H$ durch $(\tau\circ\sigma)_C := \tau_C \circ \sigma_C$ definiert.

Der Begriff **Morphismus von Funktoren** alias Morphismus in der Kategorie $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ wird synonym zum Begriff *natürliche Transformation* verwendet. Isomorphismen von Funktoren $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ werden auch **Isotransformationen** genannt.

A.0.5. Eine natürliche Transformation $\sigma\colon F \Rightarrow G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kann man sich durch ein Diagramm



veranschaulichen.

A.0.6. Eine natürliche Transformation $\tau = (\tau_C)_{C\in\mathcal{C}}\colon F \Rightarrow G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Isotransformtion, wenn τ_C für alle Objekte $C \in \mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel A.0.7. Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ und jeden topologischen Raum $X \in \mathrm{Top}$ haben wir den Randoperator $\partial_q^X\colon \mathrm{S}_q X \to \mathrm{S}_{q-1}X$ definiert (siehe Definition 3.1.11). Für fixiertes $q \in \mathbb{Z}$ ist das Datum $\partial_q := (\partial_q^X)_{X\in\mathrm{Top}}$ eine natürliche Transformation

$$\partial_q\colon \mathrm{S}_q \Rightarrow \mathrm{S}_{q-1}$$

zwischen den beiden Singuläre-Ketten-Funktoren $\mathrm{S}_q, \mathrm{S}_{q-1}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$. Dies folgt sofort aus der Kommutativität des Diagramms (3.2.1).

Beispiel A.0.8. Der Leser überlege sich, dass die Morphismen (3.4.1) aus dem Satz von Hurewicz 3.4.2 eine natürliche Transformation vom Funktor Fundamentalgruppe

$$\pi_1(-)\colon \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Grp}$$

in die Verknüpfung der Funktoren

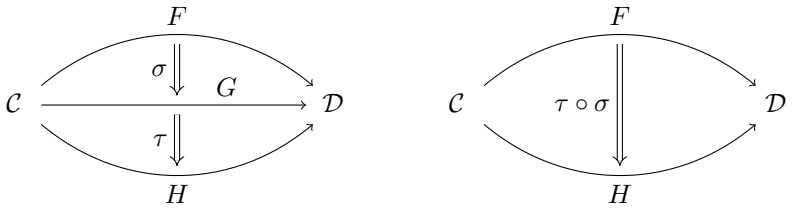
$$\mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top} \xrightarrow{\mathrm{H}_1} \mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$$

definieren, wobei $\mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}$ und $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ die Vergissfunktoren sind.

Schränkt man beide Funktoren und die natürliche Transformation auf die volle Unterkategorie $\mathrm{Top}_*^{\mathrm{wegzshg}}$ aller punktieren Räume (X, x), für die X wegzusammenhängend ist, ein, so erhält man nach dem Satz von Hurewicz eine Isotransformation (formal ist das Einschränken das Vorschalten des Inklusionsfunktors $\mathrm{Top}_*^{\mathrm{wegzshg}} \to \mathrm{Top}_*$, was allgemein in A.0.10 erklärt ist.)

A.0.9. Gegeben zwei natürliche Transformationen wie im linken Diagramm, ist ihre in Definition A.0.4 erklärte Verknüpfung im rechten Diagramm illustriert.

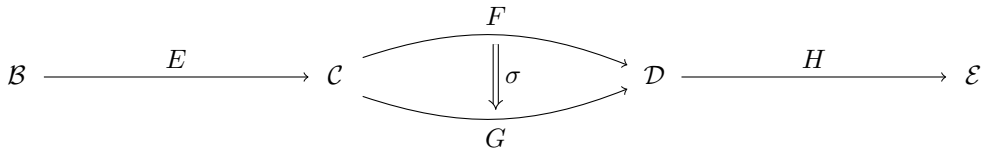
(A.0.1)



Da in diesem Diagramm σ und τ vertikal übereinanderstehen, nennt man diese Verknüpfung auch *vertikale Verknüpfung*. Sie wird auch als $\tau \circ_1 \sigma$ notiert, da wir entlang des eindimensionalen Pfeils alias Funktors G verknüpfen.

[162] Manchmal auch als $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ notiert

A.0.10. Linker und rechter Teil des Diagramms



illustrieren die beiden im Folgenden beschriebenen Ausgangssituationen.

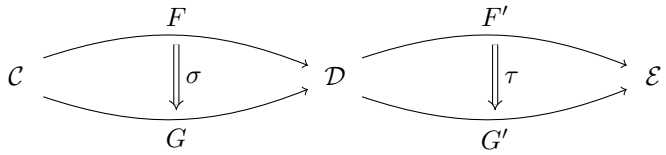
(a) (Vorschalten eines Funktors) Gegeben eine natürliche Transformation $\sigma\colon F \Rightarrow G$ und einen Funktor $E\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ definiert man eine natürliche Transformation $\sigma E\colon FE \Rightarrow GE$ per $(\sigma E)_B := \sigma_{BE}$.

(b) (Nachschalten eines Funktors) Gegeben eine natürliche Transformation $\sigma\colon F \Rightarrow G$ und einen Funktor $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ definiert man eine natürliche Transformation $H\sigma\colon HF \Rightarrow HG$ per $(H\sigma)_C := H\sigma_C$.

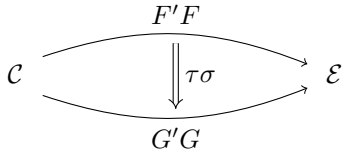
Diese beiden Verknüpfungsrezepte sind Spezialfälle einer allgemeineren, in Aufgabe A.0.11 erklärten Verknüpfung (nimm dort $F = G$ und $\sigma = \mathrm{id}_F$ bzw. $F' = G'$ und $\tau = \mathrm{id}_{F'}$).

Aufgabe A.0.11.

(a) Seien zwei natürliche Transformationen σ und τ wie im folgenden Bild gegeben.



Definiere aus diesem Datum eine natürliche Transformation $\tau\sigma = \tau \circ \sigma\colon F'F \Rightarrow G'G$, wobei $F'F = F' \circ F$ und $G'G = G' \circ G$ die übliche Verknüpfung von Funktoren bezeichnet (siehe [Sch20, A.2.15]).



Hinweis: A priori wird man auf zwei mögliche Definitionen kommen, die aber übereinstimmen, was zu zeigen ist.

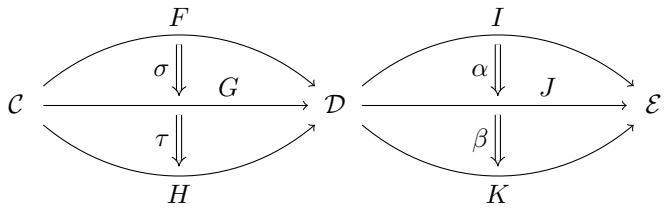
Bemerkung: Da im obigen Diagramm σ und τ horizontal nebeneinanderstehen, nennt man diese Verknüpfung auch *horizontale Verknüpfung*. Sie wird auch als $\tau \circ_0 \sigma$ notiert, da wir entlang des nulldimensionalen Punktes alias der Kategorie $\mathcal{D}$ verknüpfen.

Wir haben $\tau\sigma$ auch in Definition A.0.4 (vgl. Diagramm (A.0.2)) definiert und in A.0.9 als $\tau \circ_1 \sigma$ notiert. Aus dem Kontext muss man erkennen, was gemeint ist; alternativ schreibt man genauer $\tau \circ_0 \sigma$ bzw. $\tau \circ_1 \sigma$.

(b) Horizontale Verknüpfung ist assoziativ: Es gilt $\mu(\tau\sigma) = (\mu\tau)\sigma$ für jede weitere natürliche Transformation $\mu\colon F'' \Rightarrow G''\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

(c) Gegeben ein Diagramm von Kategorien, Funktoren und natürlichen Transformationen

(A.0.2)



gilt

$$(\beta \circ_1 \alpha) \circ_0 (\tau \circ_1 \sigma) = (\beta \circ_0 \tau) \circ_1 (\alpha \circ_0 \sigma).$$

Definition A.0.12. Ist C ein Objekt einer Kategorie, so ist

$$Y(C) := \mathcal{C}(C,-)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$$

ein Funktor, also ein Objekt $Y(C) \in \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$. Er heißt der **durch C dargestellte Funktor**. (Wir haben diesen bereits in [Sch20, Beispiel A.2.14] kennengelernt; vgl. auch [Sch20, Beispiel A.2.9].)

Satz A.0.13 (Yoneda-Lemma)**.** *Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $C \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ ein Funktor, also ein Objekt $F \in \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$. Dann ist die Abbildung*

$$y_{C,F}\colon \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}\Big(\underbrace{\mathcal{C}(C,-)}_{=Y(C)}, F\Big) \xrightarrow{\sim} F(C),$$
$$\tau \mapsto \tau_C(\mathrm{id}_C),$$

*eine Bijektion von Mengen, genannt **Yoneda-Bijektion**. Die inverse Abbildung bildet ein Element $t \in F(C)$ auf diejenige (wohldefinierte) natürliche Transformation $\sigma = (\sigma_{C'})_{C' \in \mathcal{C}}\colon \mathcal{C}(C,-) \Rightarrow F$ ab, für die $\sigma_{C'}$ durch*

$$\sigma_{C'}\colon \mathcal{C}(C,C') \to F(C'),$$
$$g \mapsto \Big(F(g)\Big)(t),$$

definiert ist.

Beweis. Exzellente Übung zum Einüben der Begriffe. □

Korollar A.0.14. *Der sogenannte **Yoneda-Funktor***

$$Y\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{C}},$$
$$C \mapsto Y(C) = \mathcal{C}(C,-),$$

ist volltreu.

Beweis. Exzellente Übung zum Einüben der Begriffe. □

Aufgabe A.0.15. Beweise Korollar A.0.14.

Aufgabe A.0.16. Die Yoneda-Bijektion $y_{C,F}$ aus dem Yoneda Lemma A.0.13 ist (die beiden ersten Aussagen folgen aus der dritten und sind aus pädagogischen Gründen angegeben)

- für fixiertes $C \in \mathcal{C}$ natürlich in $F \in \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ (im Sinne von Definition A.0.4);
- für fixiertes $F \in \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ natürlich in $C \in \mathcal{C}$;
- natürlich in $(C,F) \in \mathcal{C} \times \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$.

Hinweis: Bitte jeweils genau angeben, zwischen welchen beiden Funktoren wir eine natürliche Transformation erhalten. Falls die Beschreibung dieser Funktoren nicht offensichtlich ist, ist diese anzugeben.

Definition A.0.17. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien und seien $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren:

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

Eine **Adjunktion von L mit R** ist eine Isotransformation

$$\alpha\colon \mathcal{D}(L-,-) \xRightarrow{\sim} \mathcal{C}(-,R-)$$

von Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathrm{Set}$, d. h. $\alpha = (\alpha_{(C,D)}) = (\alpha_{C,D})$ ist eine Familie bijektiver Abbildungen

$$\alpha_{C,D}\colon \mathcal{D}(LC,D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(C,RD)$$

von Mengen, die mit Morphismen sowohl in $\mathcal{C}$ als auch in $\mathcal{D}$ im Sinne von A.0.18 kompatibel sind.

In diesem Fall nennt man L einen **Linksadjungierten zu R** und R einen **Rechtsadjungierten zu L**. Man sagt auch, dass (L,R) oder genauer (L,R,α) ein **adjungiertes Paar** bilden oder dass L **linksadjungiert zu R ist** oder dass R **rechtsadjungiert zu L ist**. Oft ist man hier nachlässig und nennt α nicht explizit.

A.0.18. Gegeben Bijektionen $\alpha_{C,D}$ wie in Definition A.0.17 bedeutet deren Kompatibilität, dass für alle Morphismen $c\colon C' \to C$ in $\mathcal{C}$ und $d\colon D \to D'$ in $\mathcal{D}$ (oder äquivalent alle Morphismen $(c^{\mathrm{op}}, d)\colon (C^{\mathrm{op}}, D) \to (C'^{\mathrm{op}}, D')$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LC, D) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{C,D}} & \mathcal{C}(C, RD) \\ {\scriptstyle f \mapsto d \circ f \circ Lc}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g \mapsto Rd \circ g \circ c} \\ \mathcal{D}(LC', D') & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{C',D'}} & \mathcal{C}(C', RD') \end{array}$$

kommutativ ist, dass also

$$\alpha(d \circ f \circ Lc) = Rd \circ \alpha(f) \circ c$$

für alle Morphismen $f\colon LC \to D$ gilt. Schreiben wir die horizontalen Bijektionen als $h \mapsto \overline{h}$ statt $h \mapsto \alpha(h)$, so wird diese Bedingung zu

$$\overline{d \circ f \circ Lc} = Rd \circ \overline{f} \circ c.$$

A.0.19. Sei (L, R, α) eine Adjunktion wie in Definition A.0.17. Seien beliebige Morphismen $c\colon C' \to C$ in $\mathcal{C}$ und $d\colon D \to D'$ in $\mathcal{D}$ gegeben. Seien $g\colon LC' \to D'$ und $f\colon LC \to D$ beliebige Morphismen in $\mathcal{D}$. Seien $\overline{g} = \alpha(g)\colon C' \to RD'$ und $\overline{f} = \alpha(f)\colon C \to RD$ die zugehörigenentsprechenden Morphismen in $\mathcal{D}$. Dann ist das folgende linke Diagramm genau dann kommutativ, wenn das rechte kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} LC' & \xrightarrow{g} & D' \\ {\scriptstyle Lc}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle d} \\ LC & \xrightarrow{f} & D \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\overline{g}} & RD' \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Rd} \\ C & \xrightarrow{\overline{f}} & RD \end{array}$$

Beispiel A.0.20. Der Funktor „freie abelsche Gruppe“ $\mathbb{Z}-\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Ab}$, $M \mapsto \mathbb{Z}M$, ist linksadjungiert zum Vergiss-Funktor $V\colon \mathrm{Ab} \to \mathrm{Set}$, denn für jede Menge M und jede abelsche Gruppe $A \in \mathrm{Ab}$ ist die Restriktion entlang $M \hookrightarrow \mathbb{Z}M = V\mathbb{Z}M$ eine Bijektion

$$\alpha_{M,A}\colon \mathrm{Ab}(\mathbb{Z}M, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Set}(M, VA) \tag{A.0.3}$$

und all diese Bijektionen $(\alpha_{M,A})_{M \in \mathrm{Set}, A \in \mathrm{Ab}}$ sind kompatibel und definieren deswegen eine Isotransformation

$$\alpha := (\alpha_{M,A})_{M \in \mathrm{Set}, A \in \mathrm{Ab}}\colon \mathrm{Ab}(\mathbb{Z}-, -) \xRightarrow{\sim} \mathrm{Set}(-, V-). \tag{A.0.4}$$

Beispiel A.0.21. Analog ist der Funktor „freie Gruppe“ $F\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Grp}$ linksadjungiert zum Vergiss-Funktor $V\colon \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$.

Lemma A.0.22. *Sei $(L, R, \alpha) = (L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}, \alpha)$ ein adjungiertes Paar von Funktoren. Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und seien $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ und $G \in \mathcal{D}^{\mathcal{A}}$ Funktoren, zur Illustration ein Bild:*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A} & & \\ & {\scriptstyle F}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle G} & \\ \mathcal{C} & & \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} & & \mathcal{D} \end{array}$$

Dann ist die Abbildung

$$\alpha_{F,G}\colon \mathcal{D}^{\mathcal{A}}(LF, G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(F, RG),$$
$$\mu = (\mu_A)_{A \in \mathcal{A}} \mapsto \Big(\alpha_{FA,GA}(\mu_A)\Big)_{A \in \mathcal{A}}$$

eine (wohldefinierte) Bijektion. In Worten entsprechen sich natürliche Transformationen $LF \Rightarrow G$ und $F \Rightarrow RG$ bijektiv.[163]

[163] Genauer gilt: Dann ist auch

$$(L^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \alpha^{\mathcal{A}})$$

ein adjungiertes Paar von Funktoren, wobei die beiden Funktoren

- $L^{\mathcal{A}}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{D}^{\mathcal{A}}$, $F \mapsto LF = L \circ F$, durch Nachschalten von L und

Beweis. Wir verwenden wie in A.0.18 die abkürzende Notation $h \mapsto \overline{h}$ statt $h \mapsto \alpha(h)$.

Die Bijektionen $\alpha_{C,D}\colon \mathcal{D}(LC, D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(C, RD)$ liefern eine Bijektion

$$\prod_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{D}(LFA, GA) \xrightarrow{\sim} \prod_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{C}(FA, RGA),$$
$$\mu = (\mu_A)_{A\in\mathcal{A}} \mapsto \overline{\mu} := \left(\overline{\mu}_A\right)_{A\in\mathcal{A}} = \left(\alpha_{FA,GA}(\mu_A)\right)_{A\in\mathcal{A}}.$$

Zu zeigen ist, dass μ genau dann eine natürliche Transformation $LF \Rightarrow G$ definiert, wenn $\overline{\mu}$ eine natürliche Transformation $F \Rightarrow RG$ definiert. Für jeden Morphismus $a\colon A \to A'$ in $\mathcal{A}$ ist also zu zeigen, dass das folgende linke Diagramm genau dann kommutiert, wenn das rechte kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} LF(A) & \xrightarrow{\mu_A} & G(A) \\ {\scriptstyle LF(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(a)} \\ LF(A') & \xrightarrow{\mu_{A'}} & G(A') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\overline{\mu}_A} & RG(A) \\ {\scriptstyle F(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle RG(a)} \\ F(A') & \xrightarrow{\overline{\mu}_{A'}} & RG(A') \end{array}$$

Dies folgt aber aus A.0.19. □

Anhang B. Homologische Algebra

B.0.1. Wir fixieren in diesem Abschnitt einen Ring R und arbeiten in der Kategorie $\mathrm{Mod}(R)$ der R-Moduln. Injektive Abbildungen von R-Moduln werden als $M \hookrightarrow N$ notiert, surjektive als $M \twoheadrightarrow N$, bijektive als $M \xrightarrow{\sim} N$.

B.0.2. Ein besonders wichtiges Beispiel ist der Ring $\mathbb{Z}$. Die Kategorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ ist nichts anderes als die Kategorie Ab abelscher Gruppen.

B.0.3. Vieles, was wir für die Kategorie $\mathrm{Mod}(R)$ erklären, funktioniert sinngemäß auch für beliebige abelsche Kategorien (mit der Notation $M \hookrightarrow N$ für Monomorphismen, $M \twoheadrightarrow N$ für Epimorphismen und $M \xrightarrow{\sim} N$ für Isomorphismen).

B.1. Die Kategorie der Komplexe und Homologie.

Definition B.1.1. Ein **Komplex**[164] von R-Moduln oder **Komplex in** $\mathrm{Mod}(R)$[165] ist ein Diagramm

$$A = (A, d) = ((A_p)_{p\in\mathbb{Z}}, (d_p)_{p\in\mathbb{Z}}) = \left(\ldots \to A_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} A_p \xrightarrow{d_p} A_{p-1} \to \ldots\right)$$

von R-Moduln A_p und R-Modulmorphismen $d_p\colon A_p \to A_{p-1}$ mit der Eigenschaft, dass

$$d_{p-1} \circ d_p = 0$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Oft schreibt man d statt d_p. Dann verkürzt sich die Bedingung $d_{p-1} \circ d_p = 0$ zu $d^2 = d \circ d = 0$. Man nennt die Abbildungen d_p **Differentiale**. Man nennt A_p die **Komponente** von A im **Grad** p.

B.1.2. Wir wählen meist Großbuchstaben wie A, B, C, E vom Anfang des Alphabets für Komplexe und Großbuchstaben L, M, N für Moduln.

B.1.3. In der Literatur ist auch die Notation $A_\bullet$ für einen Komplex verbreitet. Ich persönlich mag sie nicht, denn sie verursacht eigentlich nur unnötige Schreibarbeit – ich schreibe ja auch Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ nicht als

---

- $R^{\mathcal{A}}\colon \mathcal{D}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$, $G \mapsto RG = R \circ G$, durch Nachschalten von R

definiert sind und

$$\alpha^{\mathcal{A}}\colon \mathcal{D}^{\mathcal{A}}(L^{\mathcal{A}}-, -) \xRightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(-, R^{\mathcal{A}}-)$$

die im Lemma angegebenen Komponenten $\alpha_{F,G}$ hat.

[164] oder manchmal **Kettenkomplex**, vermutlich historisch motiviert durch den Komplex der singulären Ketten aus Proposition 3.1.14.

[165] abkürzend für *Komplex mit Komponenten in* $\mathrm{Mod}(R)$

$x_\bullet$.[166] Als Autor schreibe ich lieber präzise auf, ob es sich bei A um einen Komplex, eine abelsche Gruppe, eine Funktion oder was auch immer handelt.

Beispiele B.1.4. Der Nullkomplex hat in allen Komponenten den trivialen Modul $\{0\}$ und notwendig verschwindende Differentiale.

Definition B.1.5. Sei A ein Komplex in $\mathrm{Mod}(R)$. Definiere R-Moduln

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{B}_p(A) & := & \mathrm{im}(d_{p+1}) & \subset & \mathrm{Z}_p(A) & := & \ker(d_p) & \subset & A_p \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \mathrm{H}_p(A) & := & \frac{Z_p(A)}{B_p(A)} & & \end{array}$$

wobei man beachte, dass die erste Inklusion aus $d^2 = 0$ folgt. Man nennt $\mathrm{H}_p(A) = \mathrm{H}_p A$ die **p-te Homologie** von A.[167] Die Elemente von $\mathrm{Z}_p(A) = \mathrm{Z}_p A$ heißen **p-Zykel** (englisch *p-cycles*, die Elemente von $\mathrm{B}_p(A) = \mathrm{B}_p A$ heißen **p-Ränder** (englisch *p-boundaries*, die Elemente von $\mathrm{H}_p(A)$ heißen **p-te Homologieklassen**. Ist $z \in \mathrm{Z}_p(A)$ ein Zykel, so wird seine Homologieklasse als $[z] \in \mathrm{H}_p(A)$ notiert.

Man nennt zwei Elemente $a, a' \in A_p$ **homolog**, falls ihre Differenz ein Rand ist, in Formeln $a - a' \in \mathrm{B}_p(A)$, falls also $a - a' = d(b)$ für ein geeignetes $b \in A_{p+1}$ gilt. Ein Element $a \in A_p$ heißt **nullhomolog**, wenn es zum Nullelement homolog ist, was schlicht bedeutet, dass es ein Rand ist.

B.1.6. Zwei Elemente a, a' sind genau dann homolog, wenn ihre Differenz $a - a'$ nullhomolog (= ein Rand) ist. Homolog-Sein ist eine Äquivalenzrelation auf A_p.

B.1.7. Ein Komplex A in $\mathrm{Mod}(R)$ ist genau dann bei A_p exakt (siehe B.3.1) wenn $\mathrm{H}_p(A) = 0$ gilt. Die Homologie ist also ein *Maß für die (Nicht-)Exaktheit von A.*

Definition B.1.8. Ein Komplex A in $\mathrm{Mod}(R)$ heißt **azyklisch** oder **exakt**, wenn jeder Zykel ein Rand ist, wenn also $\mathrm{H}_p(A) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt, wenn also A an allen Stellen A_p exakt ist.

Aufgabe B.1.9. Sei $A \in \mathrm{Kom}(R)$ ein Komplex von R-Moduln. Dann ist die p-te Homologie sowohl

- der Kokern des durch d_{p+1} induzierten Morphismus $A_{p+1} \to \ker(d_p)$, in Formeln
$$\mathrm{H}_p(A) = \mathrm{cok}\big(A_{p+1} \to \ker(d_p)\big),$$
als auch
- kanonisch isomorph zum Kern des durch d_p induzierten Morphismus $\mathrm{cok}(d_{p+1}) \to A_{p-1}$, in Formeln
$$\mathrm{H}_p(A) \cong \ker\big(\mathrm{cok}(d_{p+1}) \to A_{p-1}\big).$$

Definition B.1.10. Seien A, B Komplexe in $\mathrm{Mod}(R)$. Ein **Morphismus** $f\colon A \to B$ **von Komplexen**[168] ist eine Folge $f = (f_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von R-Modulmorphismen $f_p\colon A_p \to B_p$, so dass alle Quadrate im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{d_p^A} & A_{p-1} & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_p} & & \downarrow{\scriptstyle f_{p-1}} & & \\ \ldots & \longrightarrow & B_p & \xrightarrow{d_p^B} & B_{p-1} & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

kommutativ sind (in Formeln wird also $f_{p-1} \circ d_p^A = d_p^B \circ f_p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gefordert).

Die Kategorie $\mathrm{Kom}(R)$ der Komplexe in $\mathrm{Mod}(R)$ ist wie folgt definiert:[169]

- Ihre Objekte sind die Komplexe in $\mathrm{Mod}(R)$.

---

[166] Nicht ganz vergleichbar, aber ähnlich ist die Notation $\vec{x}$ für Vektoren, die oft in der Schule verwendet wird – als ob nur etwas mit einem Pfeil darüber ein Vektor sein könnte, weil man Vektoren gerne als Pfeile veranschaulicht. Dann sollte man vielleicht auch jedes Symbol für eine Menge einkreisen, denn in Mengendiagrammen werden Mengen oft als Kreise dargestellt...

[167] Oft hört man p-te Homologiegruppe, auch wenn p-ter Homologiemodul (oder Homologie-R-Modul) der genauere Begriff ist. Im Kontext abelscher Kategorien sollte man vom p-ten Homologieobjekt sprechen.

[168] Manchal Kettenabbildung oder Kettenmorphismus genannt.

[169] Man mag diese Kategorie auch als $\mathrm{Kom}(\mathrm{Mod}(R))$ notieren. Diese Notation hat den Vorteil, dass man $\mathrm{Mod}(R)$ durch eine beliebige abelsche (oder auch nur additive) Kategorie ersetzen kann.

- Für Komplexe A, B in $\mathrm{Mod}(R)$ notieren wir die Morphismenmenge $\big(\mathrm{Kom}(R)\big)(A,B)$ kurz als $\mathrm{Kom}_R(A,B)$. Sie besteht per Definition aus allen Morphismen $f\colon A \to B$ von Komplexen.
- Verknüpfungen $\circ\colon \mathrm{Kom}_R(B,C) \times \mathrm{Kom}_R(A,B) \to \mathrm{Kom}_R(A,C)$ und Identitäten $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Kom}_R(A,A)$ sind offensichtlich.

B.1.11. Die Menge $\mathrm{Kom}_R(A,B)$ ist offensichtlich eine abelsche Gruppe; die Verknüpfung $\circ\colon \mathrm{Kom}_R(B,C) \times \mathrm{Kom}_R(A,B) \to \mathrm{Kom}_R(A,C)$ von Morphismen ist $\mathbb{Z}$-bilinear.[170]

B.1.12. Ein Morphismus $f = (f_p)_{p\in\mathbb{Z}}\colon A \to B$ in $\mathrm{Kom}(R)$ ist offensichtlich genau dann ein Isomorphismus, wenn alle f_p Isomorphismen in $\mathrm{Mod}(R)$ sind.

Lemma B.1.13. *Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus in $\mathrm{Kom}(R)$. Dann induziert f Morphismen*[171]

$$\mathrm{B}_p(f)\colon \mathrm{B}_p(A) \to \mathrm{B}_p(B),$$
$$\mathrm{Z}_p(f)\colon \mathrm{Z}_p(A) \to \mathrm{Z}_p(B),$$
$$\mathrm{H}_p(f)\colon \mathrm{H}_p(A) \to \mathrm{H}_p(B)$$

auf den R-Moduln der Ränder, Zykel und auf der Homologie. Genauer sind diese Zuordnungen funktoriell, beispielsweise ist die p-te Homologie

$$\mathrm{H}_p\colon \mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$$

ein Funktor. Genauer sollte man sagen, dass das offensichtliche Diagramm, das (4.9.4) mit dem analogen Diagramm für B verbindet, kommutativ ist. (Wer Aufgabe B.1.9 gemacht hat, kann das Diagramm auch noch um $\ker\big(\mathrm{cok}(d_{p+1})) \to A_{p-1}\big)$ samt offensichtlichen Pfeilen ergänzen.)

Beweis. Offensichtlich. □

Aufgabe B.1.14. Beweise Lemma B.1.13.

B.1.15. später wegen Lemma 4.15.11 ergänzt. Sei $\varphi\colon S \to R$ ein Ringmorphismus (etwa der eindeutige Ringmorphismus $\mathbb{Z} \to R$). Dann können wir jeden R-Modul M auch als S-Modul auffassen: Wir nehmen dieselbe abelsche Gruppe M und versehen sie mit der Skalarmultiplikation $s.m := \varphi(s).m$. Man notiert diesen S-Modul ebenfalls als M oder präziser als $\mathrm{res}^R_S(M)$. Dies liefert in offensichtlicher Weise einen Funktor $\mathrm{res} = \mathrm{res}^R_S = \mathrm{res}_\varphi\colon \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ (er ist die Identität auf Morphismen). (Im Spezialfall $\mathbb{Z} \to R$ bildet er einen R-Modul schlicht auf die unterliegende abelsche Gruppe ab.)

Wir dehnen diesen Funktor in offensichtlicher Weise zu einem Funktor $\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Kom}(S)$ aus. Dieser Funktor vertauscht offensichtlich mit den Funktoren „Bilde p-Zykel Z_p“, „Bilde p-Ränder B_p“, „Bilde die p-te Homologie H_p“, womit wir beispielsweise im Fall H_p meinen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kom}(R) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Kom}(S) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}_p} \\ \mathrm{Mod}(R) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Mod}(S) \end{array}$$

kommutiert.

Definition B.1.16. Ein Morphismus $f\colon A \to B$ in $\mathrm{Kom}(R)$ heißt **Quasi-Isomorphismus**, falls er auf allen Homologiemoduln einen Isomorphismus induziert, falls also die Abbildung $\mathrm{H}_p(f)\colon \mathrm{H}_p(A) \to \mathrm{H}_p(B)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.

B.1.17. Jeder Isomorphismus in $\mathrm{Kom}(R)$ ist ein Quasi-Isomorphismus.

B.1.18. Ist $A \in \mathrm{Kom}(R)$ ein Komplex von R-Moduln, so kann man seine Homologie auch als Komplex

$$\mathrm{H}(A) = (\mathrm{H}(A), 0) = ((\mathrm{H}(A)_p)_{p\in\mathbb{Z}}, (0)_{p\in\mathbb{Z}}) = \Big(\ldots \xrightarrow{0} \mathrm{H}_{p+1}(A) \xrightarrow{0} \mathrm{H}_p(A) \xrightarrow{0} \mathrm{H}_{p-1}(A) \to \ldots\Big)$$

[170] Ist R kommutativ, so sind die Morphismenräume R-Moduln und die Verknüpfung ist R-bilinear. Für beliebiges R sind die Morphismenräume Moduln über dem Zentrum $\mathrm{Z}(R)$ von R und die Verknüpfung ist $\mathrm{Z}(R)$-bilinear.

[171] Der Leser beachte den Unterschied zwischen B und B.

mit verschwindenden Differentialen auffassen; diesen nennt man **totale Homologie von** A oder auch kurz **Homologie von** A. Totale Homologie definiert offensichtlich einen Funktor

$$\mathrm{H}\colon \mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Kom}(R). \tag{B.1.1}$$

Ein Morphismus in $\mathrm{Kom}(R)$ ist genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn sein Bild unter H ein Isomorphismus ist.

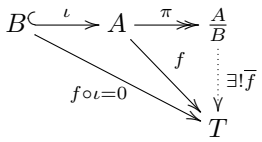
Analog kann man Zykel Z und Ränder B als Funktoren $\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Kom}(R)$ auffassen.[172]

Definition B.1.19. Ein **Unterkomplex** eines Komplexes $A \in \mathrm{Kom}(R)$ ist eine Familie $B = (B_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Untermoduln $B_p \subset A_p$ mit $d_p(B_p) \subset B_{p-1}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Es ist klar, dass $B = (B_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ zusammen mit den induzierten Differentialen $B_p \to B_{p-1}$ selbst ein Komplex in $\mathrm{Mod}(R)$ ist, was die Terminologie rechtfertigt. Man schreibt einen Unterkomplex meist als $A \subset B$.

B.1.20 (Quotientenkomplex)**.** Sei $A \subset B$ ein Unterkomplex. Dann induzieren die Differentiale d_p^A Gruppenmorphismen $d_p\colon \frac{A_p}{B_p} \to \frac{A_p}{B_p}$ und machen die Familie $\left(\frac{A_p}{B_p}\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ der Quotienten zu einem Komplex. Dieser wird als $\frac{A}{B} = A/B$ notiert und **Quotient von** A **durch/nach** B genannt.

Seien $B \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{B}$ die offensichtlichen Morphismen von Komplexen (Inklusion bzw. Projektion).

Universelle Eigenschaft von $\frac{A}{B}$: Für jeden Komplex T und jeden Morphismus $f\colon A \to T$ mit $f|_B = 0$ gibt es genau einen Morphismus $\overline{f}\colon \frac{A}{B} \to T$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$, wie im folgenden Bild illustriert (definiere $\overline{f}$ komponentenweise und zeige, dass es ein Morphismus von Komplexen ist).



Äquivalent: Für jeden Komplex T definiert das Vorschalten von π eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Kom}_R(\tfrac{A}{B}, T) &\xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Kom}_R(A,T) \mid f \circ \iota = 0\}, \\ g &\mapsto g \circ \pi. \end{aligned}$$

Um also einen Morphismus $\frac{A}{B} \to T$ in $\mathrm{Kom}(R)$ zu definieren, genügt es (ähnlich wie bei abelschen Gruppen, Moduln, Vektorräumen), einen Morphismus $f\colon A \to T$ mit $f|_B = 0$ anzugeben.

B.1.21. Die folgenden Aufgaben zeigen, wie man wohlbekannte Begriffsbildungen und Resultate für Moduln „komponentenweise“ auf Komplexe von Moduln überträgt.

Aufgabe B.1.22. Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus in $\mathrm{Kom}(R)$.

(a) Zeige, dass $\ker(f)_p := \ker(f_p\colon A_p \to \mathrm{B}_p)$ einen Unterkomplex $\ker(f) \subset A$ definiert. Dieser heißt **Kern von** f.

(b) Zeige, dass $\mathrm{im}(f)_p := f_p(A_p) = \mathrm{im}(f_p\colon A_p \to \mathrm{B}_p)$ einen Unterkomplex $\mathrm{im}(f) \subset B$ definiert. Dieser heißt **Bild von** f.

(c) (Homomorphiesatz = Erster Isomorphiesatz) Zeige, dass f einen Isomorphismus $\frac{A}{\ker(f)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$ induziert.

Bemerkung: Der **Kokern von** f ist als $\mathrm{cok}(f) := \frac{B}{\mathrm{im}(f)}$ definiert.

Bemerkung: Auch die anderen Isomorphiesätze [Wik20, Isomorphism theorems for modules] gelten sinngemäß für Komplexe von Moduln, da sie komponentenweise gelten.

Definition B.1.23. Gegeben eine Familie $(A(i))_{i\in I}$ von Komplexen von R-Moduln definieren wir ihre **direkte Summe**

$$\bigoplus A(i) = \bigoplus_{i\in I} A(i)$$

[172] Wer mag – und dies ist eigentlich besser –, kann all diese Funktoren als Funktoren $\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$ auffassen (vgl. 4.10.1). Dahinterschalten des offensichtlichen Funktors „versieh mit Null-Differentialen“ $\mathrm{Mod}(R)^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Kom}(R)$ liefert dann die oben beschriebenen Funktoren.

„komponentenweise“ als den folgenden Komplex von R-Moduln: Seine p-te Komponente ist die direkte Summe der p-ten Komponenten der $A(i)$:

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} A(i)\Big)_p := \bigoplus_{i\in I} A(i)_p$$

Sein p-tes Differential ist die direkte Summe der p-ten Differentiale der $A(i)$:

$$d_p^{\bigoplus A(i)} \colon \Big(\bigoplus_{i\in I} A(i)\Big)_p \to \Big(\bigoplus_{i\in I} A(i)\Big)_{p-1},$$
$$(a(i))_i \mapsto (d_p(a(i))_i$$

Offensichtlich definiert dies in der Tat einen Komplex.

Aufgabe B.1.24 (Homologie vertauscht mit direkten Summen)**.** Ist $(A(i))_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathrm{Kom}(R)$, so ist für alle $p \in \mathbb{Z}$ der offensichtlich Gruppenmorphismus ein Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{H}_p(A(i)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_p(\bigoplus_{i\in I} A(i)).$$

Aufgabe B.1.25 (Direkte Summe von Komplexen ist Koprodukt)**.** Sei $(A(i))_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathrm{Kom}(R)$. Dann ist die direkte Summe $\bigoplus A(i)$ (zusammen mit den offensichtlichen Morphismen $\mathrm{incl}_j \colon A(j) \to \bigoplus A(i)$) ein Koprodukt der $(A(i))_i$ in der Kategorie $\mathrm{Kom}(R)$ im Sinne von [Sch20, Def. 3.6.10].

B.2. **Die Homotopiekategorie von Komplexen.**

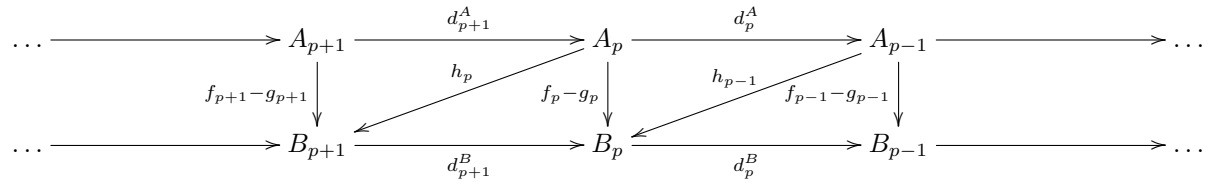
Definition B.2.1. Zwei Morphismen $f, g \colon A \to B$ in $\mathrm{Kom}(R)$ heißen **homotop**, falls es eine Familie $h = (h_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von R-Modulmorphismen $h_p \colon A_p \to B_{p+1}$ gibt mit

$$f_p - g_p = d^B_{p+1} \circ h_p + h_{p-1} \circ d^A_p$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ oder kurz

$$f - g = d \circ h + h \circ d$$

oder noch kürzer $f - g = dh + hd$. Man nennt eine solche Familie $h = (h_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine **Homotopie von f nach g**. Zur Illustration ein Bild:



Aufgabe B.2.2. Sind $f, g \colon A \to B$ homotope Morphismen in $\mathrm{Kom}(R)$, so gilt $\mathrm{H}_p(f) = \mathrm{H}_p(g)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe B.2.3. „Homotop-Sein“ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Kom}_R(A, B)$.

Definition B.2.4. Ein Morphismus $f \colon A \to B$ in $\mathrm{Kom}(R)$ heißt **nullhomotop**, wenn er zum Nullmorphismus homotop ist, wenn also $f = dh + hd$ für eine geeignete Homotopie h gilt.

B.2.5. Zwei Morphismen $f, g \colon A \to B$ sind genau dann homotop, wenn $f - g$ nullhomotop ist.

Aufgabe B.2.6. Die Menge der nullhomotopen Morphismen bildet eine Untergruppe der abelschen Gruppe $\mathrm{Kom}_R(A, B)$.

Definition B.2.7. Definiere

$$\mathrm{Hot}_R(A, B) := \frac{\mathrm{Kom}_R(A, B)}{\text{Homotop-Sein}} = \frac{\mathrm{Kom}_R(A, B)}{\{\text{nullhomotope Morphismen } A \to B\}}$$

als Menge der Äquivalenzklassen bzw. äquivalent als Quotientengruppe (dabei verwenden wir sowohl B.2.5 als auch die Aufgaben B.2.3 und B.2.6).

Aufgabe B.2.8. Seien $E \xrightarrow{e} A \underset{f}{\overset{g}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{h} F$ Morphismen in $\mathrm{Kom}(R)$. Sind f und g homotop, so sind sowohl $f \circ e$ und $g \circ e$ als auch $h \circ f$ und $h \circ g$ homotop. Insbesondere gilt: Ist f nullhomotop, so sind auch $f \circ e$ und $h \circ f$ nullhomotop.

Definition B.2.9. Sei $\mathrm{Hot}(R)$ die folgende Kategorie: Sie hat die gleichen Objekte wie $\mathrm{Kom}(R)$, ihre Objekte sind also Komplexe in $\mathrm{Mod}(R)$; gegeben Objekte A, B in $\mathrm{Kom}(R)$ ist die Menge der Morphismen in $\mathrm{Hot}(R)$ von A nach B die Menge $\mathrm{Hot}_R(A, B)$. Die Verknüpfung ist durch

$$\begin{aligned}\mathrm{Hot}_R(B, C) \times \mathrm{Hot}_R(A, B) &\to \mathrm{Hot}_R(A, C),\\ ([f], [g]) &\mapsto [f \circ g],\end{aligned}$$

definiert, was nach Aufgabe B.2.8 wohldefiniert ist (offensichtlich ist diese Abbildung $\mathbb{Z}$-bilinear). Wir nennen $\mathrm{Hot}(R)$ die **Homotopiekategorie der Komplexe von R-Moduln** oder kurz **Homotopiekategorie von R.**

Ein Morphismus $f\colon A \to B$ in $\mathrm{Kom}(R)$ wird **Homotopieäquivalenz** gennant, wenn $[f]$ ein Isomorphismus in $\mathrm{Hot}(R)$ ist, wenn es also einen Morphismus $g\colon B \to A$ gibt, für den $g \circ f$ homotop zu id_A und $f \circ g$ homotop zu id_B sind. Zwei Komplexe in $\mathrm{Mod}(R)$ heißen **homotopieäquivalent**, wenn sie isomorph in $\mathrm{Hot}(R)$ sind.

Definition B.2.10. Ein Komplex in $\mathrm{Mod}(R)$ heißt **nullhomotop**, wenn er homotopieäquivalent zum Nullkomplex ist, was äquivalent bedeutet, dass id_A nullhomotop ist. Jede Homotopie h von id_A nach 0 (d. h. $\mathrm{id}_A = d \circ h + h \circ d$) heißt dann **kontrahierende Homotopie von** A.

B.2.11. Es gibt einen offensichtlichen Funktor $\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Hot}(R)$, der auf den Objekten die Identität ist und auf den Morphismen die Abbildung $f \mapsto [f]$.

Nach Aufgabe B.2.2 faktorisiert der Funktor $\mathrm{H}_p\colon \mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ als

$$\mathrm{Kom}(R) \to \mathrm{Hot}(R) \xrightarrow{\mathrm{H}_p} \mathrm{Mod}(R).$$

Insbesondere ist jeder nullhomotope Komplex azyklisch.

Beispiel B.2.12. Der Komplex

$$\ldots \to \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4 \to \ldots$$

ist azyklisch, aber nicht nullhomotop.

Aufgabe B.2.13 (Isomorphismus kürzen)**.** In Worten: Ist in einem Komplex ein Differential bezüglich geeigneter direkter Summenzerlegungen als Matrix dargestellt und enthält diese Matrix an einer Stelle einen Isomorphismus, so kann man die entsprechenden Summanden streichen und erhält einen in der Homotopiekategorie isomorphen Komplex – der neue Komplex hat überall das offensichtliche Differential außer an derjenigen Stelle, wo wir im Start- und Zielmodul den Summanden gestrichen haben.

In Formeln (und etwas einfacher, da das modifizierte Differential verraten wird): Gegeben sei ein Komplex

$$C = \left(\ldots \to C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}=\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]} A_n \oplus B \xrightarrow{d_n=\left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \lambda \end{smallmatrix}\right]} A_{n-1} \oplus B' \xrightarrow{d_{n-1}=[\,\alpha\ \beta\,]} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} C_{n-3} \to \ldots\right)$$

von R-Moduln. Ist $\lambda\colon B \to B'$ ein Isomorphismus, so ist C in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(R)$ isomorph zu dem Komplex (warum ist es ein Komplex?)

$$A = \left(\ldots \to C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{a} A_n \xrightarrow{x - y\lambda^{-1}z} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} C_{n-3} \to \ldots\right).$$

Hinweis: Nimm ohne Einschränkung an, dass $\lambda = \mathrm{id}_B$ gilt. Dann muss man knobeln: Rate $f\colon C \to A$ und $g\colon A \to C$ (was Morphismen von Komplexen sein müssen!) und zeige, dass gf und fg jeweils homotop zur Identität sind.

Lösung B.2.14. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\lambda : B \to B'$ die Identität $\mathrm{id}_B = 1 : B \to B$ ist (das neue β ist $\beta\lambda$, das neue z ist $\lambda^{-1}z$). Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
C_{n-2} & \xrightarrow{1} & C_{n-2} & \xrightarrow{1} & C_{n-2} \\
\uparrow{\scriptstyle [\alpha\ \beta]} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} & & \uparrow{\scriptstyle [\alpha\ \beta]} \\
A_{n-1} \oplus B & \xrightarrow{[1\ -y]} & A_{n-1} & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} & A_{n-1} \oplus B \\
\uparrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix}x & y\\ z & 1\end{smallmatrix}\right]} & & \uparrow{\scriptstyle x-yz} & & \uparrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix}x & y\\ z & 1\end{smallmatrix}\right]} \\
A_n \oplus B & \xrightarrow{[1\ 0]} & A_n & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\-z\end{smallmatrix}\right]} & A_n \oplus B \\
\uparrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]} & & \uparrow{\scriptstyle a} & & \uparrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]} \\
C_{n+1} & \xrightarrow{1} & C_{n+1} & \xrightarrow{1} & C_{n+1}
\end{array}$$

$$C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C.$$

Da C ein Komplex ist, gelten

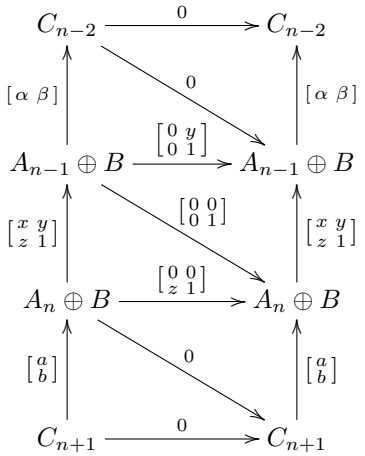
$$\begin{aligned}
\alpha x + \beta z &= 0, \\
\alpha y + \beta &= 0, \\
xa + yb &= 0, \\
za + b &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen

$$\begin{aligned}
\alpha(x - yz) = \alpha x - \alpha yz = -\beta z + \beta z = 0, \\
(x - yz)a = xa - yza = -yb + yb = 0.
\end{aligned}$$

Also ist A in der Tat ein Komplex. Sie zeigen auch, dass die Abbildungen f und g Morphismen von Komplexen sind. Die Komposition $A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} A$ ist offensichtlich die Identität von A. Die Komposition $C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A$ ist

homotop zu id_C: Die horizontalen Pfeile im folgenden Diagramm geben den Morphismus $\mathrm{id}_C - gf$ an.



$$C \xrightarrow{\mathrm{id}_C - gf} C$$

Die diagonalen Pfeile deuten die Homotopie an, die zeigt, dass die $\mathrm{id}_C - gf$ nullhomotop ist.

B.3. **Die lange exakte Homologiesequenz.**

B.3.1. Wir erinnern an einige Definitionen.

- Ein Diagramm $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ in $\mathrm{Mod}(R)$ heißt **exakt bei** A, falls $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ gilt.
- Ein endliches oder unendliches (in eine oder beide Richtungen) Diagramm

  $$\ldots \to A(p+1) \to A(p) \to A(p-1) \to \ldots$$

  in $\mathrm{Mod}(R)$ heißt **exakt**, wenn es an jeder Stelle $A(q)$ exakt ist.
  Ein solches Diagramm nennt man auch eine Sequenz.
- Ein exaktes Diagramm der Form $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ nennt man eine **kurze exakte Sequenz** (hier ist 0 „faule“ Notation für $\{0\}$). Oft sagt man auch, dass $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ eine kurze exakte Sequenz ist und meint damit eigentlich die rechts und links um Null ergänzte Sequenz. Da dann notwendig f injektiv und g surjektiv sind, schreibt man eine solche kurze exakte Sequenz meist als $A' \overset{f}{\hookrightarrow} A \overset{g}{\twoheadrightarrow} A''$.

Definition B.3.2. Wir nennen ein Diagramm $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ in $\mathrm{Kom}(R)$ **exakt bei** A, falls es komponentenweise exakt ist, falls also $\mathrm{im}(f_p) = \ker(g_p)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt (mit der Notation in Aufgabe B.1.22 ist dies äquivalent zu $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$).

Wir definieren dann analog wie in B.3.1, was ein exaktes Diagramm in $\mathrm{Kom}(R)$ und was eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Kom}(R)$ sind (hierbei steht 0 für den Nullkomplex).

Beispiel B.3.3. Sei $A \subset B$ ein Unterkomplex. Dann ist $A \subset B \twoheadrightarrow B/A$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Kom}(R)$ (und bis auf „Isomorphie von kurzen exakten Sequenzen“ sieht jede kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Kom}(R)$ so aus).

Satz B.3.4 (Lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Kom}(R)$, d, h. $0 \to A_p \xrightarrow{f_p} B_p \xrightarrow{g_p} C_p \to 0$ ist eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Mod}(R)$, für alle $p \in \mathbb{Z}$ ist. Dann gelten:*

(a) Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ gibt es genau einen Morphismus

$$\delta_p \colon \mathrm{H}_p(C) \to \mathrm{H}_{p-1}(A)$$

*von R-Moduln, den p-**ten Verbindungsmorphismus***[173]*, so dass für alle $c \in \mathrm{Z}_p(C)$ gilt: Ist $b \in B_p$ mit $g(b) = c$ und $a \in A_{p-1}$ das eindeutige*[174] *Element mit $f(a) = d(b)$, so gilt*[175] *$\delta_p([c]) = [a]$.*

(b) *Die Sequenz*

$$\dots \longrightarrow \mathrm{H}_{p+1}C \xrightarrow{\delta_{p+1}} \mathrm{H}_pA \xrightarrow[\mathrm{H}_p(f)]{} \mathrm{H}_pB \xrightarrow[\mathrm{H}_p(g)]{} \mathrm{H}_pC \xrightarrow{\delta_p} \mathrm{H}_{p-1}A \longrightarrow \dots$$

*ist exakt. Diese heißt **lange exakte Homologiesequenz**.*

Beweis. (a) Die Eindeutigkeit ist klar. Für die Existenz, muss man zeigen, dass die durch das angegebene Rezept beschriebene Abbildung wohldefiniert ist: Sei $h \in \mathrm{H}_p(C)$ eine Homologieklasse. Seien $c, c' \in \mathrm{Z}_p(C)$ mit $[c] = h = [c']$ zwei Repräsentanten. Wähle $b, b' \in B_p$ mit $g(b) = c$ und $g(b') = c'$ und definiere $a, a' \in \mathrm{H}_{p+1}(A)$ wie beschrieben. Nun zeige $[a] = [a']$ per Diagrammjagd.

Dies definiert δ_p als Abbildung von Mengen. Leicht sieht man, dass es sich um einen Morphismus von R-Moduln handelt.

(b) Diagrammjagd, dem Leser überlassen. □

Aufgabe B.3.5. Vervollständige den Beweis von Satz B.3.4.

Aufgabe B.3.6. Definiere (in hoffentlich korrekter Weise), was ein Morphismus

$$(\alpha, \beta, \gamma) \colon (A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C) \to (A' \overset{f'}{\hookrightarrow} B' \overset{g'}{\twoheadrightarrow} C')$$

zwischen kurzen exakten Sequenzen in $\mathrm{Kom}(R)$ ist und zeige, dass jeder solche Morphismus einen Morphismus zwischen den zugeordneten langen exakten Homologiesequenzen (aufgefasst als Objekte von $\mathrm{Kom}(R)$) induziert.

Die lange exakte Homologiesequenz kann somit als Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in $\mathrm{Kom}(R)$ in die (Unterkategorie der azyklischen (= exakten) Komplexe der) Kategorie $\mathrm{Kom}(R)$ aufgefasst werden.

Aufgabe B.3.7. Sei

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{f}{\hookrightarrow} & B & \overset{g}{\twoheadrightarrow} & C \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ A' & \overset{f'}{\hookrightarrow} & B' & \overset{g'}{\twoheadrightarrow} & C' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathrm{Kom}(R)$, dessen Zeilen kurze exakte Sequenzen sind. Sind zwei von den drei Morphismen α, β, γ Quasi-Isomorphismen, so ist auch der dritte ein Quasi-Isomorphismus.

Hinweis: Aufgabe B.3.6 und Fünferlemma B.4.1.

B.4. **Fünfer- und Neunerlemma.**

Lemma B.4.1 (Fünferlemma)**.** *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathrm{Mod}(R)$*. Sind die beiden Zeilen exakte Sequenzen*[176] *und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus.*

[173] auch **Randoperator** genannt, motiviert durch Satz 4.2.1

[174] wegen $g(d(b)) = d(g(b)) = d(c) = 0$

[175] Wegen $f(d(a)) = d(f(a)) = d(d(b)) = 0$ und der Injektivität von f ist a ein $(p+1)$-Kozykel.

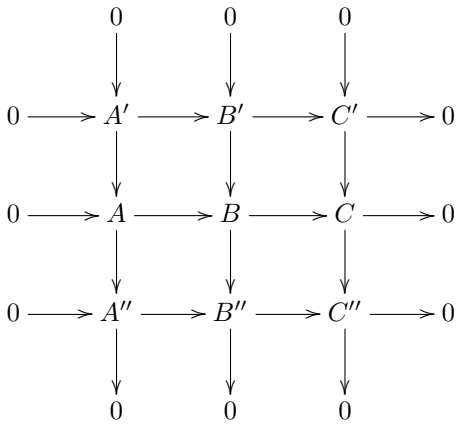
[176] wir verlangen nicht, dass es sich um kurze exakte Sequenzen handelt

(Bemerkung: Kann Annahmen etwas abschwächen: Die linke äußere Vertikalen muss nur surjektiv, die rechte äußere Vertikalen nur injektiv sein; [Wik20, Fünferlemma]*.)*

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Aufgabe B.4.2. Beweise Lemma B.4.1.

Lemma B.4.3 (Neunerlemma)**.** *Sei ein kommutatives Diagramm*



in $\mathrm{Mod}(R)$ *gegeben, dessen Zeilen exakt sind. Sind zwei der drei Spalten exakt, so ist auch die dritte exakt.*

Beweis. Führe eine Diagrammjagd durch oder fasse die Spalten als Komplexe auf verwende den Satz über die lange exakte Homologiesequenz B.3.4. □

Aufgabe B.4.4. Folgere den dritten Isomorphiesatz $\frac{M}{U} \xrightarrow{\sim} \frac{\frac{M}{V}}{\frac{U}{V}}$ für Untermoduln $V \subset U \subset M$ aus dem Neunerlemma B.4.3.

B.4.5. Fünfer- und Neunerlemma gelten allgemeiner in jeder abelschen Kategorie, etwa in der Kategorie $\mathrm{Kom}(R)$ der Komplexe (was man sofort komponentenweise überprüft).

Anhang C. Nachträge zur mengentheoretischen Topologie

Lemma C.0.1 (Koprodukte und endliche Produkte kommutieren in Top)**.** *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und sei Y ein topologischer Raum. Dann ist die kanonische Abbildung ein Homöomorphismus $\bigsqcup(X_i \times Y) \xrightarrow{\sim} (\bigsqcup X_i) \times Y$. steht das nicht schon irgendwo?*

Beweis. Die Abbildung ist offensichtlich bijektiv. Die Teilmengen der Form $\mathrm{incl}_i(U \times V)$, für $i \in I$, $U \subseteq X_i$ und $V \subseteq Y$, bilden eine Basis der Topologie auf der linken Seite. Die Teilmengen der Form $\mathrm{incl}_i(U) \times V$, für $i \in I$, $U \subseteq X_i$ und $V \subseteq Y$, bilden eine Basis der Topologie auf der rechten Seite. Da unsere Bijektion $\mathrm{incl}_i(U \times V)$ bijektiv auf $\mathrm{incl}_i(U) \times V$ wirft, ist sie ein Homöomorphismus. □

C.0.2. Wir verwenden die Definition einer finalen Abbildung, siehe [Sch20, Definition 2.8.77].

Lemma C.0.3. *Sei $f\colon X \to Y$ eine finale Abbildung. Ist $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge, so ist die induzierte Abbildung $g\colon f^{-1}(U) \to U$ ebenfalls final.*[177]

Beweis. Sei $V \subset U$ eine Teilmenge mit $g^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$. Wegen $f^{-1}(U) \subseteq X$ gilt $g^{-1}(V) = f^{-1}(V) \subseteq X$. Da f final ist, gilt $V \subseteq Y$, also $V = V \cap U \subseteq U$. □

Proposition C.0.4. *Sei $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ eine finale, surjektive Abbildung topologischer Räume. Sei L ein lokal quasi-kompakter Raum (:= jede Umgebung jedes Punktes lässt sich zu einer quasi-kompakten Umgebung verkleinern). Dann ist auch $f \times \mathrm{id}\colon X \times L \twoheadrightarrow Y \times L$ final (und surjektiv).*

[177] Analog ist für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ auch $f^{-1}(A) \to A$ final (ersetze im Beweis „offen“ durch „abgeschlossen“). Die entsprechende Aussage folgt dann natürlich für jede lokal abgeschlossene Teilmenge, da jede solche ein Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge ist.

Beweis. Sicherlich ist $f \times \mathrm{id}$ stetig. Sei $T \subset Y \times L$ eine beliebige Teilmenge, für die $U := (f \times \mathrm{id})^{-1}(T)$ offen in $X \times L$ ist. Zu zeigen ist, dass T offen in $Y \times L$ ist. Zur Illustration ein Bild, das auch später Erklärtes enthält:

$$\begin{array}{ccccc}
X' & \subset & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\
 & & X \times L & \xrightarrow{f\times\mathrm{id}} & Y \times L \\
 & & \circledcirc & & \cup \\
X' \times K & \subset & U & & T \\
\cup & & \circledcirc & & \circledcirc \\
\{\widehat{y}\} \times K & \ni & (\widehat{y}, l) & \longmapsto & (y, l)
\end{array}$$

Sei $(y, l) \in T$ ein beliebiger Punkt. Da f surjektiv ist, gibt es ein $\widehat{y} \in X$ mit $f(\widehat{y}) = y$, also $(\widehat{y}, l) \in U$.

Sei K eine quasi-kompakte Umgebung von l in L mit $\{\widehat{y}\} \times K \subset U$ (zur Existenz: Nach Definition der Produkttopologie („Box-Mengen“ bilden Basis) gibt es $V \circledcirc X$ und $W \circledcirc L$ mit $(\widehat{y}, l) \in V \times W \subset U$. Weil L lokal quasi-kompakt ist, können wir W zu einer quasi-kompakten Umgebung K von l verkleinern. Dies ist ein mögliches K.)

Definiere

$$\begin{aligned} X' &:= \{x \in X \mid \{x\} \times K \subset U\} \\ &= \{x \in X \mid \{f(x)\} \times K \subset T\}. \end{aligned}$$

Dann gelten:

- $\widehat{y} \in X'$: Klar nach Wahl von K.
- $X' \circledcirc X$: Sei $x \in X'$. Dann gibt es für jedes $k \in K$ wegen $(x, k) \in \{x\} \times K \subset U \circledcirc X \times L$ offene Mengen $V_k \circledcirc X$ und $W_k \circledcirc L$ mit $(x, k) \in V_k \times W_k \subset U$. Die Quasi-Kompaktheit von K liefert endlich viele Punkte $k_1, \ldots, k_n \in K$ mit $K \subset W_{k_1} \cup \cdots \cup W_{k_n}$. Es folgt
$$\left(\bigcap V_{k_i}\right) \times K \subset \left(\bigcap V_{k_i}\right) \times \left(\bigcup W_{k_i}\right) \subset U.$$
Alle Punkte der offenen Umgebung $\bigcap_{i=1}^n V_{k_i}$ von x in X liegen also in X'. Damit ist X' offen in X.
- $X' = f^{-1}(f(X'))$: Die Inklusion $\subset$ ist trivial. Sei $x \in f^{-1}(f(X'))$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $f(x) = f(x')$, also $\{f(x)\} \times K = \{f(x')\} \times K \subset T$ und somit $x \in X'$.

Aus $f^{-1}(f(X')) = X' \circledcirc X$ und der Finalität von f folgt $f(X') \circledcirc Y$. Weil $y = f(\widehat{y}) \in f(X') \circledcirc Y$ gilt und K eine Umgebung von l in L ist, ist $f(X') \times K$ eine Umgebung von (y, l) in $Y \times L$, die wegen $X' \times K \subset U$ in T enthalten ist. Dies zeigt, dass T offen in $Y \times L$ ist. □

Literatur

[Bre97] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[HS97] P. J. Hilton and U. Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[Lüc05] Wolfgang Lück. *Algebraische Topologie*. vieweg studium; Aufbaukurs Mathematik. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2005.

[Mun84] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[Sch20] Olaf M. Schnürer. Algebraische Topologie: Fundamentalgruppen und Überlagerungstheorie. https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/AG-Algebra/Algebraische_Topologie/algebraische-topologie-fundamentalgruppen-und-ueberlagerungen-paderborn-2019.pdf, 2020.

[Soe20] Wolfgang Soergel. Singuläre Homologie. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXTS.pdf, 2020.

[Spa81] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1981. Corrected reprint.

[Sta18] The Stacks Project Authors. Stacks project. http://stacks.math.columbia.edu, 2018.

[vQ79] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1979. Hochschultext. [University Text].

[Wik20] Contributors Wikipedia. Wikipedia, 2020. www.wikipedia.org.

Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Strasse 100, 33098 Paderborn, Germany
Email address: olaf.schnuerer@math.uni-paderborn.de