ANALYSIS FÜR INFORMATIKER

OLAF M. SCHNÜRER

Inhaltsverzeichnis

1. Einstimmung 2
1.1. Vollständige Induktion 2
1.2. Elementare Kombinatorik 5
2. Grundlagen: Logik, Mengenlehre und reelle Zahlen 8
2.1. Logische Grundlagen 8
2.2. Erste Mengenlehre 14
2.3. Quantoren 17
2.4. Weitere Mengenlehre 19
2.5. Die reellen Zahlen 40
2.6. Wurzeln 42
2.7. Komplexe Zahlen 44
2.8. Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^m$ 46
3. Konvergenz 48
3.1. Folgen 48
3.2. Reihen 56
4. Stetigkeit 66
4.1. Folgen- und ε-δ-Stetigkeit 66
4.2. Grundlegendes zu stetigen Funktionen 68
4.3. Stetigkeit von Exponential-, Kosinus- und Sinusfunktion 68
4.4. Zwischenwertsatz 69
4.5. Monotonie und Stetigkeit 70
4.6. Stetigkeit der Wurzelfunktion 71
4.7. Stetigkeit des natürlichen Logarithmus 71
4.8. Kreiszahl π und trigonometrische Funktionen 73
4.9. Einige Grenzwerte 83
5. Differentiation in einer Variablen 84
5.1. Differenzierbare Funktionen 84
5.2. Folgerungen aus den Eigenschaften der Ableitung 92
5.3. Regeln von de l'Hospital 94
6. Integration in einer Variablen 96
6.1. Gleichmäßige Stetigkeit 96
6.2. Integration stetiger Funktionen 97
6.3. Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung 100
6.4. Integrationsregeln 101
6.5. Integralvergleichskriterium für Reihen 104
7. Potenzreihen und höhere Ableitungen 104
7.1. Funktionenfolgen und Potenzreihen 104
7.2. Taylorentwicklung 108

Datum: 30. Januar 2020.

Skript zur Vorlesung *Analysis für Informatiker* im Wintersemester 2019/20 an der Universität Paderborn. Unsere wichtigsten Quellen sind [Sch19, Soe19]. Weitere Quellen sind [For11, Wik19]. Dank an Charlene Weiß, Lars Kleinemeier und Fabian Schneider für Hinweise zum Skript.

1. Einstimmung

1.1. Vollständige Induktion.

1.1.1. Wir gehen davon aus, dass die **natürlichen** Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... dem Leser[1] aus der (Grund-)Schule wohlbekannt sind.[2]

Satz 1.1.2 (Gaußsche Summenformel)**.** *Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1.1}$$

für die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n.

1.1.3. Die Punkte auf der linken Seite der Formel deuten an, dass alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und n aufsummiert werden. Der Ausdruck $n(n+1)$ auf der rechten Seite ist eine Kurzschreibweise für das Produkt $n \cdot (n+1)$.

Beispiel 1.1.4. Im Fall $n = 7$ behauptet der Satz die Gleichheit $1+2+3+4+5+6+7 = \frac{7 \cdot 8}{2}$. Diese gilt, denn beide Seiten sind 28. Hier sollte man das Zeichen $\cdot$ im Produkt $7 \cdot 8$ keinesfalls weglassen!

Beweis. Wir erklären parallel das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion**.

Für jede beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ bezeichne $A(n)$ die Aussage „Die Formel (1.1.1) ist richtig“.

Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist wahr. In der Tat gilt $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass für jede beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ aus der Wahrheit der Aussage $A(n)$ die Wahrheit der Aussage $A(n+1)$ folgt. In der Tat, nehmen wir an, dass die Aussage $A(n)$ wahr ist (diese Annahme nennt man **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**). Es gilt also

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Addieren wir auf beiden Seiten $n+1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Aussage $A(n+1)$ wahr ist.

Damit ist klar, dass die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ wahr ist: Nach der Induktionsbasis ist $A(1)$ wahr, der Induktionsschritt liefert dann die Wahrheit von $A(2)$, dann die Wahrheit von $A(3)$, die Wahrheit von $A(4)$, etc. Damit ist der Satz bewiesen. [3] □

1.1.5 (Vollständige Induktion)**.** Vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, mit der man zeigen kann, dass eine von einer natürlichen Zahl n abhängige Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen korrekt ist (lateinisch *inductio* Hinführung).

[1] Hiermit ist natürlich auch jede Leserin gemeint.

[2] Wir folgen der Konvention, dass die Null eine natürliche Zahl ist.

[3] Das Ende eines Beweises wird in der Mathematik mit dem Symbol □ markiert. Manchmal findet man auch ein „qed“ am Ende eines Beweises für lateinisch „quod erat demonstrandum“, also „was zu beweisen war“. Der Leser sollte sich immer klar machen, dass wirklich alle behaupteten Aussagen gezeigt sind, und wo welche Voraussetzung benutzt wurde.

Will man zeigen, dass für jede natürliche Zahl n die Aussage $A(n)$ gilt, so reicht es, die beiden folgenden Behauptungen zu zeigen:

(a) **Induktionsanfang:** Die Aussage $A(0)$ gilt.
(b) **Induktionsschritt:** Falls für eine beliebige natürliche Zahl n die Aussage $A(n)$ gilt, so gilt auch die Aussage $A(n+1)$.

Die Annahme im Induktionsschritt, dass die Aussage $A(n)$ gilt, heißt **Induktionsannahme**.

Dies wird wie folgt begründet: Nach dem Induktionsanfang gilt die Aussage $A(0)$. Deswegen können wir den Induktionsschritt mit $n = 0$ anwenden und folgern, dass die Aussage $A(1)$ gilt. Nun können wir den Induktionsschritt mit $n = 1$ anwenden und folgern, dass die Aussage $A(2)$ gilt. Indem wir so fortfahren, sehen wir, dass alle Aussagen $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$, usw. gelten.[4]

Es gibt gewisse Varianten:

- Manchmal gilt eine Aussage nur für alle natürlichen (oder ganzen) Zahlen n mit $n \geq N$, wobei N eine fixierte natürliche (oder ganze) Zahl ist. Dann startet man die Induktion, indem mal als Induktionsanfang die Aussage „Die Aussage $A(N)$ gilt.“ zeigt.
- Statt der Induktionsannahme, dass die Aussage $A(n)$ gilt, kann man auch allgemeiner annehmen, dass die Aussage $A(m)$ für alle natürlichen Zahlen $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ gilt.

1.1.6. Der Leser mag sich fragen, wie man auf die Formel in Satz 1.1.2 kommt, denn als ehrenhafte Mathematiker wollen wir ja Verständnis und nicht nur Bewunderung erzeugen.

Anschaulich kann man die linke Seite der Formel (1.1.1) als Fläche unter einer „Treppenlinie“ mit n Stufen mit Stufenabstand Eins und Stufenhöhe Eins interpretieren (siehe Bild in Vorlesung). Zeichnet man eine Gerade unter die Treppenlinie (so dass die Treppe auf dieser Geraden liegt), so teilt diese unsere Fläche in einen Teil mit Fläche $\frac{n^2}{2}$ (die Fläche unter der Diagonalen eines Quadrats der Seitenlänge n) und n Teile mit Fläche jeweils $\frac{1}{2}$ (die Fläche einer diagonal zerteilten Stufe). Also ist die Fläche unter der Treppenlinie durch $\frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ gegeben.

Wer mag, kann auch eine Kopie der Fläche unter der Treppenlinie umgekehrt auf die Treppe legen. Damit ergibt sich ein Rechteck mit Grundseite n und Höhe $n+1$. Dieses hat Fläche $n(n+1)$. Also ist die Fläche unter der Treppenlinie $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ein weiterer Beweis geht so: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n}{2} \\ &\quad + \frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ \text{(summiere übereinanderstehende Ausdrücke)} &= \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + \cdots + \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Dieser Beweis ist sehr ähnlich zu dem Beweis, den Carl Friedrich Gauß angeblich als neunjähriger Schüler fand (siehe [Wik19, Gaußsche Summenformel]).

Definition 1.1.7. Geben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (etwa natürliche Zahlen, später auch andere „addierbare Dinge“ wie etwa reelle Zahlen, Funktionen) definieren wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Das Symbol := deutet an, dass der Ausdruck auf der linken Seite durch den Ausdruck auf der rechten Seite definiert wird. Das Symbol Σ ist der große griechische Buchstabe Sigma, der in unserem Alphabet dem Buchstaben S entspricht, und steht für „Summe“. Die Variable i wird **Laufindex** genannt und durchläuft alle natürlichen Zahlen von 1 bis n (wie in einer `for`-Schleife in einem Computerprogramm): Dies ist durch

[4] Die formale Begründung beruht auf den Peano-Axiomen, die die natürlichen Zahlen charakterisieren (vgl. [Wik19, Peano-Axiome].

den Ausdruck $i = 1$ unter dem Σ und den Ausdruck n über dem Σ angedeutet. Der Laufindex i indiziert die **Summanden** a_i.

Die konkreten Namen des Laufindex und der Summanden sind hier unwichtig. Auch darf der Laufindex zwischen anderen Grenzen variieren.

Beispiele 1.1.8.

- Es gilt $\sum_{j=-2}^{3}(j^3+1) = -7+0+1+2+9+28 = 33$.
- Satz 1.1.2 besagt in der Σ-Notation $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$. Jeder Zweifel daran, was die Punkte in (1.1.1) bedeuten sollen, wird mit der Σ-Notation vermieden.
- Im Fall $n < m$ ist der Ausdruck $\sum_{i=m}^{n} a_i$ als Null zu interpretieren. Damit gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für jede natürliche Zahl n.

1.1.9. Der durch die Rechnung (1.1.2) gegeben Beweis von Satz 1.1.2 liest sich in der Σ-Notation wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} \\
\text{(Indexwechsel } i = n+1-j \text{ bzw. } j = n+1-i \text{ rechts)} \quad &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{n+1-j}{2} \\
\text{(Ersetze } j \text{ durch } i \text{ im zweiten Ausdruck)} \quad &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1-i}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{2} + \frac{n+1-i}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

1.1.10 (Zur Sprache der Mathematik)**.** Wir haben bereits die Begriffe *Satz*, *Beweis*, *Definition* verwendet.

In einer *Definition* (vom lateinischen Wort *definitio* für Abgrenzung) versuchen wir, die Bedeutung von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen. Mathematiker haben die Angewohnheit, Worten aus der Umgangssprache wie *Summe*, *Produkt*, *Fakultät*, *Menge*, *Körper*, *Gruppe* ganz neue Bedeutungen zu geben, die dann in mathematischen Texten gemeint sind. In dieser Weise wird, ausgehend von der Umgangssprache, eine eigene mathematische Sprache aufgebaut.

Ein *Satz* ist eine wahre mathematische Aussage, die vom Autor des jeweiligen Textes als besonders wichtig eingeschätzt wird. Die Gültigkeit dieser Aussage wird durch einen *Beweis* begründet, also aus bereits bekannten Tatsachen (oder Axiomen) hergeleitet.[5] Wahre Aussagen, die weniger wichtig oder technischer Natur sind, werden in *Propositionen* oder *Lemmas* (oder *Lemmata*) gegeben. Auch sie werden durch einen Beweis begründet.

1.1.11 (Direkter Beweis)**.** Die meisten Sätze, Propositionen und Lemmas haben sinngemäß die Form:

„Wenn die Voraussetzung ... gilt, so ist ... korrekt“.

Beispielsweise war im Satz über die Gaußsche Summenformel 1.1.2 die Voraussetzung, dass n eine natürliche Zahl ≥ 1 ist, gefolgert wurde $\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{2}n(n+1)$.

[5] Der philosophisch interessierte Leser mag sich hier natürlich fragen, wo man anfängt. Im Beweis von Satz 1.1.2 haben wir etwa vorausgesetzt, dass die natürlichen Zahlen samt Größer-Gleich-Relation $\geq$, Addition und Multiplikation bekannt sind. Ebenso haben wir angenommen, dass das Beweisprinzip der vollständigen Induktion den Leser überzeugt, dass der Leser also glaubt oder weiss, dass man jede natürliche Zahl $n \geq 1$ von 1 ausgehend in endlich vielen Schritten durch Addition von 1 erreicht.

In einem formalen Aufbau der Mathematik einigt man sich am Anfang auf gewisse Axiome und erlaubte Schlussweisen. Ohne eine gemeinsame Sprache kommt man aber auch hier nicht aus. Die Mathematik wird nicht aus dem Nichts erschaffen. In diesem Text beschreiten wir einen Mittelweg.

Es gibt verschiedene Techniken, einen Satz zu beweisen. Wir haben bereits die Technik der *vollständigen Induktion* kennengelernt. Die naheliegendste Technik ist der *direkte* Beweis: Man nimmt die Voraussetzung an und folgert daraus – oft in mehreren Zwischenschritten, unter Verwendung bereits bekannter Resultate – die Folgerung. Diese Technik haben wir im Alternativ-Beweis (1.1.2) der Gaußschen Summenformel verwendet. Wir werden später andere Beweistechniken (indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis) kennenlernen.

1.2. **Elementare Kombinatorik.**

Definition 1.2.1. Ähnlich wie die Σ-Notation für Summen definieren wir

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Der große griechische Buchstabe Π (sprich „Pi“) entspricht dem deutschen P und steht für „Produkt“. Die $a_1, \dots, a_n$ sind die **Faktoren** des Produkts. Der Laufindex darf hier auch zwischen anderen Grenzen variieren: Der Ausdruck $\Pi_{i=m}^{n} a_i$ ist in offensichtlicher Weise zu interpretieren. Im Fall $m > n$ wird dieser Ausdruck per Konvention als 1 definiert.

Definition 1.2.2. Für jede natürliche Zahl n definieren wir

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i$$

und nennen diese Zahl „n **Fakultät**“. Es gelten also beispielsweise $0! = 1$ (nach der oben angegeben Konvention), $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$.

Satz 1.2.3 (Bedeutung der Fakultät)**.** *Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

Beispiel 1.2.4. Es gibt genau $3! = 6$ Möglichkeiten, die Buchstaben a,b,c in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Beweis. Gegeben n verschieden Objekte haben wir n Möglichkeiten für das erste Objekt, dann verbleiben $n-1$ Möglichkeiten für das zweite Objekt, ..., und für das n-te Objekt verbleibt nur eine Möglichkeit. Insgesamt ergibt dies $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ mögliche Reihenfolgen. □

Definition 1.2.5. Für beliebiges n (etwa für jede ganze oder relle Zahl) und jede natürliche Zahl k definieren wir den **Binomialkoeffizienten**[6]

$$\binom{n}{k} := \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(k-i)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \tag{1.2.1}$$

Er wird als „n **über** k“ bezeichnet. Beachte $\binom{n}{0} = 1$ nach unserer Konvention. Ist n eine natürliche Zahl mit $k \leq n$, so gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \tag{1.2.2}$$

1.2.6. Der Name *Binomialkoeffizient* kommt daher, dass diese Zahlen als Koeffizienten in der binomischen Formel (siehe Satz 1.2.13) auftreten.

Beispiele 1.2.7. Es gelten $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$. Es gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Für natürliche Zahlen n, k mit $n < k$ gilt $\binom{n}{k} = 0$, denn im Produkt über dem Bruchstrich taucht der Faktor $(n-n) = 0$ auf (beispielsweise gilt $\binom{2}{4} = \frac{2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 0$).

Beispiel 1.2.8. Beim Berechnen von Binomialkoeffizienten von Hand kann man oft viele Faktoren kürzen, beispielsweise gilt[7]

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{49 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{24} \cdot 47 \cdot 46 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 44}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$$

[6] Merkregel: Sowohl über als auch unter dem Bruchstrich stehen jeweils k Faktoren, absteigend beginnend bei n bzw. k.)

[7] Benutzt man hier stupide die Formel (1.2.2), so muss man 49! und 43! und 6! ausrechnen.

$$= 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13.983.816$$

Beim Lotto 6 aus 49 gibt es also nach dem folgenden Satz 1.2.9 knapp 14 Millionen Möglichkeiten. Wie viele mögliche Blätter gibt es beim Skat (10 aus 32 Karten)?

Satz 1.2.9 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten)**.** *Gegeben natürliche Zahlen n und k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n voneinander verschiedenen Objekten k auszuwählen.*[8]

Insbesondere ist $\binom{n}{k}$ stets eine natürliche Zahl.

Beispiel 1.2.10. Es gibt genau $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Möglichkeiten, aus den sechs Buchstaben a,b,c,d,e,f zwei auszuwählen, nämlich

a, b	a, c	a, d	a, e	a, f
	b, c	b, d	b, e	b, f
		c, d	c, e	c, f
			d, e	d, f
				$e, f.$

Beweis. Seien n verschieden Objekte gegeben. Wählen wir daraus der Reihe nach k Objekte aus, so haben wir für das erste Objekt n Möglichkeiten, für das zweite Objekt $n-1$ Möglichkeiten, usw., für das k-te Objekt $n+1-k$ Möglichkeiten. Insgesamt habe wir also $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ Möglichkeiten, k Objekte der Reihe nach auszuwählen.

Für jede Wahl von k Objekten (ohne Beachtung der Reihenfolge) gibt es nach Satz 1.2.3 $k!$ Möglichkeiten, diese in eine Reihenfolge zu bringen.

Deswegen liefern jeweils $k!$ der obigen $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ Auswahlmöglichkeiten mit Beachtung der Reihenfolge dieselbe Auswahl von k Objekten ohne Beachtung der Reihenfolge. Es gibt also $\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Objekte aus n Objekten auszuwählen. □

Ende der 1. Vorlesung am 07.10.2019.

1.2.11. Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dies folgt einerseits sofort aus (1.2.2). Andererseits folgt es aus Satz 1.2.9: Wählt man k Objekte aus n verschiedenen Objekten aus, so bilden die verbliebenen Objekte ja eine Auswahl von $n-k$ Objekten.

Definition 1.2.12. Wie in der Schule setzen wir $a^k := \prod_{i=1}^{k} a$ für eine natürliche Zahl k und nennen diesen Ausdruck „**a hoch k**“. Insbesondere gelten $a^0 = 1$, $a^1 = a$ (im Spezialfall $a = 0$ gilt $0^0 = 1$).

Satz 1.2.13 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für jede natürliche Zahl n gilt die **binomische Formel***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

wobei a und b beliebige (rationale oder reelle) Zahlen[9] *sind.*

1.2.14. Für die Gültigkeit dieser Formel ist die Konvention $a^0 = 1$ wichtig.

Beispiel 1.2.15. . Für $n = 4$ gilt

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = \binom{4}{0}a^0b^4 + \binom{4}{1}a^1b^3 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^3b^1 + \binom{4}{4}a^4b^0.$$

[8] Das ist uninteressant, stimmt aber auch für $n < k$, denn es gibt beispielsweise $\binom{3}{15} = 0$ Möglichkeiten, aus 3 Objekten 15 auszuwählen.

[9] oder allgemeiner beliebige Elemente eines kommutativen Rings

1.2.16. Der Name *binomische Formel* kommt von der Vorsilbe *bi* für zweifach und dem lateinischen *nomen* für *Namen*. Mit den beiden Namen sind die beiden Variablen a und b gemeint, deren Potenz die binomische Formel ausrechnet. Im Spezialfall $n = 2$ erhalten wir die Formeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 - 2ab + b^2$, die in der Schule erste und zweite binomische Formel genannt werden.

Beispiele 1.2.17. Der Spezialfall $a = 1$ und $b = 1$ liefert die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

für die Summe der Binomialkoeffizienten. Der Spezialfall $a = -1$ und $b = 1$ zeigt

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

für $n \geq 1$, die Summe der Binomialkoeffizienten mit alternierendem Vorzeichen ist also 0 (im Fall $n = 0$ ergibt $0^0 = 1 = \binom{0}{0}$).

Erster Beweis. Sei k eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq n$. Beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ erhalten wir so oft den Summanden $a^k b^{n-k}$, wie es Möglichkeiten gibt, aus den n Faktoren $(a+b)$ diejenigen k Faktoren auszusuchen, „in denen wir beim Ausmultiplizieren das a nehmen“ (um die Faktoren voneinander zu unterscheiden, nummeriere man sie beispielsweise mit den Zahlen von 1 bis n). Nach Satz 1.2.9 taucht der Summand $a^k b^{n-k}$ genau $\binom{n}{k}$-mal auf. □

Zweiter Beweis. Wir zeigen zunächst für beliebiges n und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \tag{1.2.3}$$

durch explizites Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{\prod_{i=0}^{k-2}(n-i)}{(k-1)!} + \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!} \\
&= \frac{k \cdot \prod_{i=0}^{k-2}(n-i) + \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!} \\
&= \frac{k \cdot \prod_{i=0}^{k-2}(n-i) + (n-k+1) \cdot \prod_{i=0}^{k-2}(n-i)}{k!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot \prod_{i=0}^{k-2}(n-i)}{k!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot \prod_{j=1}^{k-1}(n+1-j)}{k!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Nun beweisen wir die Formel aus dem Satz per vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gelten $(a+b)^0 = 1$ und $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1a^0b^0 = 1$. Somit ist die binomische Formel für $n = 0$ wahr. Zur Sicherheit mag man auch den Fall $n = 1$ prüfen: Es gilt $(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{n-k}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen als Induktionsvoraussetzung an, dass $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ für eine natürliche Zahl n gilt. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\
&= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(Indexwechsel } k = l-1\text{)} \quad &= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n+1-l} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \Big] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
\text{(verwende (1.2.3))} \quad &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die gewünschte Gleichheit für $n+1$. Aus der Gültigkeit der binomischen Formel für n haben wir also die Gültigkeit der binomischen Formel für $n+1$ gefolgert.

Nach dem Induktionsanfang gilt die binomische Formel für $n = 0$, und nach dem Induktionsschritt dann für $n = 1$, $n = 2$, etc. Also gilt sie für alle natürlichen Zahlen n. □

1.2.18 (Pascalsches Dreieck)**.** Die Formel (1.2.3) für $k \geq 1$ kann man zur Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascalschen Dreieck** benutzen: Im Schema

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\iddots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \ddots
\end{array}
$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl im Innern wird als Summe ihrer beiden oberen Nachbarn berechnet. Nummerieren wir die Zeilen von oben bei Null beginnend, so stehen in der n-ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2}$, …, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$. Der Grund ist die Formel (1.2.3) zusammen mit den Formeln $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$.

In der vierten Zeile des oben angegebenen Ausschnitts aus dem Pascalschen Dreieck stehen also die Binomialkoeffizienten $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{4}{4} = 1$, vgl. Beispiel 1.2.15.

2. Grundlagen: Logik, Mengenlehre und reelle Zahlen

2.0.1. Über Logik bzw. Mengenlehre gibt es ganze Vorlesungen. Wir vermitteln hier nur einige Grundlagen und folgen einem naiven Zugang.

2.1. Logische Grundlagen.

Definition 2.1.1 (Naive Definition einer Aussage)**.**

(i) Eine **Aussage** ist etwas, dem entweder der **Wahrheitswert** „**wahr**“ oder „**falsch**“ zugeordnet ist. Der Wahrheitswert kann uns unbekannt sein.

(ii) Eine **Aussageform**[10] ist etwas, das eine noch nicht bestimmte oder **freie Variable** enthält und durch Ersetzen der Variablen durch einen konkreten Wert zu einer Aussage wird. Auch mehrere freie Variablen sind erlaubt. Eine Aussageform hat keinen Wahrheitswert.

Bemerkung 2.1.2.

(i) (Prinzip der Zweiwertigkeit, Bivalenzprinzip) Wir schließen aus, dass eine Aussage

[10] bisweilen **Prädikat** genannt

- halb wahr, halb falsch oder
- gleichzeitig wahr und falsch ist.

(ii) Ist p eine Aussage, so sagen wir statt „p ist wahr“ auch
- p gilt,
- p ist richtig oder
- p ist korrekt.

Beispiele 2.1.3. Für die folgenden Beispiele greifen wir auf Schulwissen zurück.

(a) Beispiele für Aussagen sind:
  (i) 6 ist durch 3 teilbar.
  (ii) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
  (Ich kenne den Wahrheitswert dieser Aussage momentan nicht.)
  (iii) Schnee ist schwarz.

(b) Bei umgangssprachlichen Aussagen ist es oft diskutabel, ob es sich um eine Aussage handelt: Sind „Es regnet.“ bzw. „Am 7. Oktober 2019 fällt zwischen 9 und 11 Uhr mindestens ein Regentropfen auf das Gelände der Universität Paderborn.“ Aussagen?

(c) Beispiele für Aussageformen sind:
  (i) x ist durch 3 teilbar.
  (Je nachdem, was man für x einsetzt, führt dies zu einer wahren oder falschen Aussage.)
  Implizit ist bei Aussageformen mitverstanden, dass man nur sinnvolle konkrete Werte einsetzt, hier etwa natürliche oder ganze Zahlen, vgl. [Wik19, Diskursuniversum].)
  (ii) $x = y$ oder $x \neq y$.
  (Für alle Werte von x und y wird dies zu einer wahren Aussage.)
  (iii) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
  (Diese Aussageform wird für alle natürlichen Zahlen n nach der Gaußschen Summenformel 1.1.2 zu einer wahren Aussage.)
  (iv) x und y sind verwandt.

Definition 2.1.4 (Negation, Verneinung)**.** Sei p eine Aussage, so bezeichnen wir mit $\neg p$ die Aussage „**nicht** p“, also die **Negation** dieser Aussage (Logikgatter NOT in Schaltkreisen).

Die folgende **Wahrheitstabelle** gibt den Wert von $\neg p$ in Abhängigkeit vom Wert von p an.

p	$\neg p$
w	f
f	w

Dabei steht „w“ für „wahr“ und „f“ steht für „falsch“.

Wir sagen für $\neg p$ auch[11]: „Es stimmt **nicht,** dass p gilt.“ oder „p ist falsch.“

Bemerkung 2.1.5.

(i) Sei p die Aussage „91 ist eine Primzahl“, so ist $\neg p$ die Aussage „Es stimmt nicht, dass 91 eine Primzahl ist“ oder kurz: „91 ist keine Primzahl“.

(ii) Anhand der Wahrheitstabelle überlegt man sich leicht, dass p und $\neg\neg p$ Aussagen mit den gleichen Wahrheitswerten sind.

Warnung: Die doppelte Negation wird im Alltag aber gelegentlich anders aufgefasst. Beispiel: „Magst du nicht den Müll runter bringen?“ – „Nein.“

Ist der Antwortende ein Mathematiker oder Logiker, so bringt er den Müll gerne nach unten.

Wir verwenden die folgenden Verknüpfungen von zwei Aussagen zu einer neuen Aussage.

Definition 2.1.6. Seien p, q zwei Aussagen. Dann schreiben wir

- $p \wedge q$ für „p **und** q“, die **Konjunktion** (Logikgatter AND in Schaltkreisen),
- $p \vee q$ für „p **oder** q“, die **Disjunktion** (Logikgatter OR),
- $p \dot{\vee} q$ (kaum verwendetes Symbol) für „**entweder** p **oder** q“, die **Kontravalenz** oder **aussschließende Disjunktion** (Logikgatter XOR),

[11] genauer sind dies gleichbedeutende Aussagen, siehe unten

- $p \implies q$ für „p **impliziert** q“ (oder „aus p folgt q“ oder „wenn p, dann q“ oder „wenn p gilt, dann gilt auch q“), die **Implikation**, und
- $p \iff q$ für „p und q sind **äquivalent**“ (oder „p ist äquivalent zu q“ oder „Genau dann, wenn p gilt, gilt auch q“ oder „p und q sind gleichbedeutend“), die **Äquivalenz**,

und definieren die Wahrheitswerte durch die folgende Tabelle:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \implies q$	$p \iff q$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	f	w	w

Wir nennen die Symbole $\vee$, $\wedge$, $\implies$, $\iff$ und auch $\neg$ **logische Verknüpfungen**.

Bemerkung 2.1.7.

(i) In der Aussage $p \implies q$ heißt p **Voraussetzung** oder **Prämisse** und q **Folgerung** (oder **Behauptung**) oder **Konklusion**.

(ii) Gilt $p \implies q$, so heißt p eine **hinreichende Bedingung** für q und q eine **notwendige Bedingung** für p.

(iii) Wir verwenden $p \implies q$ und $q \impliedby p$ gleichbedeutend. (Formal definieren wir den rechten Ausdruck durch den linken.)

(iv) Wir sagen, dass endlich viele Aussagen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (oder sogar eine unendliche Familie von Aussagen, was später erklärt wird) äquivalent sind, wenn für je zwei Aussagen p und q aus diesen endlich vielen Aussagen $p \iff q$ gilt.

(v)
- „Wenn 6 eine Primzahl ist, dann gilt $0 = 1$“ und
- „Wenn 6 eine Primzahl ist, dann ist 2 eine Primzahl“

sind zwei wahre Aussagen. Dies mag a priori verwirrend erscheinen, aber: Um zu zeigen, dass eine Implikation $p \implies q$ wahr ist, muss man nur zeigen, dass aus der Gültigkeit von p die Gültigkeit von q folgt (vgl. die entsprechende Nachweisregel in 2.1.9). Ist nun p falsch (und hat also keine Chance, wahr zu sein), so ist nichts zu zeigen, und die Implikation ist wahr.

(vi) Man beachte den Unterschied zwischen „oder“ und „entweder ... oder ...“.

(vii) Die beiden Aussagen in einer Implikation müssen nicht kausal oder inhaltlich zusammenhängen.

Ende der 2. Vorlesung am 10.10.2019.

2.1.8. Die folgenden Anleitungen in 2.1.9, 2.1.10, 2.1.11 sind als Hilfen zum Aufschreiben mathematischer Beweise gedacht. Illustriert werden sie im zweiten Beweis von Proposition 2.1.13. Wer mag, kann direkt zu dieser Proposition springen.

2.1.9 (Was zu tun ist, um eine Aussage zu beweisen)**.** Ist Q eine Aussage (etwa die Aussage eines Satzes), so sagt uns eine **Nachweisregel**, was wir tun müssen, um zu zeigen, dass Q wahr ist. Hier sind einige Beispiele (angegeben ist jeweils die Aussage, deren Wahrheit man zeigen will; p und q sind Aussagen):

(a) $p \implies q$:
- **Nachweisregel**: Man nimmt an, dass p gilt und folgert daraus q.
- Will der Leser aufschreiben, dass $p \implies q$ gilt, etwa beim Lösen einer Übungsaufgabe, so ist ein **Nachweistext** zu schreiben, der beispielsweise so beginnen könnte:
  „Es gelte p. Wir wollen zeigen, dass q gilt. [Begründung]“

(b) $p \iff q$:
- **Nachweisregel**: Man zeigt nacheinander $p \implies q$ und $q \implies p$.
- Beginn eines **Nachweistexts**: Wir wollen zeigen, dass $p \implies q$ und $q \implies p$ gelten. [Begründung]

(c) $p \wedge q$:
- **Nachweisregel**: Man zeigt, dass p und q gelten.
- Beginn eines **Nachweistexts**: Wir wollen zeigen, dass p und q gelten. (Alternativ: Zeige: p und q gelten.) [Begründung]

(d) $p \vee q$:
- **Nachweisregel**: Man zeigt, dass p gilt oder dass q gilt.
- Beginn eines **Nachweistexts**: Um zu zeigen, dass $p \vee q$ gilt, genügt es zu zeigen, dass p gilt oder dass q gilt. [Begründung]

(e) $\neg p$:
- **Nachweisregel**: Man zeigt, dass p falsch ist. Alternativ: Man nimmt an, dass p gilt, und folgert daraus einen Widerspruch (:= eine falsche Aussage), was bedeutet, dass $\neg p$ gilt.
- Beginn eines **Nachweistexts**: Angenommen, es gilt p. Dann erhalten wir ... [Herleitung einer falschen Aussage, also eines Widerspruchs (manchmal als $\lightning$ notiert)]. Somit gilt $\neg p$.

2.1.10 (Wie man eine Aussage benutzt)**.** Ist Q eine Aussage, die wahr ist, so sagt uns eine **Benutzungsregel**, was wir aus Q folgern dürfen. Hier sind einige Beispiele (angegeben ist jeweils die Aussage, deren Wahrheit bekannt ist; p und q sind dabei Aussagen):

(a) $p \implies q$:
- **Benutzungsregel**: Falls p wahr ist, so auch q.
  Bzw.: Wenn wir bereits wissen, dass p gilt, so gilt auch q.
- Der entsprechende **Benutzungstext** in einem Beweis könnte beispielsweise lauten (ebenfalls unter der Annahme, dass p gilt): Da p und $p \implies q$ gelten, gilt auch q.

(b) $p \iff q$:
- **Benutzungsregeln**: Man darf sowohl verwenden, dass $p \implies q$ gilt, als auch, dass $q \implies p$ gilt (und dann die obige Benutzungsregel für $\implies$ nutzen).
- **Benutzungstext** Da $p \iff q$ gilt, gelten sowohl $p \implies q$ als auch $q \implies p$.

(c) $p \wedge q$:
- **Benutzungsregel**: Man darf sowohl verwenden, dass p gilt, als auch, dass q gilt.
- **Benutzungstext**: Da $p \wedge q$ gilt, gilt sowohl p als auch q. Insbesondere gilt p./Insbesondere gilt q.

(d) $p \vee q$:
- **Benutzungsregel**: Man darf verwenden, dass eine der beiden Aussagen p, q richtig ist.
- **Benutzungsregel**: Da $p \vee q$ gilt, wissen wir, dass eine der der beiden Aussagen p, q gilt.
  Will man daraus eine weitere Aussage r folgen, so macht man in der Regel eine Fallunterscheidung:
  1. Fall: p gilt: Wir zeigen r. [Begründung] Somit gilt r.
  2. Fall: q gilt: Wir zeigen r. [Begründung] Somit gilt r.

(e) $\neg p$:
- **Benutzungsregel**: Wir dürfen verwenden, dass p falsch ist.
- **Benutzungstext**: Da $\neg p$ gilt, ist p falsch.

2.1.11. In Beweisen werden oft die folgenden Techniken verwendet.

(i) **Zwischenschritte:** Starte mit einer wahren Aussage und folgere daraus solange Neues, bis die gewünschte Behauptung da steht.
Benutzungstext: Hieraus/Aus ... folgt ... und weiter ....
Dies wird mit auch mit „... $\implies$ ... $\implies$ ...“ abgekürzt.

(ii) **Ersetzung:**
- Gilt $p \iff q$, so dürfen wir in einer aus Aussagen und Elementarverknüpfungen zusammengesetzten Aussage an beliebig vielen Stellen p durch q ersetzen (oder umgekehrt) und erhalten eine äquivalente Aussage. (Dies ist auch eine Benutzungsregel für $p \iff q$.)
- Gilt $A = B$ (man stelle sich etwa vor, dass A und B linke und rechte Seite der Gaußschen Summenformel sind), so dürfen wir an beliebig vielen Stellen in einer Aussage A durch B ersetzen und erhalten eine äquivalente Aussage.

(iii) **Umbenennen:** Wir dürfen eine Variable überall durch eine andere noch nicht benutzte Variable ersetzen.

(iv) **Sätze nutzen:** Wir dürfen ein bereits gezeigtes Resultat anwenden.
Benutzungstext: Wir wenden ... mit ... an und erhalten ....

Beispiel: Wir zeigen zuerst den
abc-abc-Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $1001 \cdot n$ durch 13 teilbar.

Beweis. Dies folgt aus $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. □

In einem nachfolgenden Beweis können wir dann schreiben: Aus dem abcabc-Satz erhalten wir, dass 243243 durch 13 teilbar ist.

(Hieraus ergibt sich der nette Zaubertrick, dass eine dreistellige Zahl, zweimal hintereinander geschrieben, durch 13 teilbar ist.)

2.1.12. Die logischen Verknüpfungen $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\implies$ und $\iff$ erfüllen stets die in der folgenden Proposition aufgelisteten Aussagen.

Proposition 2.1.13. *Seien p, q, r Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen wahr:*

(i) $\neg\neg p \iff p$, *(Doppelte Verneinung)*
(ii) $p \vee \neg p$, *(tertium non datur)*
(iii) $p \wedge q \iff q \wedge p$, *(Symmetrie)*
(iv) $p \vee q \iff q \vee p$, ... *(Symmetrie)*
(v) $(p \iff q) \iff (q \iff p)$, *(Symmetrie)*
(vi) $p \wedge q \implies p$, *(Weglassen)*
(vii) $p \implies p \vee q$, *(Hinzufügen)*
(viii) $(p \iff q) \implies ((p \vee r) \iff (q \vee r))$, *(beidseitiges Hinzufügen)*
(ix) $(p \iff q) \implies ((p \wedge r) \iff (q \wedge r))$, *(beidseitiges Hinzufügen)*
(x) $(p \iff q) \implies ((p \iff r) \iff (q \iff r))$, ... *(beidseitiges Hinzufügen)*
(xi) $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$, *(Assoziativität)*
(xii) $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$, ... *(Assoziativität)*
(xiii) $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, *(Distributivität)*
(xiv) $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, *(Distributivität)*
(xv) $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$, *(De Morgan)*
(xvi) $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$, ... *(De Morgan)*
(xvii) $(p \iff q) \iff ((p \implies q) \wedge (q \implies p))$, *(beide Richtungen zeigen)*
(xviii) $((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$, *(Zwischenschritt)*
(xix) $((p \iff q) \wedge (q \iff r)) \implies (p \iff r)$, *(Zwischenschritt)*
(xx) $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$, ... *(Implikation auflösen)*
(xxi) $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$, *(Kontraposition)*
(xxii) $p \iff ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$. *(Fallunterscheidung)*

2.1.14. Genauer sollte man beispielsweise $(\neg(\neg p)) \iff p$ in (i) und $(p \wedge q) \implies p$ in (vi) und $((\neg p) \vee q)$ in (xx) schreiben, d. h. Klammern verwenden, um die Reihenfolge anzudeuten. Wir verwenden die Konvention, dass $\neg$ am stärksten bindet, $\wedge$ und $\vee$ binden schwächer, und $\implies$ und $\iff$ binden am schwächsten (vgl. „Punkt-vor-Strich“-Regel).

2.1.15. Aus der Assoziativität folgt, dass wir hier Klammern weglassen dürfen (ohne den Wahrheitswert zu ändern), also $p \wedge q \wedge r$ statt $(p \wedge q) \wedge r$ schreiben dürfen. Für mehr als drei mit $\wedge$ verknüpfte Aussagen zeigen wir später kar (siehe 2.4.94), dass je zwei Klammersetzungen äquivalente Aussagen liefern. Analoges gilt für $\vee$.

2.1.16. Wir schreiben $p \iff q \iff r$ für $(p \iff q) \wedge (q \iff r)$. Allgemeiner schreiben wir $p_1 \iff p_2 \iff \ldots \iff p_n$ für $(p \iff q) \wedge (q \iff r) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \iff p_n)$, wobei der Leser hier entweder eine Klammersetzung fixiere oder bereits darauf vertraue, dass jede Klammersetzung eine äquivalente Aussage liefert (siehe 2.1.15).

2.1.17. Hoffentlich ist dem Leser jede der aufgelisteten Aussagen intuitiv klar. Beispielsweise formalisiert (xvii) unsere Nachweisregel für $\iff$; (xix) sagt, dass man, um eine Implikation $p \implies r$ zu zeigen, eine (geeignete) Zwischenaussage q verwenden darf, die von p impliziert wird und die r impliziert.

Sehr oft wird (xxi) verwendet: Will man eine Implikation $p \implies q$ zeigen, so kann man äquivalent ihre **Kontraposition** $\neg q \implies \neg p$ zeigen.

2.1.18 (Beweis durch Widerspruch (oder indirekter Beweis))**.** Um eine Aussage zu beweisen, genügt es, aus ihrer Negation einen Widerspruch (= eine falsche Aussage) herzuleiten. Dies läßt sich formal wie folgt begründen: Sei p eine Aussage. Können wir aus $\neg p$ einen Widerspruch, also eine falsche Aussage f herleiten, so gilt $\neg p \implies f$. Nach (xx) (angewandt auf $\neg p$ und f) gilt somit $\neg\neg p \vee f$. Da f falsch ist, muss $\neg\neg p$ gelten. Nach (i) ist also p wahr.

2.1.19. Jede Aussage ist äquivalent zu einer Aussage, die nur die beiden Verknüpfungen $\vee$ und $\neg$ enthält (und analog für $\wedge$ und $\neg$). Hat man beim Schaltkreisbau genügend OR- und NOT-Gatter, so kann man auf AND-Gatter verzichten. Dies folgt aus (i), (xv), (xvii) und (xx). Beispielsweise sind die folgenden Ausdrücke äquivalent: $p \iff q$, $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$, $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$, $\neg\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$, $\neg(\neg(\neg p \vee q)) \vee (\neg(\neg q \vee p))$.

Erster Beweis (mit Wahrheitstafeln). Diese Beweismethode wird später (wenn wir „richtige“ mathematische Sätze zeigen) selten[12] verwendet. Man zeigt, dass in der Wahrheitstafel in der Spalte unter jeder der Aussagen aus der Proposition nur der Wert „wahr“ steht. Für (xx) ergibt sich beispielsweise

p	q	$p \implies q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	(xx)
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Daher ist die Aussage (xx) wahr. (Es genügt auch zu zeigen, dass in den beiden Spalten unter $p \implies q$ und $\neg p \vee q$ stets dieselben Wahrheitswerte stehen.) Der Beweis aller anderen Aussagen geht analog und ist dem Leser überlassen. □

Zweiter Beweis (mit Begründungstext – die übliche Methode in der Mathematik). Wir führen dies exemplarisch für die Aussagen (i), (ii), (xviii), (xix), (xx) und (xxi) vor und überlassen den Rest dem Leser als Übung.

(i) (Eigentlich haben wir uns das bereits in Bemerkung 2.1.5 überlegt.) Auf Grund der Nachweisregel von $\iff$ zeigen wir, dass $\neg\neg p \implies p$ und $p \implies \neg\neg p$ gelten.

„$\Rightarrow$“: Auf Grund der Nachweisregel von $\implies$ nehmen wir zunächst an, dass $\neg\neg p$ gilt. Also ist $\neg p$ falsch (nach der Benutzungsregel für die Negation), was bedeutet, dass p richtig ist.

„$\Leftarrow$“: Gelte nun p. Dann ist $\neg p$ falsch. Also ist $\neg\neg p$ richtig.

Nach der Nachweisregel von $\iff$ ergibt sich daraus die Behauptung.

(ii): Sei p eine Aussage. Auf Grund der Nachweisregel von $\vee$ ist zu zeigen, dass p gilt oder dass $\neg p$ gilt. Dies ist aber klar, da jede Aussage entweder wahr oder falsch ist.

(xviii): Auf Grund der Nachweisregel von $\implies$ nehmen wir an, dass $(p \implies q) \wedge (q \implies r)$ gilt. Es folgen $p \implies q$ und $q \implies r$ (nach der Benutzungsregel für $\wedge$). Um $p \implies r$ zu zeigen, nehmen wir an, dass p gilt (Nachweisregel für $\implies$). Weil $p \implies q$ gilt, folgt (nach der Benutzungsregel für $\implies$), dass q gilt. Weil $q \implies r$ gilt, folgt (nach der Benutzungsregel für $\implies$), dass r gilt. Dies zeigt $p \implies r$.

(xix): Dies folgt leicht aus (xviii).

(xx): Erneut zeigen wir die Hin- und die Rückrichtung separat.

„$\Rightarrow$“: Gelte $p \implies q$. Wir wollen zeigen, dass $\neg p \vee q$ gilt. Nach (ii) gilt stets $p \vee \neg p$. Also tritt mindestens einer der beiden Fälle ein:

- 1. Fall: p gilt. Nach Voraussetzung gilt q und somit gilt $\neg p \vee q$.
- 2. Fall: $\neg p$ gilt: Dann gilt sofort $\neg p \vee q$.

„$\Leftarrow$“: Gelte $\neg p \vee q$. Um $p \implies q$ nachzuweisen, dürfen wir annehmen, dass p gilt. Wegen $\neg p \vee q$ tritt mindestens einer der beiden Fälle ein:

- 1. Fall: $\neg p$ gilt: Dies widerspricht unserer Annahme, dass p gilt, und somit kann dieser Fall nicht eintreten.
- 2. Fall: q gilt: Dies ist genau, was wir zeigen wollen.

Die Äquivalenz folgt.

[12] Dies ist diskutabel, denn Fallunterscheidungen werden oft verwendet.

(xxi): Zu zeigen ist, dass $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ eine wahre Aussage ist. Aus den jeweils angegebenen bereits (eventuell vom Leser) gezeigten Aussagen erhalten wir (teilweise direkte Anwendung durch Ersetzen, teilweise werden die Aussagen benutzt) (mit der in 2.1.16 erklärten Schreibweise)

$$\begin{aligned}(p \implies q) &\overset{(xx)}{\iff} (\neg p \vee q)\\ &\overset{(iv)}{\iff} (q \vee \neg p)\\ &\overset{(i),(v),(viii)}{\iff} (\neg\neg q \vee \neg p)\\ &\overset{(xx),(v)}{\iff} (\neg q \implies \neg q).\end{aligned}$$

Das mehrfache Anwenden von (xix) liefert nun die Behauptung. □

Bemerkung 2.1.20. Es gibt noch zahlreiche weitere interessante Verknüpfungen von logischen Aussagen. Wir geben einige Beispiele, wobei p, q, r Aussagen sind und t (true) eine stets wahre Aussage (etwa $42 = 42$):

(i) $((p \implies q) \wedge p) \implies q$, (modus ponens)
(ii) $(p \iff q) \implies (p \implies q)$, (Abschwächung)
(iii) $((p \implies r) \wedge (q \implies r) \wedge (p \vee q)) \implies r$, (beidseitige Abschwächung)
(iv) $((p \vee q) \wedge (\neg p)) \implies q$, ... (ausgeschlossene Variante)
(v) $((p \implies q) \wedge \neg q) \implies \neg p$, (modus tollens)
(vi) $(\neg(p \wedge q) \wedge p) \implies \neg q$, (ausgeschlossene Variante)
(vii) $((p \implies q) \wedge (r \implies s) \wedge (\neg q \vee \neg s)) \implies (\neg p \vee \neg r)$, (falsche Schlussfolgerungen)
(viii) $(p \implies q) \iff (p \implies (p \wedge q))$. ..... (Wiederholen der Prämisse)
(ix) $p \wedge t \iff p$, (Wahres mit und)
(x) $p \vee t \iff t$, (Wahres mit oder)
(xi) $p \wedge p \iff p$, ... (Idempotenz)
(xii) $p \vee p \iff p$, (Idempotenz)

Die Benennung der Aussagen hier und in Proposition 2.1.13 ist teilweise keine Standardbenennung. Manche Bezeichnungen kommen aus der antiken Logik. Beispielsweise ist der *modus ponens* eine altbekannte Schlussfigur, die wir ja bereits als Benutzungsregel für $\implies$ kennengelernt haben (siehe [Wik19, Modus ponens]). Die Beweise dieser Aussagen sind dem Leser überlassen.

2.2. **Erste Mengenlehre.**

2.2.1. Über Mengenlehre gibt es ganze Vorlesungen. Wir erklären hier nur einige Grundlagen und folgen einem naiven Zugang, siehe etwa [Hal76]. Für einen ersten Eindruck des üblichen axiomatischen Zugangs (in dem einige unserer naiven Definitionen Axiome sind) siehe [Wik19, Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre].

Definition 2.2.2 (Naive Definition einer Menge)**.** Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten, den sogenannten **Elementen** dieser Menge.

2.2.3. Die Originaldefinition von Georg Cantor aus dem Jahr 1895 lautet (siehe [Can95]):

> Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Definition 2.2.4 (Elementbeziehung)**.** Ist A eine Menge und a ein Objekt, so schreiben wir $a \in A$ als Abkürzung für die Aussage „a ist ein Element von A". (Hier ist $\in$ ein stilisiertes kleines griechisches Epsilon ε, das unserem e entspricht und für die Elementbeziehung steht.) Die Negation dieser Aussage wird als $x \notin A$ notiert.

Definition 2.2.5 (Gleichheit von Mengen)**.** Seien A und B zwei Mengen. Wir nennen A und B genau dann **gleich**, notiert als $A = B$, wenn sie dieselben Elemente haben, wenn also jedes Element von A auch Element von B ist und jedes Element von B auch Element von A ist.

Beispiele 2.2.6. Oft gibt man Mengen durch die Angabe all ihrer Elemente in geschweiften Klammern, den sogenannten **Mengenklammern**, an.

(a) Für endliche Mengen (so nennt man Mengen, die nur endlich viele Elemente besitzen) listet man alle Elemente auf: Beispielsweise ist

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen zwischen 0 und 10. Es gelten $3 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ und $-1 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Die Menge

$$\{\text{Fahrrad}, \text{Rucksack}, \text{Wasser}, \text{Vorlesung}\}$$

enthält lauter nützliche Dinge. Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge an, und Elemente dürfen doppelt aufgeführt werden: Beispielsweise gilt

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 1, 3, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

(b) Die Menge, die kein Element enthält, wird **leere Menge** genannt und als $\emptyset$ oder $\{\}$ notiert.

(c) Auch unendliche Mangen kann man durch Angabe ihrer Elemente angeben[13]:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} \qquad \text{die Menge der natürlichen Zahlen,}$$
$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \qquad \text{die Menge der ganzen Zahlen.}$$

(d) Es gelten $0 \in \mathbb{N}$, $-1 \notin \mathbb{N}$, $-1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Definition 2.2.7 (Teilmenge)**.** Seien A und B zwei Mengen.

- Wir nennen A genau dann eine **Teilmenge von** B, wenn für jedes Element $x \in A$ auch $x \in B$ gilt. Wir schreiben dafür $A \subset B$. Das Zeichen $\subset$ heißt **Inklusionszeichen**. Die Teilmengenbeziehung $A \subset B$ wird **Inklusion** genannt.
- Gilt $A \subset B$ aber $A \neq B$, so nennen wir A eine **echte Teilmenge** von B und kürzen dies durch $A \subsetneq B$ ab.[14]

2.2.8. Zur Veranschaulichung von mehreren Mengen kann man Venn- oder Euler-Diagramme malen (vgl. [Wik19, Mengendiagramm]).

Beispiele 2.2.9. (a) Es gilt $\emptyset \subset \{0, 1\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ja sogar $\emptyset \subset \{0, 1\} \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.

(b) Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge X, in Formeln $\emptyset \subset X$.

(c) Die Aussage $\{x\} \subset X$ ist gleichbedeutend zu $x \in X$.

Wem diese Aussagen nicht klar sind, sollte sie mit den Hilfen in 2.2.11 beweisen.

2.2.10. Statt $x \in A$ sagt man auch „x gehört zu A“ oder „x liegt in A“. Statt $x \in A$ und $y \in A$ schreibt man abkürzend $x, y \in A$. Analog bedeutet $x_1, \dots, x_n \in A$, dass $x_i \in A$ für alle Indizes $i = 1, \dots, n$ gilt.

Man schreibt abkürzend $A, A' \subset B$ für $A \subset B$ und $A' \subset B$. Analog meint $A_1, \dots, A_n \subset B$, dass jede der Mengen $A_1, \dots, A_n$ eine Teilmenge von A ist.

Statt $A \subset B$ schreibt man auch $B \supset A$. Die Schreibweise $A \subset B \subset C$ ist eine Kurzschreibweise für $A \subset B$ und $B \subset C$. Statt $A \subset B$ sagt man auch „A ist in B enthalten“ oder „B umfasst A“ oder „B ist Obermenge von A“. Verwandte Sprechweisen wird der Leser in der Regel aus dem Kontext selbst erschließen können.

Bemerkung 2.2.11. Aus der Definition ergeben sich für $A \subset B$.

- Nachweisregel: Um zu zeigen, dass $A \subset B$ gilt, zeigen wir, dass jedes $x \in A$ auch $x \in B$ erfüllt.
- Nachweistext: Wir wollen zeigen, dass $A \subset B$ gilt. Sei dazu $x \in A$. Dann folgt .... Somit erhalten wir $x \in B$ und daher $A \subset B$.

Ist die Aussage $A \subset B$ (als wahr) bekannt, so darf man sie wie folgt benutzen:

- Benutzungsregel: Aus $x \in A$ folgt $x \in B$.
- Benutzungstext, falls $x \in A$ bereits bekannt ist: Da $x \in A$ gilt, folgern wir, dass auch $x \in B$ gilt.

Ebenso ergibt sich für $A = B$.

- Nachweisregel: Um zu zeigen, dass $A = B$ gilt, zeigt man, dass $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
- Nachweistext: Wir wollen zeigen, dass $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten. [Begründung]

[13] Unter der Hoffnung, dass der Leser versteht, wie die durch die Punkte angedeutete Liste fortzusetzen ist.

[14] In der Literatur wird bisweilen das Symbol $\subseteq$ für die Teilmengen-Beziehung und $\subset$ für die Echte-Teilmengen-Beziehung verwendet.

Ist die Aussage $A = B$ (als wahr) bekannt, so darf man sie wie folgt benutzen:

- Benutzungsregel: Aus $A = B$ folgen $A \subset B$ und $B \subset A$.
- Benutzungstext: Aus $A = B$ erhalten wir $A \subset B$.
  Alternativ: Aus $A = B$ erhalten wir $B \subset A$.

Ende der 3. Vorlesung am 14.10.2019.

Lemma 2.2.12. *Seien A, B, C Mengen. Dann gelten*

(i) $A \subset A$ *(Reflexivität)*
(ii) *($A \subset B$ und $B \subset A$) impliziert $A = B$* *(Antisymmetrie)*
(iii) *($x \in A$ und $A \subset B$) impliziert $x \in B$.*
(iv) $A \subset B \subset C$ *impliziert* $A \subset C$ *(Transitivität)*

Beweis.

(i) Zu zeigen ist, dass aus $x \in A$ auch $x \in A$ folgt. Das ist klar.
(ii) Klar nach Definition.
(iii) Gilt nach Definition von $A \subset B$.
(iv) Sei $x \in A$. Dann folgt $x \in B$ nach (iii). Nochmals nach (iii) folgt auch $x \in C$. Also gilt $A \subset C$. □

2.2.13. Für zwei Mengen A, B gilt genau dann Gleichheit $A = B$, wenn die beiden Inklusionen $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten. Dies ist klar und folgt auch aus Reflexivität und Antisymmetrie.

2.2.14 (*Set-builder notation*)**.** Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform, die zu einer Aussage wird, wenn man für x ein Element von A einsetzt. Dann gibt es eine Menge, deren Elemente genau die Elemente x aus A sind, die $a(x)$ erfüllen. Sie wird als

$$B = \{x \in A \mid a(x)\} \tag{2.2.1}$$

notiert. Offensichtlich gilt $B \subset A$.

Beispiele 2.2.15.

- $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$,
- $\{0, 1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = n\}$.

2.2.16 (Das Wort *genau*)**.** Das Wort *genau* in 2.2.14 bedeutet, dass B alle Elemente $x \in A$ enthält, die $a(x)$ erfüllen, aber keine, für die $\neg a(x)$ gilt.

Das Wort *genau* ist sehr wichtig in mathematischen Texten (wir haben es bereits mehrfach verwendet). Wir erklären seinen Gebrauch an einem Beispiel. Wenn ein Mathematiker sagt, dass er eine Tochter hat, so bedeutet dies (im Gegensatz zur normalen Umgangssprache), dass er mindestens eine Tochter hat (und sagt überhaupt nichts über eventuell vorhandene Söhne). Sagt er, dass er genau eine Tochter hat, so weiss man, dass er eine Tochter hat, aber keine weitere Tochter.

Auch in Definitionen sollte man eigentlich immer das Wort *genau* verwenden, wie wir dies etwa in Definition 2.2.5 getan haben. In der mathematischen Literatur gilt jedoch die Konvention, dieses Wort in Definitionen wegzulassen. Wir folgen dieser Konvention ab jetzt.

2.2.17.

- Nachweisregel: Um zu zeigen, dass $y \in \{x \in A \colon a(x)\}$ gilt, müssen wir $y \in A$ und $a(y)$ zeigen.
- Nachweistext: Ergibt sich aus der Nachweisregel.
- Benutzungsregel: Übung.
- Benutzungstext: Aus $y \in \{x \in A \colon a(x)\}$ erhalten wir $y \in A$ und $a(y)$.

Bemerkung 2.2.18 (Russelsche Antinomie (Bertrand Russel, Ernst Zermelo, Georg Cantor) [Wik19, Russellsche Antinomie]). Naiverweise könnte man sich in (2.2.1) die Angabe sparen, aus welcher Menge man die Elemente aussondert, die eine gegebene Aussage erfüllen, würde also die Existenz einer „Allmenge“ annehmen. Dann hätte man zu jeder Aussage eine Menge, in der alle Objekte sind, die diese Aussage erfüllen. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch:

Angenommen, es gäbe eine Allmenge A, also eine Menge, die alle Objekte enthält. Dann definieren wir die Menge

$$B := \{x \in A \mid x \notin x\}$$

aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Nach Definition gilt $y \in B \iff (y \in A \wedge y \notin y)$. Da wir angenommen haben, dass A eine Allmenge ist, ist $y \in A$ stets erfüllt und wir erhalten $y \in B \iff y \notin y$. Wenn wir nun überprüfen wollen, ob B sich selbst enthält, ob also $B \in B$ gilt, können wir diese Bedingung mit $y = B$ anwenden und erhalten $B \in B \iff B \notin B$. Dies ist ein Widerspruch. Es gibt also keine Allmenge.

Daher werden wir zukünftig Allmengen vermeiden.

Es ist üblich, in einem Widerspruchsbeweis die Annahme, die zu einem Widerspruch geführt werden soll, im Irrealis zu schreiben, bei den weiteren Folgerungen daraus aber wieder den Realis zu verwenden.

2.3. **Quantoren.**

Definition 2.3.1 (Quantoren)**.** Quantoren verwenden wir bei freien Variablen in Aussageformen. Sie beziehen sich stets auf Elemente einer Menge:

Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform mit genau einer freien Variablen x.

(i) **Existenzquantor:** Wir schreiben

$$\exists x \in A\colon a(x)$$

für die Aussage „**Es gibt** ein x in der Menge A, so dass für dieses x die Aussage $a(x)$ gilt.“ Formal kann man dies per

$$\exists x \in A\colon a(x) \quad :\iff \quad \{x \in A\colon a(x)\} \neq \emptyset$$

definieren, wobei das Zeichen $:\iff$ ausdrückt, dass der Ausdruck auf der linken Seite eine Abkürzung für die Aussage auf der rechten Seite ist (ähnlich wie beim Definitionszeichen $:=$).

Wir schreiben

$$\exists!\, x \in A\colon a(x)$$

(genau dann[15]), wenn es ein Element $x \in A$ gibt, so dass dieses x, aber kein anderes Element aus A, die Aussage $a(x)$ erfüllt. Man sagt: Es gibt **genau** ein x aus A mit $a(x)$.

(ii) **Allquantor:** Wir schreiben

$$\forall x \in A\colon a(x)$$

für die Aussage: „**Für alle** x in der Menge A gilt die Aussage $a(x)$.“ Formal definieren wir

$$\forall\, x \in A\colon a(x) \quad :\iff \quad \{x \in A\colon a(x)\} = A.$$

Ist $a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Aussageform, die von $n \geq 2$ freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ abhängt, so kann man daraus die Aussageformen $\exists x_1 \in A\colon a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\exists! x_1 \in A\colon a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\forall x_1 \in A\colon a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit den offensichtlichen Bedeutungen bilden, die nur noch von den freien Variablen $x_2, \ldots, x_n$ abhängen. Statt x_1 hätte man auch eine beliebige andere der freien Variablen „abquantifizieren“ können.

2.3.2. Das Zeichen $\exists$ ist ein umgedrehtes E für „existiert“. Das Zeichen $\forall$ ist ein umgedrehtes A für „alle“.

2.3.3. Statt „Es gibt (genau) ein x ...“ kann man äquivalent „Es existiert (genau) ein x ...“ sagen. Statt „Für alle x ...“ kann man äquivalent „Für jedes (beliebige) x ...“ sagen.

Beispiel 2.3.4. Wir verwenden für diese Beispiele nochmals Schulwissen.

(i) Die wahre Aussage „Für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 \geq 0$.“ kann man kurz als „$\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 \geq 0$“ schreiben.

(ii) „Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = 2$.“ ist „$\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 = 2$“ in Kurzschreibweise.

(iii) Die Aussage „$\exists!\, x \in \mathbb{R}\colon x^2 = 2$“ ist falsch.

Bemerkung 2.3.5.

(i) Mit Quantoren können wir die Teilmengendefinition formaler angeben:

$$A \subset B \quad \iff \quad \forall x \in A : x \in B.$$

(ii) Für den Allquantor ergeben sich die folgenden Regeln im Falle $\forall x \in A\colon a(x)$:

[15] vergleiche 2.2.16

- Nachweisregel: Man nimmt ein beliebiges Element $x \in A$ und zeigt, dass $a(x)$ gilt.
  Achtung: Der Variablenname x darf noch nicht verwendet worden sein.
- Nachweistext: Sei $x \in A$ (beliebig/gegeben/beliebig aber fest vorgegeben). Wir wollen nun zeigen, dass $a(x)$ gilt. [Begründung]
  Alternativ: Zu zeigen: Es gilt $a(x)$.
- Benutzungsregel: Wenn wir sicherstellen, dass $x \in A$ gilt, dürfen wir die Aussage $a(x)$ benutzen.
- Benutzungstext: Es gilt $\forall x \in A\colon a(x)$. Da $y \in A$ gilt, folgt hieraus $a(y)$.

(iii) Regeln für $\exists\, x \in A\colon a(x)$:
- Nachweisregel: Man muss ein Element $y \in A$ finden, das $a(y)$ erfüllt.
  Alternativ: Zeige, dass $\{x \in A\colon a(x)\} \neq \emptyset$ gilt.
- Nachweistext: Wir definieren $y := \ldots$. Wir zeigen nun, dass $y \in A$ und $a(y)$ gelten.
- Benutzungsregel: Man darf sich ein y (neuer Name!) mit $y \in A$ und $a(y)$ nehmen.
- Benutzungstext: Aus $\exists\, x \in A\colon a(x)$ folgt, dass es ein $y \in A$ mit $a(y)$ gibt.

(iv) Regeln für $\exists!$:
- Nachweisregel: Die Aussage $\exists!\, x \in A\colon a(x)$ zeigt man, indem man $\exists\, x \in A\colon a(x)$ zeigt und dass für alle $x, y \in \{z \in A\colon a(z)\}$ die Aussage $x = y$ folgt.
- Nachweistext: Wir wollen $\exists!\, x \in A\colon a(x)$ zeigen. Dazu zeigen wir zunächst $\exists\, x \in A\colon a(x)\colon \ldots$. Seien nun $x, y \in A$ mit $a(x)$. Wir folgern, dass $\ldots$. Somit ergibt sich $x = y$ und wir erhalten $\exists!\, x \in A\colon a(x)$.

Proposition 2.3.6. *Seien A, B Mengen und $p(x)$ bzw. $p(x,y)$ Aussageformen. Dann gelten*

$$\forall x \in A\colon \forall y \in B\colon p(x,y) \iff \forall y \in B\colon \forall x \in A\colon p(x,y), \tag{2.3.1}$$

$$\exists x \in A\colon \exists y \in B\colon p(x,y) \iff \exists y \in B\colon \exists x \in A\colon p(x,y), \tag{2.3.2}$$

$$\exists x \in A\colon \forall y \in B\colon p(x,y) \implies \forall y \in B\colon \exists x \in A\colon p(x,y), \tag{2.3.3}$$

$$\neg\,(\forall x \in A\colon p(x)) \iff \exists x \in A\colon \neg p(x), \tag{2.3.4}$$

$$\neg\,(\exists x \in A\colon p(x)) \iff \forall x \in A\colon \neg p(x). \tag{2.3.5}$$

2.3.7. Die beiden Äquivalenzen (2.3.4) und (2.3.5) heißen De Morgansche Regeln.

Beweis.
- (2.3.1) Wir zeigen zuerst die Implikation $\Rightarrow$. Gelte die linke Seite. Zu zeigen ist die Aussage $\forall y \in B\colon \forall x \in A\colon p(x,y)$. Sei $y' \in B$ beliebig. Zu zeigen ist $\forall x \in A\colon p(x,y')$. Sei $x' \in A$ beliebig (und nun fixiert). Zu zeigen ist $p(x',y')$. Da die linke Seite von (2.3.1) als wahr angenommen ist, können wir dort für x konkret unser fixiertes $x' \in A$ einsetzen und erhalten, dass $\forall y \in B\colon p(x',y)$ gilt. Nun dürfen wir für y speziell $y' \in B$ einsetzen und erhalten die Gültigkeit von $p(x',y')$. Dies war zu zeigen.
  Die Implikation $\Leftarrow$ geht genauso.
- (2.3.2) Analog und dem Leser überlassen.
- (2.3.3) Gelte die linke Seite. Also gibt es ein $x' \in A$, so dass $\forall y \in B\colon p(x',y)$ gilt. Wir wollen die rechte Seite, also $\forall y \in B\colon \exists x \in A\colon p(x,y)$ zeigen. Sei $y' \in B$ beliebig. Es genüg zu zeigen, dass $\exists x \in A\colon p(x,y')$ gilt. Für unser obiges Element $x' \in A$ gilt aber wegen $\forall y \in B\colon p(x',y)$ und $y' \in B$ insbesondere $p(x',y')$. Also gilt $\exists x \in A\colon p(x,y')$ wie gewünscht.
- (2.3.4) Zu zeigen sind die Implikationen in beide Richtungen.
  - Implikation $\Rightarrow$: Gelte die linke Seite. Die Aussage $\forall x \in A\colon p(x)$ ist also falsch. Also gibt es ein Element $x' \in A$, für das $p(x)$ falsch ist. Dies ist aber genau die Aussage auf der rechten Seite.
  - Implikation $\Leftarrow$: Gelte die rechte Seite. Also gibt es ein Element $x' \in A$, für das $\neg p(x')$ gilt. Also ist $p(x')$ falsch. Also ist $\forall x \in A\colon p(x)$ falsch. Dies bedeutet, dass die linke Seite korrekt ist.

  Man kann auch direkt die Äquivalenze mit zwei Zwischenschritten zeigen: Die linke Seite ist äquivalent zur Aussage „Es ist falsch, dass für alle $x \in A$ die Aussage $p(x)$ gilt.“. Dies ist äquivalent zu „Es gibt ein $x \in A$, für das $p(x)$ nicht gilt“. Dies ist äquivalent zur rechten Seite.
- (2.3.5) Analog und dem Leser überlassen.

□

Warnung 2.3.8 (Reihenfolge von Quantoren).

(i) Man darf die Reihenfolge von Existenz- und Allquantor keinesfalls vertauschen: In (2.3.3) in Proposition 2.3.6 handelt es sich nicht um eine Äquivalenz: Für $A = B = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und $p(x, y)$ die Aussageform $x + y = 0$ ist die linke Seite $\exists x \in \mathbb{Z}\colon \forall y \in \mathbb{Z}\colon x + y = 0$ falsch, die rechte Seite $\forall y \in \mathbb{Z}\colon \exists x \in \mathbb{Z}\colon x + y = 0$ aber wahr.

(ii) In mathematischen Texten wird oft die Schreibweise $p(x)\ \forall x \in A$ anstelle von $\forall x \in A\colon p(x)$ verwendet. Dies ist aber bei gleichzeitiger Verwendung von Existenz- und Allquantoren höchst gefährlich (falls man nicht sorgfältig Klammern anbringt): Es ist vollkommen unklar, was mit $\exists x \in \mathbb{Z}\colon x + y = 0\ \forall y \in \mathbb{Z}$ gemeint ist – die erste falsche Aussage im vorigen Punkt oder die zweite wahre? Dem Anfänger sei dringend geraten, Quantoren nur links von Aussageformen zu schreiben.

Auch verbale Formulierungen wie „für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt $x + y = 0$ für ein $x \in \mathbb{Z}$“ sind zu vermeiden, da sie leicht falsch verstanden werden können.

Als Faustregel sollte man den Allquantor höchstens dann rechts schreiben, wenn in der entsprechenden Aussage(form) keine Existenzquantoren vorkommen.

2.3.9. Folgen mehrere Existenzquantoren „über dieselbe Menge“ direkt nacheinander„, so kürzt man dies oft wie aus dem folgenden Beispiel ersichtlich ab: Statt $\exists x \in A\colon \exists y \in A\colon \exists z \in A\colon p(x, y, z)$ schreibt man kurz $\exists x, y, z \in A\colon p(x, y, z)$. Analog ist $\forall x, y, z \in A\colon p(x, y, z)$ zu verstehen.

Beispiel 2.3.10. Wir nehmen an, dass dem Leser die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen aus der Schule vertraut ist. Die Menge der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}\colon \exists q \in \mathbb{Z}\colon (q \neq 0) \wedge (x = \frac{p}{q})\}$ bzw. in „aufzählender“ Kurzschreibweise

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}.$$

Man beachte, dass bei dieser Aufzählung der Elemente von $\mathbb{Q}$ Elemente mehrfach genannt werden, etwa $\frac{3}{7} = \frac{-6}{-14}$, denn für beliebige ganze Zahlen $p, p' \in \mathbb{Z}$ und $q, q' \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$, $q' \neq 0$ gilt genau dann $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, wenn $pq' = p'q$ gilt. Elemente von $\mathbb{Q}$ heißen **Brüche**. Das Symbol $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen kommt wohl vom Wort *Quotient* für *Bruch*.

In 2.4.80 erklären wir, wie man die rationalen Zahlen ohne Verwendung der reellen Zahlen definiert.

Beispiel 2.3.11. Aus der Schule ist bekannt, dass 2 in den reellen Zahlen die beiden Quadratwurzeln $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ hat. Der folgende Satz zeigt, dass diese nicht in $\mathbb{Q}$ liegen, in Formeln $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Satz 2.3.12. *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

2.3.13. Die Länge der Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge Eins hat Länge $\sqrt{2}$ (nach dem Satz von Pythagoras, den wir hier als bekannt voraussetzen). Dieses Beispiel zeigt, dass die rationalen Zahlen nicht zum Messen elementarer geometrischer Längen (oder geometrischer Verhältnisse, Diagonale zu Grundseite) ausreichen.

Beweis. (mit Schulwissen über Teilbarkeit) Wir zeigen dies durch einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ und $x = \frac{p}{q}$. Wir können durch Kürzen oBdA (= ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen[16], dass höchstens eine der beiden Zahlen p und q durch 2 teilbar ist. Aus $2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2}$ folgt $2q^2 = p^2$. Also ist p^2 gerade. Wir erinnern daran, dass das Quadrat jeder geraden/ungeraden ganzen Zahl wieder gerade/ungerade ist (Beweis: Ist $n = 2m$ gerade, so auch $n^2 = 4m^2$; ist $n = 2m + 1$ ungerade, so auch $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 2m + 1 = 2(2m^2 + m) + 1$). Also ist p gerade, und wir können $p = 2p'$ für eine geeignete ganze Zahl $p' \in \mathbb{Z}$ schreiben. Es folgt $2q^2 = p^2 = (2p')^2 = 4p'^2 = 2 \cdot (2p'^2)$, also $q^2 = 2p'^2$. Somit ist q^2 gerade, und damit auch q. Also sind p und q gerade, was unserer Annahme widerspricht. Die Behauptung des Satzes ist also wahr. □

2.4. **Weitere Mengenlehre.**

Definition 2.4.1 (Vereinigung und Durchschnitt)**.** Seien A und B Mengen. Die **Vereinigung von A und B** ist die Menge

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

[16] Dafür genügt es, Zähler und Nenner so lange durch 2 zu teilen, bis einer der beiden ungerade ist. Dieser Prozess terminiert, was wir hier als bekannt voraussetzen.

Der **Durchschnitt** oder kurz **Schnitt** von A und B ist die Menge

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definition 2.4.2. Seien A und B Mengen. Man nennt A und B **disjunkt**, falls $A \cap B = 0$ gilt. Sind A und B disjunkte Mengen, so schreibt man manchmal $A \dot\cup B$ statt $A \cup B$ und nennt diese Vereinigung eine **disjunkte Vereinigung**.

Beispiel 2.4.3. Es gelten

$$\{0,1,2\} \cup \{1,2,3\} = \{0,1,2,3\},$$
$$\{0,1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2\}.$$

Proposition 2.4.4. *Seien A, B und C drei Mengen. Dann gelten*

(i) $A \cup A = A$
(ii) $A \cap A = A$
(iii) $A \cup \emptyset = A$
(iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(v) $A \cup B = B \cup A$ *(Kommutativität)*
(vi) $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativität)*
(vii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Assoziativität)*
(viii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Assoziativität)*
(ix) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(Distributivität)*
(x) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *(Distributivität)*
(xi) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ *und* $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
(xii) $A \subset B$ *impliziert* $A \cup C \subset B \cup C$ *und* $A \cap C \subset B \cap C$.

2.4.5. Veranschauliche durch Venn- oder Euler-Diagramme [Wik19, Mengendiagramm].

Beweis. Wir beweisen nur die Distributivitätsaussage (ix) und lassen den Rest als Übung. Für jedes x gilt

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\iff x \in (A \cap B) \vee x \in C \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ &\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \qquad \text{(Proposition 2.1.13 (xiii))} \\ &\iff (x \in A \cup C) \wedge (x \in B \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

Also bestehen die Mengen $(A \cap B) \cup C$ und $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ aus denselben Elementen und sind somit gleich. □

Aufgabe 2.4.6. Seien A, B Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $A \subset B$,
(ii) $A \cup B = B$,
(iii) $A \cap B = A$.

Definition 2.4.7 (Differenzmenge und Komplement)**.**

(i) Seien A und B Mengen. Dann definieren wir die **Differenzmenge von A und B** durch

$$A \setminus B := \{x \in A \colon x \notin B\}.$$

In gesprochener Sprache sagt man dafür „A **ohne** B“.

(ii) Seien A eine Teilmenge einer Menge X. Dann definieren wir das **Komplement von A in X** durch

$$A^{\mathsf{c}} := \{x \in X \colon x \notin A\}.$$

Die Notation $\complement A$ für A^{c} ist auch verbreitet. Meist ist aus dem Kontext klar, welche Obermenge X gemeint ist. Sonst muss man etwa $A^{\mathsf{c},X}$ oder $\complement_X A$ schreiben.

Ende der 4. Vorlesung am 17.10.2019.

Proposition 2.4.8. *Seien A, B und C drei Teilmengen einer Menge X. Dann gelten die folgenden Gleichheiten, wobei alle Komplemente in X gebildet werden.*

(i) $(A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = A$
(ii) $A \cup A^{\mathsf{c}} = X$ *(genauer $A \dot\cup A^{\mathsf{c}}$)*
(iii) $A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$
(iv) $A^{\mathsf{c}} = X \setminus A$
(v) $(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$ *(De Morgansche Regel)*
(vi) $(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$ *(De Morgansche Regel)*

Beweis. Wir betrachten nur die Erste De Morgansche Regel (v) und lassen den Rest als Übung. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^{\mathsf{c}} &\iff x \notin (A \cup B) \\ &\iff \neg(x \in (A \cup B)) \\ &\iff \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \\ &\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \qquad \text{(Proposition 2.1.13 (xvi))} \\ &\iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\iff (x \in A^{\mathsf{c}}) \wedge (x \in B^{\mathsf{c}}) \\ &\iff x \in A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$. □

Definition 2.4.9 (Kartesisches Produkt)**.** Seien A und B zwei Mengen. Die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ wird als **kartesisches Produkt** von A und B bezeichnet und als $A \times B$ notiert. In Formeln gilt also

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}.$$

Die Einträge a, b eines Paares (a, b) heißen seine **Komponenten**.

2.4.10. Wir haben Schnitt, Vereinigung und kartesisches Produkt bisher für je zwei Mengen definiert. Dies geht auch für mehr als zwei Mengen, wobei wir uns jedoch bei Schnitt und Vereinigung auf Teilmengen einer fixierten Obermenge beschränken.

Definition 2.4.11. Sei X eine Menge, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ Teilmengen von X. Dann definiert man ihre Vereinigung durch $\bigcup_{i=1}^n A_i := \{x \in X \mid \exists i \in \{1, \ldots, n\} \colon x \in A_i\}$ und ihren Schnitt durch $\bigcap_{i=1}^n A_i := \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x \in A_i\}$. Sind die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt, d. h. A_i und A_j sind disjunkt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$, so schreibt man manchmal $\dot\bigcup_{i=1}^n A_i$ statt $\bigcup_{i=1}^n A_i$ und spricht von einer disjunkten Vereinigung.

2.4.12. Sind A_1 und A_2 Teilmengen einer Menge X, so gilt $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{i=1}^2 A_i$ und $A_1 \cap A_2 = \bigcap_{i=1}^2 A_i$.

2.4.13. Für die Pedanten der Fall $n = 0$: Es gelten $\bigcup_{i=1}^0 A_i = \emptyset$ und $\bigcap_{i=1}^0 A_i = X$.[17]

2.4.14. Man kann allgemeiner für jede Menge $\mathcal{M}$ von Teilmengen einer Menge X ihre Vereinigung $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$ und ihren Schnitt $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A$ in naheliegender Weise definieren. Die Vereinigung ist disjunkt, wenn die Elemente von $\mathcal{M}$ paarweise disjunkt sind.

Aufgabe 2.4.15. Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge X.

(a) Ist B eine Teilmenge von X, so gelten die Distributivregeln $\left(\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A\right) \cap B = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} (A \cap B)$ und $\left(\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A\right) \cup B = \bigcap_{A \in \mathcal{M}} (A \cup B)$ (vgl. Proposition 2.4.4).
(b) Dann gelten die De Morganschen Regeln $\left(\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_{A \in \mathcal{M}} A^{\mathsf{c}}$ und $\left(\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A\right)^{\mathsf{c}} = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A^{\mathsf{c}}$ (vgl. Proposition 2.4.8).

[17] Der zweite Ausdruck erklärt, warum wir $\bigcap_{i=1}^n A_i$ nur für Teilmengen einer Menge X definieren. Sonst käme hier naiv die „Allmenge“ heraus, die es nach Russell nicht gibt, siehe Bemerkung 2.2.18.

Definition 2.4.16. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Dann definiert man ihr kartesisches Produkt $\prod_{i=1}^n A_i$ (manchmal auch als $\bigtimes_{i=1}^n A_i$ notiert) als die Menge aller n-**Tupel** $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in A_i$, d. h.

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Ist A eine Menge und $n \in \mathbb{N}$, so definiert man $A^n := \prod_{i=1}^n A$.

2.4.17. Im Fall $n = 2$ gilt $\prod_{i=1}^2 A_i = A_1 \times A_2$. Im Fall $n = 0$ besteht $\prod_{i=1}^0 A_i$ aus genau einem Element, dem 0-Tupel ().

Definition 2.4.18 (Potenzmenge)**.** Sei A eine beliebige Menge. Die **Potenzmenge** von A, notiert $\mathcal{P}(A)$, ist die Menge aller Teilmengen von A, in Formeln

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Beispiel 2.4.19.

(i) Für $A = \{a, b, c\}$ gilt

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

(ii) Ist $A = \emptyset$, so ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.

(iii) Die Aussagen $M \subset A$ und $M \in \mathcal{P}(A)$ sind nach Definition der Potenzmenge äquivalent.

Definition 2.4.20 (Abbildung, Funktion)**.** Seien A und B zwei Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von A nach B, geschrieben $f\colon A \to B$, ist eine Zuordnung, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet. Man nennt $f(a)$ den **Wert** oder die **Auswertung** von f an der Stelle a oder das **Bild** von a unter f oder die **Einsetzung** von a in f. Man notiert eine solche Abbildung meist als

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B, \\ a &\mapsto (\text{Vorschrift, wie man } f(a) \text{ aus } a \text{ berechnet}), \end{aligned}$$

(vgl. Beispiele 2.4.25). Sei eine Abbildung $f\colon A \to B$ gegeben.

(i) Der **Graph** von f ist durch

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in A \times B \colon x \in A\}$$

definiert.[18]

(ii) Die Menge A heißt **Definitionsbereich** von f, die Menge B heißt **Wertebereich** von f.

(iii) Ist M eine beliebige Teilmenge von A, so ist das **Bild von** M **unter** f durch

$$f(M) := \{f(x) \colon x \in M\} \subset B$$

definiert.

(iv) Ist N eine beliebige Teilmenge von B, so ist das **Urbild von** N **unter** f durch

$$f^{-1}(N) := \{a \in A \colon f(a) \in N\} \subset A$$

definiert. Für $b \in B$ heißt $f^{-1}(\{b\})$ die **Faser** von f über b. Sie wird meist mit $f^{-1}(b)$ abgekürzt. Jedes Element von $f^{-1}(b)$ heißt **Urbild von** b **unter** f.

Wir schreiben $\operatorname{Abb}(A, B) = \{f\colon A \to B\}$ für die Menge aller Abbildungen von A nach B.

Beispiele 2.4.21.

---

[18] Mengentheoretisch formale Definition einer Abbildung (ohne das undefinierte Wort „Zuordnung“): Eine **Abbildung** von A nach B ist eine Teilmenge Γ von $A \times B$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in \Gamma$ gibt:

$$\forall a \in A \colon \exists! b \in B \colon (a, b) \in \Gamma.$$

Gegeben ein solches Γ notieren wir für jedes $a \in A$ das eindeutige $b \in B$ mit $(a, b) \in \Gamma$ als $f(a)$. Dann ist f eine Abbildung im Sinne der „naiven“ Definition.

Ist umgekehrt f eine Abbildung im Sinne der naiven Definition, so ist der Graph von f eine Abbildung im mengentheoretisch formalen Sinn.

Wir erkennen, dass formale und naive Definition dasselbe meinen.

- Male Bilder, etwa eine Abbildung von einer dreielementigen Menge in eine fünfelementige Menge. Skizziere ihren Graph.
- Ein ARRAY OF BYTES in der Informatik ist eine Abbildung $a\colon \{0,1,\dots,n\} \to B$ in die Menge $B = \{0,1,\dots,255\}$ der Bytes.

2.4.22. Ich verwende den Begriff *Funktion* eigentlich nur für Abbildungen, deren Wertebereich eine Menge von reellen (oder komplexen) Zahlen ist.

Definition 2.4.23. Zwei Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to D$ heißen **gleich**, geschrieben $f = g$, wenn $A = C$ und $B = D$ und $\forall a \in A\colon f(a) = g(a)$ gelten. Sonst schreibt man $f \neq g$ (falls $A = C$ und $B = D$ gelten, so bedeutet dies, dass es ein Element $a \in A$ mit $f(a) \neq g(a)$ gibt).

Definition 2.4.24. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt

(i) **injektiv**[19], falls sie verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente des Wertebereichs abbildet, falls also für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ bereits $x = y$ folgt, in Formeln

$$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \implies x = y)$$

oder äquivalent

$$\forall x, y \in A\colon (x \neq y \implies f(x) \neq f(y)).$$

(ii) **surjektiv**, falls jedes Element des Wertebereichs ein Urbild unter f hat, falls also $f(A) = B$ gilt, oder äquivalent

$$\forall b \in B\colon \exists a \in A\colon f(a) = b.$$

Sagt man, dass f eine Abbildung von A **auf** B ist (statt *nach* B oder *in* die Menge B), so bedeutet dies, dass f surjektiv ist.

(iii) **bijektiv,** falls f injektiv und surjektiv ist.

Eine injektive/surjektive/bijektive Abbildung heißt **Injektion/Surjektion/Bijektion**.

Beispiele 2.4.25.

- Für jede Menge A ist die **Identität(sabbildung)**

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A\colon A &\to A, \\ a &\mapsto \mathrm{id}_A(a) := a, \end{aligned}$$

eine (injektive und surjektive und damit) bijektive Abbildung.
- Ist $A \subset B$ eine Inklusion, so ist

$$\begin{aligned} i\colon A &\to B, \\ a &\mapsto i(a) := a, \end{aligned}$$

eine injektive Abbildung.
- Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{N}, \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

ist weder injektiv noch surjektiv.
- Die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x + 1$, ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$, ist bijektiv.
- Mit Schulwissen: Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $x \mapsto x^2$, ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- Male Bilder für Abbildungen zwischen endlichen Mengen (inklusive Graphen, Fasern, etc.).
- (Unter Verwendung der reellen Zahlen) Vier Arten, wie man sich die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, vorstellen kann:
  - durch ihren Graph;
  - als Temperaturverteilung auf der reellen Gerade;

[19] Im Englischen *one-to-one*, in älteren deutschen Texten *eineindeutig*

– als Weg eines Teilchens auf der Zahlengeraden: Zur Zeit t ist das Teilchen an der Position $f(t) = t^2$;
– als Abbildung der Zahlengeraden auf sich selbst: Man klappt den negativen Teil der Zahlengerade auf den positiven (das wäre die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$) und streckt bzw. staucht.

Analog kann man sich andere Abbildungen von $\mathbb{R}$ (oder gar $\mathbb{R}^2$) nach $\mathbb{R}$ (oder gar $\mathbb{R}^2$) vorstellen.

Aufgabe 2.4.26. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist genau dann injektiv/surjektiv/bijektiv, wenn für jedes $b \in B$ die Faser $f^{-1}(b)$ aus höchstens/mindestens/genau einem Element besteht.

Definition 2.4.27 (Komposition oder Verknüpfung von Abbildungen)**.** Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen. Dann definiert

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\to C, \\ a &\mapsto g(f(a)), \end{aligned}$$

eine Abbildung. Diese Abbildung $g \circ f\colon A \to C$ heißt **Komposition** oder **Verknüpfung** der Abbildungen f und g.

2.4.28. In der Situation des Lemmas ist $f \circ g$ nicht definiert, es sei denn, es gilt $A = C$. Auch dann gilt im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$, wie das folgende Beispiel 2.4.29 zeigt.

Beispiel 2.4.29. Für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$, und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$, ist die Verknüpfung $g \circ f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch $x \mapsto x^2+1$ gegeben. Die Verknüpfung $f \circ g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist durch $x \mapsto (x+1)^2$ gegeben. Es gilt also $f \circ g \neq g \circ f$.

Lemma 2.4.30 (Assoziativität)**.** *Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon C \to D$ Abbildungen. Dann gilt*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

als Abbildungen $A \to D$.

Beweis. Definitions- und Wertebereiche von $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ stimmen überein, und für jedes $a \in A$ gilt

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a). \qquad \square$$

Lemma 2.4.31 (Injektivität/Surjektivität und Verknüpfung)**.** *Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann gelten:*

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
(b) Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
(d) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

Beweis. (a) Aus $f(a) = f(a')$ folgt $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$ und daraus $a = a'$.
(b) Gelte $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, also $g(f(a)) = g(f(a'))$. Daraus folgt $f(a) = f(a')$ und daraus $a = a'$.
(c) Für jedes $c \in C$ existiert ein $a \in A$ mit $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$. Also ist $f(a)$ ein Urbild von c.
(d) Für jedes $c \in C$ gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt folgt $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

$\square$

Ende der 5. Vorlesung am 21.10.2019.

Lemma 2.4.32. *Sei $f\colon A \to B$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Sie ist ebenfalls bijektiv.*

Wir notieren diese Abbildung als $f^{-1}\colon B \to A$ und nennen sie die[20] ***zu f inverse Abbildung*** *oder die* ***Inverse von f*** *oder die* ***Umkehrabbildung von f****.*

2.4.33. Wir haben das Symbol f^{-1} zuvor verwendet, um etwa die Faser $f^{-1}(b)$ oder das Urbild $f^{-1}(N)$ zu notieren (letzteres stimmt im Fall einer bijektiven Abbildung f mit dem Bild von N unter f^{-1} überein). Aus dem Kontext ist in aller Regel klar, was gemeint ist.

[20] Hier wird der bestimmte Artikel verwendet, denn g ist eindeutig mit der gewünschten Eigenschaft.

Beweis. **Existenz einer Umkehrabbildung:**

Da f bijektiv ist, gibt es für jedes $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Dieses (von b abhängige) Element a nennen wir $g(b)$. Die Zuordnung $b \mapsto g(b)$ definiert eine Abbildung $g\colon B \to A$. Nach Definition gilt $f(g(b)) = b$ für alle $b \in B$. Dies zeigt $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Für jedes $a \in A$ gilt ebenfalls nach Definition $g(f(a)) = a$. Dies zeigt $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Eindeutigkeit einer Umkehrabbildung: Seien $g_1\colon B \to A$ und $g_2\colon B \to A$ Abbildungen mit $g_i \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g_i = \mathrm{id}_B$ für alle $i = 1, 2$. Für jedes $a \in A$ gilt dann $a = \mathrm{id}_A(a) = (g_i \circ f)(a) = g_i(f(a))$ für alle $i = 1, 2$, also $g_1(f(a)) = a = g_2(f(a))$. Da f surjektiv ist, gibt es für jedes Element $b \in B$ ein Element $a_0 \in A$ mit $f(a_0) = b$. Es folgt $g_1(b) = g_1(f(a_0)) = g_2(f(a_0)) = g_2(b)$. Dies zeigt $g_1 = g_2$.[21]

Sei f^{-1} die[22] Umkehrabbildung von f. Da $\mathrm{id}_B = f \circ f^{-1}$ bijektiv und insbesondere injektiv ist, ist f^{-1} nach Lemma 2.4.31 injektiv. Da $\mathrm{id}_A = f^{-1} \circ f$ bijektiv und insbesondere surjektiv ist, ist f^{-1} nach Lemma 2.4.31 surjektiv. Also ist f^{-1} bijektiv. □

Lemma 2.4.34.

(a) *Ist $f\colon A \to B$ eine bijektive Abbildung, so gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.*

(b) *Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ bijektive Abbildungen, so ist $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Beweis. (a) Nach Lemma 2.4.32 ist f^{-1} bijektiv und erfüllt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Da $f^{-1}\colon B \to A$ bijektiv ist, gibt es wiederum nach Lemma 2.4.32 genau eine Abbildung $g\colon A \to B$ mit $g \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ und $f^{-1} \circ g = \mathrm{id}_A$, und diese wird als $(f^{-1})^{-1}$ notiert. Da f die an g gestellten Bedingungen erfüllt, muss $f = (f^{-1})^{-1}$ gelten (wegen der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung).

(b) Nach Lemma 2.4.31 ist $g \circ f$ injektiv und surjektiv, also bijektiv. Nach Lemma 2.4.32 existieren die Inversen f^{-1} bzw. g^{-1} von f und g. Es gilt

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ f = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = (f^{-1} \circ \mathrm{id}_B) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Analog gilt $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_C$. Nun verwende die Eindeutigkeitsaussage aus Lemma 2.4.32. □

Aufgabe 2.4.35. Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Beweisen Sie eine der beiden folgenden Aussagen und widerlegen Sie die andere durch ein Gegenbeispiel (Hinweis: leere Menge).

(a) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gibt.

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt.

2.4.36. Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.

- Sei $C \subset A$ eine Teilmenge. Dann definieren wir die **Einschränkung** oder **Restriktion** $f|_C$ von f auf C durch

$$\begin{aligned} f|_C\colon C &\to B, \\ x &\mapsto f|_C(x) := f(x). \end{aligned}$$

  Ist $i\colon C \hookrightarrow A$ die Inklusionsabbildung, so gilt $f|_C = f \circ i$.
- Ist $D \subset B$ eine Teilmenge mit $f(A) \subset D$, so induziert f eine Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon A &\to D, \\ a &\mapsto f(a), \end{aligned}$$

  die man bisweilen auch als Einschränkung von f bezeichnet (sie hat keine Standardbezeichnung, man könnte sie etwa als $f|^D$ oder $\overline{f}$ oder f' notieren). Ist $j\colon D \hookrightarrow B$ die Inklusionsabbildung, so gilt $f = j \circ g$.
- Die Kombination der beiden obigen Konstruktionen liefert: Sind $C \subset A$ und $D \subset B$ Teilmengen mit $f(C) \subset D$, so induziert f eine Abbildung $h\colon C \to D$, $c \mapsto f(c)$, die man auch als Einschränkung von f bezeichnet.

[21] Wir haben im Beweis der Eindeutigkeit nur Surjektivität von f und die beiden Gleichheiten $g_i \circ f = \mathrm{id}_A$, für $i = 1, 2$, verwendet. Alternativ hätten Injektivität und die beiden Gleichheiten $f \circ g_i = \mathrm{id}_B$, für $i = 1, 2$, ausgereicht.

[22] Wir verwenden nun den bestimmten Artikel, denn Existenz und Eindeutigkeit sind bereits bewiesen.

2.4.37. Intuitiv ist klar, was eine endliche Menge ist, und so haben wir den Begriff ja auch bereits benutzt. Der Begriff der Mächtigkeit gibt ein Maß für die Größe einer Menge.

Definition 2.4.38. Seien A und B zwei Mengen.

(i) A und B heißen **gleich mächtig**, notiert $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f\colon A \to B$ gibt.
(ii) A heißt **endlich**, falls es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $A \sim \{1, \dots, n\}$ gibt (die rechte Menge ist für $n = 0$ als leere Menge zu interpretieren).
(iii) A heißt **unendlich**, falls A nicht endlich ist.
(iv) A heißt **abzählbar**, falls $A \sim \mathbb{N}$ gilt.[23]
(v) A heißt **höchstens abzählbar**, falls A endlich oder abzählbar ist.
(vi) A heißt **überabzählbar**, falls A nicht höchstens abzählbar ist.

2.4.39. Sind A, B und C Mengen, so gelten:

- $A \sim A$,
- $A \sim B \iff B \sim A$,
- $((A \sim B) \wedge (B \sim C)) \implies A \sim C$.

Die erste Aussage ist klar. Die zweite folgt daraus, dass die Umkehrabbildung einer Bijektion ebenfalls bijektiv ist (Lemmas 2.4.32). Die dritte folgt daraus, dass die Verknüpfung zweier Bijektionen wieder eine Bijektion ist (siehe Lemma 2.4.34).

Beispiele 2.4.40.

(a) Die leere Menge ist endlich.
(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{0, 1 \dots, n\}$ endlich. In der Tat ist $\{0, 1 \dots, n\} \to \{1, \dots, n+1\}$, $x \mapsto x + 1$, bijektiv.
(c) Die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{42, 123456789, 2357\}$ sind endlich und gleich mächtig, in Formeln $\{1, 2, 3\} \sim \{42, 123456789, 2357\}$.
(d) $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
(e) Die Menge $G := \{2n\colon n \in \mathbb{N}\}$ der geraden Zahlen ist abzählbar, in Formeln $G \sim \mathbb{N}$, denn die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to G$, $n \mapsto 2n$, ist bijektiv, also eine Abzählung von G.
(f) Analog ist die Menge $U := \{2n+1\colon n \in \mathbb{N}\}$ der ungeraden Zahlen abzählbar. Es gilt $\mathbb{N} = G \dot\cup U$, d. h. die abzählbare Menge $\mathbb{N}$ ist eine disjunkte Vereinigung zweier abzählbarer Teilmengen.
(g) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar. (Übung)

2.4.41. Das folgende Lemma ist eine Hilfsaussage, die wir im Beweis der drei Sätze 2.4.43, 2.4.44 und 2.4.46 verwenden werden.

Lemma 2.4.42. *Seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, E eine Menge und $i\colon E \to \{1, \dots, n\}$ eine Injektion. Dann ist entweder i bijektiv oder es gibt eine Injektion $j\colon E \to \{1, \dots, n-1\}$.*

Im Fall $E = \{1, \dots, m\}$ für eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gilt $m \leq n$ mit Gleichheit genau dann, wenn i bijektiv ist. Hier ist $\leq$ die übliche Kleiner-Gleich-Relation auf den natürlichen Zahlen.

Beweis. Wir beweisen dies per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Anfang: Im Fall $n = 0$ gilt $\{1, \dots, n\} = \emptyset$ und es folgt $E = \emptyset$. Also ist i bijektiv.

[Im Fall $E = \{1, \dots, m\}$ folgt $m = 0$.]

Schritt: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und gelte die Aussage für $n-1$. Sei $i\colon E \to \{1, \dots, n\}$ eine Injektion. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- i ist bijektiv: Dann sind wir fertig.
  [Im Fall $E = \{1, \dots, m\}$ sei $b\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ die Bijektion, die $i(m)$ mit n vertauscht und alle anderen Elemente fixiert (im Fall $i(m) = n$ sei b die Identität). Dann ist $b \circ i\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv (nach Lemma 2.4.34) und bildet m auf n ab, induziert also eine bijektive Abbildung $\{1, \dots, m-1\} \to \{1, \dots, n-1\}$, $x \mapsto b(i(x))$. Per Induktionsvoraussetzung gilt dann $m - 1 = n - 1$, also $m = n$.]
- i ist nicht bijektiv: Dann ist i nicht surjektiv. Wir unterscheiden zwei Fälle.

[23] In diesem Fall nennt man eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ eine **Abzählung von** A.

- $n \notin i(E)$: Dann landet i in $\{1, \dots, n-1\}$ und induziert somit eine Injektion $j\colon E \to \{1, \dots, n-1\}$, $x \mapsto i(x)$.
  [Im Fall $E = \{1, \dots, m\}$ gilt per Induktionsvoraussetzung $m \leq n-1$, also $m < n$ wie gewünscht.]
- $n \in i(E)$: Sei $x \in E$ mit $i(x) = n$. Da i nicht surjektiv ist, gibt es ein $y \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $y \notin i(E)$. Sei $b\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ die bijektive Abbildung, die n und y miteinander vertauscht und alle anderen Elemente fixiert. Dann ist $g := b \circ i\colon E \to \{1, \dots, n\}$ injektiv (als Verknüpfung injektiver Abbildungen, siehe Lemma 2.4.31). Es gilt $n \notin g(E)$, denn ist $z \in E$ ein Element mit $n = g(z) = b(i(z))$, so folgt $y = b^{-1}(n) = i(z)$ im Widerspruch zu $y \notin i(E)$. Also induziert g eine Abbildung $j\colon E \to \{1, \dots, n-1\}$, $e \mapsto g(e)$. Diese ist injektiv, da g injektiv ist.
  [Im Fall $E = \{1, \dots, m\}$ gilt per Induktionsvoraussetzung $m \leq n-1$, also $m < n$ wie gewünscht.]

□

Satz 2.4.43. *Sei A eine endliche Menge. Dann gibt es genau eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $A \sim \{1, \dots, n\}$. Wir nennen diese Zahl die* ***Kardinalität*** *oder* ***Mächtigkeit*** *von A und notieren sie als $|A|$. Ist B eine unendliche Menge, so sagen wir, dass die Kardinalität von B unendlich ist und schreiben $|B| = \infty$.*[24]

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $f\colon A \to \{1, \dots, m\}$ und $g\colon A \to \{1, \dots, n\}$ Bijektionen. Dann sind die Umkehrabbildungen f^{-1} und g^{-1} bijektiv (Lemma 2.4.32). Die beiden Verknüpfungen

$$f \circ g^{-1}\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\},$$
$$g \circ f^{-1}\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$$

sind ebenfalls bijektiv (Lemma 2.4.34) und insbesondere injektiv. Nach Lemma 2.4.42 erhalten wir $n \leq m$ und $m \leq n$, also $m = n$. □

Satz 2.4.44. *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.*

Genauer: Jede Teilmenge E einer endlichen Menge F ist endlich und es gilt $|E| \leq |F|$ mit Gleichheit genau dann, wenn $E = F$ gilt.

Beweis. Sei E eine Teilmenge einer endlichen Menge F. Wir zeigen zuerst, dass E endlich ist. Sei $n := |F|$ und sei $f\colon F \to \{1, \dots, n\}$ eine Bijektion. Die Einschränkung $i := f|_E\colon E \to \{1, \dots, n\}$ ist injektiv.

Es genügt also zu zeigen: Ist E eine Menge und $i\colon E \to \{1, \dots, n\}$ eine Injektion, so ist E endlich.

Wir zeigen dies per Induktion über n.

Anfang: Für $n = 0$ ist dies trivial, da dann $E = \emptyset$ gilt.

Schritt: Sei $n \geq 1$ und sei die Aussage bereits für $n-1$ bekannt. Sei $i\colon E \to \{1, \dots, n\}$ eine Injektion. Nach Lemma 2.4.42 tritt genau einer der beiden Fälle ein:

- i ist bijektiv: Dann ist E nach Definition endlich.
- Es gibt eine Injektion $j\colon E \to \{1, \dots, n-1\}$: Dann ist E nach Induktionsvoraussetzung endlich.

Damit ist gezeigt, dass E endlich ist. Sei $m := |E|$ und sei $e\colon E \to \{1, \dots, m\}$ eine Bijektion.

Sei $j\colon E \to F$ die Inklusionsabbildung und betrachte die Abbildung

$$g := f \circ j \circ e^{-1}\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}.$$

Sie ist injektiv, da j injektiv ist und f und e^{-1} bijektiv sind. Nach Lemma 2.4.42 gilt $|E| = m \leq n = |F|$ mit Gleichheit genau dann, wenn g bijektiv ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass g genau dann bijektiv ist, wenn $E = F$ gilt.

Zunächst ist Bijektivität von g äquivalent zu Bijektivität von j: Ist j bijektiv, so auch $g = f \circ j \circ e^{-1}$ als Verknüpfung bijektiver Abbildungen. Ist g bijektiv, so auch $j = f^{-1} \circ g \circ e$ als Verknüpfung bijektiver Abbildungen.

Die Bijektivität von j ist aber offensichtlich äquivalent zu $E = F$. □

Ende der 6. Vorlesung am 24.10.2019.

Proposition 2.4.45. *Seien E und F endliche Mengen. Dann gelten:*

(a) Sind E und F disjunkt, so ist $E \dot\cup F$ endlich mit $|E \dot\cup F| = |E| + |F|$.[25]

[24] Eine andere gebräuchliche Notation für die Kardinalität einer Menge M ist $|M|$.

[25] Sind $E_1, \dots, E_n$ endliche Mengen mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, so ist $\dot\bigcup_{i=1}^n E_i$ endlich mit $|\dot\bigcup_{i=1}^n E_i| = \sum_{i=1}^n |E_i|$. Dies folgt leicht mit Induktion.

(b) Das Produkt $E \times F$ ist endlich mit $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.[26]
(c) Die Menge $\operatorname{Abb}(E, F)$ ist endlich mit $|\operatorname{Abb}(E, F)| = |F|^{|E|}$.
(d) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ ist endlich mit $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Beweis. (a) Setze $m := |E|$ und $n := |F|$. Seien $e\colon E \to \{1, \dots, m\}$ und $f\colon F \to \{1, \dots, n\}$ bijektive Abbildungen. Dann ist

$$E \dot\cup F \to \{1, \dots, m, m+1, \dots, m+n\},$$
$$x \mapsto \begin{cases} e(x) & \text{falls } x \in E, \\ m + f(x) & \text{falls } x \in F, \end{cases}$$

auf Grund der Disjunktheit von E und F wohldefiniert und offensichtlich bijektiv. Also gilt $|E \dot\cup F| = m + n = |E| + |F|$.

(b) Setze $m := |E|$. Wir führen Induktion über $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 0$ ist die Aussage klar wegen $E = \emptyset$. Sei $m \geq 1$ und gelte die Aussage für alle endlichen Mengen der Mächtigkeit $m - 1$. Sei $e \in E$ ein beliebiges Element und setze $E' := E \setminus \{e\}$. Wegen $E = E' \dot\cup \{e\}$ ist

$$E \times F = \big(E' \times F\big) \dot\cup \big(\{e\} \times F\big)$$

eine disjunkte Vereinigung. Aus (a) und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$|E \times F| = |E' \times F| + |\{e\} \times F| = |E'| \cdot |F| + |F| = (m-1)|F| + |F| = m|F| = |E| \cdot |F|.$$

(c) Dem Leser überlassen.
(d) Finde eine Bijektion $\mathcal{P}(E) \to \operatorname{Abb}(E, \{0, 1\})$ und verwende den vorigen Punkt.

□

Satz 2.4.46. *Die (abzählbare) Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich, in Formeln $|\mathbb{N}| = \infty$.*

Beweis. Sonst gibt es eine natürliche Zahl n und eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \{1, \dots, n\}$. Dann ist aber die Restriktion $f|_{\{1,\dots,n+1\}}\colon \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n\}$ injektiv, und Lemma 2.4.42 liefert den Widerspruch $n + 1 \leq n$. Also ist $\mathbb{N}$ unendlich. □

2.4.47. Man kann zeigen, dass Teilmengen abzählbarer Mengen höchstens abzählbar sind (siehe Satz 2.4.73). Es gibt aber echte Inklusionen zwischen abzählbaren Teilmengen, wie wir bereits gesehen haben: Die Menge der geraden Zahlen ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Proposition 2.4.48. *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar, in Formeln $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$.*

Beweis. Wir verwenden Cantors erstes Diagonalverfahren (vgl. [Wik19, Cantors erstes Diagonalargument]). Die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$(i, j) \mapsto \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$$

ist bijektiv (anschaulich ist das klar: schreibe an jeden Gitterpunkt $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ den Wert $f(i, j)$; dann ist klar, was die Umkehrabbildung ist: Sie „zählt“ nacheinander die Elemente auf den Antidiagonalen $\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i + j = \text{konstant}\}$ auf); der formale Beweis ist dem Leser als Übung überlassen. Somit gilt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. □

2.4.49. Sind A, B, C Mengen, so folgt aus $A \sim B$ sicherlich $A \times C \sim B \times C$. Aus $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$ folgert man so $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^3$ usw. und erhält, dass jedes endliche Produkt $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (mit beliebiger Klammerung) abzählbar ist. Es folgt, dass jedes endliche Produkt $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ abzählbarer Mengen abzählbar ist.

Aufgabe 2.4.50. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.
Hinweis: Verwende die naheliegende Surjektion $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$ und finde eine Teilmenge des Definitionsbereichs, die bijektiv auf $\mathbb{Q}$ geht. Wenn man sich $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ als Gitterpunkte in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ vorstellt, ist anschaulich klar, wie man die Elemente dieser Teilmenge abzählen kann; formal verwende man 2.4.47.
Bemerkung: Die Calkin-Wilf-Folge ist eine nette Abzählung der rationalen Zahlen, siehe [Wik19, Calkin-Wilf tree].

Aufgabe 2.4.51. Es gibt abzählbare Teilmengen $B_n \subset \mathbb{N}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung der Mengen B_n ist, in Formeln $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ (formal ist diese Notation bisher nur für endliche viele Teilmengen eingeführt).
Hinweis: Lies [Wik19, Hilberts Hotel] als Inspiration.

Satz 2.4.52 (Satz von Cantor)**.** *Sei A eine beliebige Menge. So existiert eine injektive Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$, aber keine surjektive Abbildung $\mathcal{P}(A) \to A$. Insbesondere sind A und $\mathcal{P}(A)$ nicht gleich mächtig, in Formeln $A \not\sim \mathcal{P}(A)$.*

2.4.53. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist also „strikt mächtiger“ als A.

Beweis.

(a) Die Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$, $x \mapsto \{x\}$, ist injektiv (denn die beiden Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben, wenn also $x = y$ gilt).

[26] Sind $E_1, \dots, E_n$ endliche Mengen, so ist $\prod_{i=1}^n E_i$ endlich mit $|\prod_{i=1}^n E_i| = \prod_{i=1}^n |E_i|$. Dies folgt leicht mit Induktion.

(b) Wir zeigen dies mit einem Widerspruchsbeweis mit Cantors zweitem Diagonalverfahren (siehe [Wik19, Cantors zweites Diagonalargument]). Wir nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ gibt. Betrachte die Teilmenge

$$M := \{x \in A \colon x \notin f(x)\}$$

von A. Es gilt also $M \in \mathcal{P}(A)$. Da f nach Annahme surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = M$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- $a \in M$: Nach Definition von M gilt dann $a \notin f(a) = M$ gilt. Widerspruch.
- $a \notin M$: Aus $a \notin M = f(a)$ erhalten wir nach Definition von M die Aussage $a \in f(a) = M$. Widerspruch.

Die Behauptung folgt. □

Korollar 2.4.54. *Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Nach dem Satz von Cantor 2.4.52 ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar. Zu zeigen bleibt, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht endlich ist. Sonst gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{1, \dots, n\}$. Da $i\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $x \mapsto \{x\}$, injektiv ist, ist $g := f \circ i\colon \mathbb{N} \to \{1, \dots, n\}$ injektiv. (Wir verwenden nun dasselbe Argument wie im Beweis von Satz 2.4.46.) Dann ist auch die Restriktion $g|_{\{1,\dots,n+1\}} \to \{1, \dots, n\}$ injektiv, und Lemma 2.4.42 liefert den Widerspruch $n + 1 \leq n$. Also ist $\mathbb{N}$ weder endlich noch abzählbar, also überabzählbar. □

2.4.55. Mit Cantors zweitem Diagonalverfahren kann man auch zeigen, dass die (aus der Schule bekannte) Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist, siehe [Wik19, Cantors zweites Diagonalargument].

2.4.56. Ein wichtiger Satz über die Mächtigkeiten zweier Mengen ist der Satz von Schröder-Bernstein, siehe [Wik19, Satz von Cantor-Bernstein-Schröder]: Sind A und B Mengen und gibt es eine Injektion $A \to B$ und eine Injektion $B \to A$, so gibt es eine Bijektion $A \to B$. Der Beweis ist elementar, siehe etwa [Hal76, Sch19].

Definition 2.4.57 (Relationen)**.** Seien A und B Mengen.

(a) Eine Teilmenge $R \subset A \times B$ heißt **Relation**. Statt $(x, y) \in R$ sagen wir auch, dass $R(x, y)$ gilt.

Im Folgenden betrachten wir nur Relationen $R \subset A \times A$, benötigen also nur eine Menge A.

(b) Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt
  (i) **reflexiv,** falls $R(x, x)$ für alle $x \in A$ gilt,
  (ii) **symmetrisch,** falls für alle $x, y \in A$ aus $R(x, y)$ auch $R(y, x)$ folgt,
  (iii) **antisymmetrisch,** falls für alle $x, y \in A$ aus $R(x, y)$ und $R(y, x)$ bereits $x = y$ folgt,
  (iv) **transitiv,** falls für alle $x, y, z \in A$ aus $R(x, y)$ und $R(y, z)$ auch $R(x, z)$ folgt,
  (v) **total** (oder **linear**), falls für alle $x, y \in A$ stets $R(x, y)$ oder $R(y, x)$ gilt.

(c) Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt
  (i) **Ordnung** (oder **Totalordnung** oder **totale Ordnung**) auf A, falls R reflexiv[27], transitiv, antisymmetrisch und total/linear ist.
  (ii) **Teilordnung** (oder **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**) auf A, falls R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Eine **geordnete Menge** (A, R) ist eine Menge A zusammen mit einer Ordnung R auf A. Eine **teilgeordnete Menge** (A, R) ist eine Menge A zusammen mit einer Teilordnung R auf A.

Oft verwendet man das Symbol $\leq$ für Ordnungen und Teilordnungen, man schreibt also $x \leq y$ statt $R(x, y)$. Gleichbedeutend schreibt man $y \geq x$. Die Schreibweise $x < y$ bedeutet $x \leq y$ und $x \neq y$. Gleichbedeutend schreibt man $y > x$.

Beispiel 2.4.58. Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, so ist ihr Graph $\operatorname{graph}(f) \subset A \times B$ eine Relation.

Beispiel 2.4.59. Auf der Menge A aller Menschen ist $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ mag } y\}$ eine Relation. Welche der obigen Eigenschaften hat sie? Betrachte analog Relationen wie „x ist Vorfahr von y“, „x und y sind weniger als 10 Meter voneinander entfernt“, „x und y sind mehr als 10 Meter voneinander entfernt“, „x und y sind verwandt“, „x und y sind verwandt vom Grad ≤ 3“, „x und y haben dieselbe Augenfarbe“, ...

2.4.60. Jede Ordnung ist eine Teilordnung. Teilordnungen kann man durch Hasse-Diagramme veranschaulichen [Wik19, Hasse-Diagramm].

Beispiele 2.4.61.

(a) Betrachte die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ und die Teilmenge

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

von $A \times A$. Dann ist R eine Ordnung auf A. Schreibe $x \leq y$ statt $R(x, y)$. Dann ist $\leq$ die übliche Relation „Kleiner-Gleich“.

(b) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ ist die übliche „Kleiner-Gleich-Relation“ $\leq$ eine Ordnung. Formal ist sie durch die Teilmenge

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y - x \in \mathbb{N}\}$$

definiert.

[27] Könnte man hier weglassen, da es aus total folgt.

(c) Auf der Menge $\mathbb{Q}$ ist die übliche „Kleiner-Gleich-Relation“ $\leq$ eine Ordnung. Formal ist sie durch die Teilmenge

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \colon m \cdot (y - x) \in \mathbb{N}\}$$

definiert.

(d) Betrachte die Menge $A = \{\text{A,B,C}, \ldots, \text{Z}\}$ der lateinischen Buchstaben. Die übliche alphabetische Ordnung „ist gleich oder kommt im Alphabet vor“ ist eine Ordnung auf A.

(e) Sei X eine Menge. Dann ist $\subset$ eine Teilordnung auf der Menge $\mathcal{P}(X)$ der Teilmengen von X. Formal ist sie durch

$$R = \{U, V \in \mathcal{P}(X) \mid U \subset V\}$$

definiert. Hat X mindestens zwei Elemente, so handelt es sich nicht um eine Ordnung: Seien x und y Elemente von X mit $x \neq y$. Dann sind die beiden Elemente $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(X)$ nicht *vergleichbar*: Es gilt weder $\{x\} \subset \{y\}$ noch $\{y\} \subset \{x\}$.

Aufgabe 2.4.62. Sei $(X, \leq)$ eine teilgeordnete Menge. Seien $x, y, z \in X$ mit $x < y \leq z$. Dann gilt $x < z$.

Lemma 2.4.63. *Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge und seien $x, y \in X$ beliebige Elemente. Dann gilt entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.*

Beweis. Da eine Ordnung total ist, gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Falls beide Ungleichungen gelten, so folgt aus der Antisymmetrie $x = y$. Gilt nur die Ungleichung $x \leq y$, so folgt $x < y$ (denn aus $x = y$ würde ja $y \leq x$ folgen). Gilt nur die Ungleichung $y \leq x$, so folgt analog $y < x$. □

Definition 2.4.64. Sei $(A, \leq)$ eine teilgeordnete Menge.

(a) Ein Element $g \in A$ heißt **größtes Element von** A, falls $a \leq g$ für alle $a \in A$ gilt.

In Formeln $\forall a \in A \colon a \leq g$.

(b) Ein Elemeng $g \in A$ heißt **maximales Element von** A, wenn für alle $a \in A$ aus $g \leq a$ bereits $g = a$ folgt, wenn es also in anderen Worten kein Element $a \in A$ mit $g < a$ gibt.

In Formeln $\forall a \in A \colon (g \leq a \implies g = a)$ oder gleichwertig $\forall a \in A \colon \neg(g < a)$ oder gleichwertig $\neg(\exists a \in A \colon g < a)$. Man beachte, dass in einer teilgeordneten Menge $\neg(g < a)$ nicht gleichwertig zu $g \geq a$ ist; in einer geordneten Menge ist dies der Fall, siehe Lemma 2.4.63, weswegen in einer solchen die Begriffe *maximales Element* und *größtes Element* zusammenfallen.

Analog werden **kleinste** und **minimale** Elemente definiert.

2.4.65. Jedes größte Element ist ein maximales Element. Hat eine teilgeordnete Menge ein größtes Element, so ist dieses eindeutig. In einer geordneten Menge ist jedes maximale Element auch ein größtes Element.

Jedes kleinste Element ist minimal. Existiert eine kleinstes Element, so ist dieses eindeutig. In einer geordneten Menge ist jedes minimale Element auch ein kleinstes Element.

Definition 2.4.66. Sei $(A, \leq)$ eine teilgeordnete Menge und $B \subset A$ eine Teilmenge.

(a) Ein Element $o \in A$ heißt **obere Schranke von** B **in** A, wenn $b \leq o$ für alle $b \in B$ gilt.

(b) B heißt nach **oben beschränkt in** A, wenn B eine obere Schranke in A hat.

(c) Ein Element $s \in A$ heißt die **kleinste obere Schranke** oder das **Supremum von** B **in** A, wenn s das kleinste Element der Menge $\{o \in A \mid o \text{ ist obere Schranke von } B\}$ ist. Mit anderen Worten muss s also eine obere Schranke von B in A sein und $\leq$ als jede andere obere Schranke von B in A.

Analog sind **untere Schranken**, **größte untere Schranken** oder **Infima** und die Eigenschaft, **nach unten beschränkt** zu sein, definiert. Wir nennen B **beschränkt in** A, wenn B nach oben und unten beschränkt ist in A.

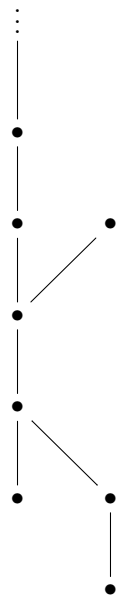
2.4.67. Supremum bzw. Infimum sind eindeutig bestimmt, falls sie existieren (denn sie sind nach 2.4.65 kleinste bzw. größte Elemente geeigneter Mengen). In diesem Fall werden sie als $\sup B$ bzw. $\inf B$ notiert. Genauer kann man $\sup^A B$ bzw. $\inf^A B$ schreiben, wenn die Obermenge aus dem Kontext nicht klar sein sollte.

2.4.68. Sei B eine Teilmenge einer geordneten Menge $(A, \leq)$. Hat B ein größtes/kleinstes Element, so ist dieses das Supremum/Infimum von B in A.

Beispiele 2.4.69. (a) (mit Schulwissen) Die Menge $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ hat $1 = \frac{1}{1}$ als größtes (und damit maximales) Element. Sie hat kein kleinstes oder minmales Element.

Die Menge B besitzt in $\mathbb{Q}$ eine größte untere Schranke, nämlich die Null, in Formeln $\inf B = 0$ (formal wird dies erst aus Korollar 2.5.8.(b) folgen). Sie besitzt auch eine kleinste obere Schranke, nämlich die Eins, in Formeln $\sup B = 1$. Sie besitzt viele obere und untere Schranken in $\mathbb{Q}$.

(b) Das folgende Bild stellt eine teilgeordnete Menge mit zwei minimalen und einem maximalen Element dar, die weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzt. Punkte • stehen für Elemente der Menge; für Elemente a und b gilt $a \leq b$ genau dann, wenn es einen „aufsteigenden Weg“ von a nach b gibt. Größere Elemente stehen also weiter oben.



Lemma 2.4.70. *Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge (der Leser möge etwa an $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ denken). Dann hat jede endliche nichtleere Teilmenge E von X ein größtes und ein kleinstes Element (hier trägt E die von X induzierte Ordnung).*

2.4.71. Gegeben endliche viele Elemente $x_1, \ldots, x_n$ einer geordneten Menge notieren wir das größte bzw. kleinste Element der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ als

$$\max(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{bzw.} \qquad \min(x_1, \ldots, x_n).$$

Dies ist nach Lemma 2.4.70 wohldefiniert.

Beweis. Wir zeigen die Existenz eines größten Elements per vollständiger Induktion über die Kardinalität $n := |E| \geq 1$.

Anfang: Der Fall $n = |E| = 1$ ist klar, denn E besteht aus genau einem Element.

Schritt: Sei $n = |E| \geq 2$ und sei die Aussage für alle endlichen Mengen F mit Kardinalität $|F| = n - 1$ bekannt. Sei $a\colon \{1, \ldots, n\} \to E$ eine bijektive Abbildung. Betrachte die Menge $F = \{a(1), \ldots, a(n-1)\}$. Wegen $|F| = n - 1$ hat F nach Induktionsvoraussetzung ein größtes Element g. Im Fall $g \geq a(n)$ ist g auch ein größtes Element von $E = \{a(1), \ldots, a(n)\}$. Sonst gilt $g < a(n)$, und dann ist $a(n)$ ein größtes Element von E (wegen Transitivität).

Der Beweis für die Existenz eines kleinsten Elements geht analog. □

Lemma 2.4.72. *Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind wohlgeordnet*[28]*, d. h. jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ mit $M \neq \emptyset$ besitzt ein kleinstes Element.*

Beweis. Wegen $M \neq \emptyset$ gibt es ein Element $m \in M$. Definiere $E := M \cap \{n \in \mathbb{N}\colon n \leq m\}$. Dann ist E als Teilmenge der endlichen Menge $\{0, 1, \ldots, m\}$ endlich (Satz 2.4.44). Nach Lemma 2.4.70 hat E ein kleinstes Element $k \in E$, es gilt also $k \leq e$ für alle $e \in E$, also für alle Elemente $n \in M$ mit $n \leq m$. Ist $n \in M$ ein Element mit $n > m$, so gilt $k \leq m < n$ und wegen Transitivität $k \leq n$. Also ist k das kleinste Element von M. □

Satz 2.4.73. *Teilmengen höchstens abzählbarer Mengen sind höchstens abzählbar.*

Beweis. Nach Satz 2.4.44 genügt es zu zeigen, dass jede Teilmenge E von $\mathbb{N}$ entweder endlich oder abzählbar ist. Falls E nicht leer ist, sei a_0 das kleinste Element von E (welches nach Lemma 2.4.72 existiert). Falls $E \setminus \{a_0\}$ nicht leer ist, sei a_1 das kleinste Element von $E \setminus \{a_0\}$. Falls $E \setminus \{a_0, a_1\}$ nicht leer ist, sei a_2 das kleinste Element von $E \setminus \{a_0, a_1\}$, etc. Entweder stoppt dieses Verfahren beim m-ten Schritt und $\{1, \ldots, m\} \to E$, $n \mapsto a_n$, ist bijektiv, oder $\mathbb{N} \to E$, $n \mapsto a_n$, ist bijektiv: Injektivität ist klar; zur Surjektivität: Falls $x \in E$ nicht im Bild ist, so ist $\mathbb{N} \to \{1, \ldots, x-1\}$, $n \mapsto a_n$, wohldefiniert und injektiv, was nach dem Beweis von Satz 2.4.46 nicht möglich ist. □

Definition 2.4.74. Eine Relation R auf einer Menge A heißt **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (vgl. Definition 2.4.57).

Definition 2.4.75. Sei $R \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Für $x \in A$ heißt die Teilmenge

$$[x] := \{y \in A\colon R(x, y)\}$$

die **Äquivalenzklasse von x bezüglich** R (es gilt $x \in [x]$). Eine Teilmenge $K \subset A$ heißt **Äquivalenzklasse bezüglich** R, wenn es ein $x \in A$ mit $K = [x]$ gibt (in diesem Fall gilt $K = [y]$ für jedes $y \in K$). Jedes Element einer Äquivalenzklasse K heißt **Repräsentant** von K. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird als

$$A/R := \{[x]\colon x \in A\}$$

[28] Allgemein heißt eine geordnete Menge **wohlgeordnet**, wenn jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

bezeichnet. Formal ist A/R eine Teilmenge von $\mathcal{P}(A)$.

2.4.76. Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, so sind für beliebige Elemente $x, y \in A$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- $R(x, y)$,
- $[x] = [y]$,
- $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Dies zeigt, dass zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt sind. Da $x \in [x]$ für jedes $x \in A$ gilt, ist A die disjunkte Vereinigung seiner Äquivalenzklassen.

2.4.77. Bei einer Äquivalenzrelation R schreibt man meist $x \sim y$ statt $R(x, y)$. Entsprechend schreibt man $A/\sim$ statt A/R.

Beispiel 2.4.78. Die Relation „wohnt in der gleichen Stadt“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Menschen, die in genau einer Stadt leben. Die Äquivalenzklassen bestehen jeweils aus allen Bürgern von Paderborn, Magdeburg, ...

Beispiel 2.4.79. Betrachte die Menge W der „Wörter“ der Länge drei in den Buchstaben a,b,c, d. h.

$$\begin{aligned} A = \{&aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc,\\ &baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc,\\ &caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc\}. \end{aligned}$$

Wir sagen, dass ein Wort durch einmaliges zyklisches Vertauschen aus einem anderen entsteht, wenn das eine Wort aus dem anderen durch Verschieben des Anfangsbuchstaben ans Ende hervorgeht: Beispielsweise entsteht „insel“ aus „linse“ durch einmaliges zyklisches Vertauschen. Definiere

$$R := \{(v, w) \in W \times W \mid w \text{ entsteht aus } v \text{ durch mehrfaches zyklisches Vertauschen}\}.$$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation auf W, und es gilt

$$\begin{aligned} W/R = \{&\{aaa\}, \{bbb\}, \{ccc\},\\ &\{aab, aba, baa\}, \{aac, aca, caa\}, \{abb, bba, bab\}, \{acc, cca, cac\}, \{bbc, bcb, cbb\}, \{bcc, ccb, cbc\},\\ &\{abc, bca, cab\}, \{acb, cba, bac\}\}. \end{aligned}$$

Beispiele 2.4.80.

(i) Auf der Menge $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch die Festlegung, dass $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann gilt, falls $ad = bc$ richtig ist. (Der Leser prüfe, dass dies „wohldefiniert“ ist, also wirklich eine Äquivalenzrelation auf A definiert.) Die rationalen Zahlen werden formal als Menge

$$\mathbb{Q} := A/\sim$$

der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation definiert. Man schreibt die Äquivalenzklasse von (a, b) in der Regel als Bruch, d. h. man definiert $\frac{a}{b} := [(a, b)]$. Wer mag, kann sich nun überlegen, dass die in der Schule definierte Addition und Multiplikation wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl von Repräsentanten abhängt.

(ii) Wir verwenden Schulwissen. Sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch:

$$a \sim b :\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon a - b = kn.$$

Die Äquivalenzklassen bestehen dann gerade aus den ganzen Zahlen, die bei Division durch n denselben Rest lassen. Statt $\mathbb{Z}/\sim$ schreibt man hier meist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Statt $a \sim b$ schreibt man hier oft $a \equiv b \bmod n$.

2.4.81. Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, so ist die Abbildung $A \to A/R$, $a \mapsto [a]$, surjektiv, und ihre Fasern sind genau die Äquivalenzklassen bezüglich R.

Beispiel 2.4.82. Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, so definiert „werden unter f auf dasselbe Element abgebildet“, in Formeln

$$R := \{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\},$$

eine Äquivalenzrelation R auf A. Die Äquivalenzklassen sind genau die Fasern von f, also die Mengen der Form $f^{-1}(b)$, für $b \in B$.

Definition 2.4.83. Eine **Verknüpfung $*$ auf einer Menge** X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} *\colon X \times X &\to X,\\ (x, y) &\mapsto x * y. \end{aligned}$$

Wie angedeutet, schreibt man bei Verknüpfungen oft $x * y$ für den Wert von $*$ an der Stelle (x, y) und nicht $*(x, y)$ wie sonst bei Abbildungen (vgl. Präfix-, Infix-, Postfixnotation, umgekehrte polnische Notation, etwa auf [Wik19, Infixnotation]).

2.4.84. Das Wort Verknüpfung hat nun zwei Bedeutungen: Verknüpfung von Abbildungen und Verknüpfung auf einer Menge.

Beispiele 2.4.85. (a) Die Addition von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z},\\ (m, n) &\mapsto m + n. \end{aligned}$$

(b) Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z},\\ (m, n) &\mapsto m \cdot n = mn. \end{aligned}$$

(c) Addition bzw. Multiplikation sind auch Verknüpfungen auf $\mathbb{N}$, auf $\mathbb{Q}$ und auf $\mathbb{R}$, wie aus der Schule bekannt.

(d) Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge (der Leser denke an $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$). Dann sind „bilde das Minimum“ und „bilde das Maximum“

$$\begin{aligned} \min\colon X \times X &\to X, \\ (x, y) &\mapsto \min(x, ny), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max\colon X \times X &\to X, \\ (x, y) &\mapsto \max(x, y), \end{aligned}$$

zwei Verknüpfungen auf der Menge X (vgl. 2.4.71).

(e) Die Subtraktion von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} -\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ (m, n) &\mapsto m - n. \end{aligned}$$

(f) Division $(x, y) \mapsto xy^{-1} = x/y = \frac{x}{y}$ ist eine Verknüpfung auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (aber nicht auf $\mathbb{Q}$).

(g) Sei X eine Menge. Wir erinnern daran, dass $\mathrm{Abb}(X, X)$ die Menge der Abbildungen von X nach X bezeichnet. Auf dieser Menge definiert die Verknüpfung von Abbildungen eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Abb}(X, X) \times \mathrm{Abb}(X, X) &\to \mathrm{Abb}(X, X), \\ (g, f) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

(h) Die logischen Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$ sind Verknüpfungen auf der Menge aller Aussagen. Man kann sie auch als Verknüpfungen auf der Menge $\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ aufgefassen.

(i) Es gibt viele uninteressante Verknüpfungen, etwa die Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedes Paar (m, n) auf 42 abbildet.

Beispiele 2.4.86. Die Verknüpfungstafeln der Verknüpfungen $\wedge$ und $\implies$ auf $\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ sehen so aus:

$\wedge$	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

$\implies$	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch
falsch	wahr	wahr

Wir verwenden hier die Konvention, dass in der linken Spalte die Werte des ersten Arguments p stehen, in der obersten Zeile die Werte des zweiten Arguments q, und an der entsprechenden Stelle in der Tabelle der Wert der Verknüpfung $p \wedge q$ bzw. $p \implies q$.

Bei Verknüpfungen auf unendlichen Mengen kann man nur endliche Teile der Verknüpfungstafeln aufschreiben, beispielsweise für Multiplikation $\cdot$ bzw. Subtraktion $-$ auf $\mathbb{Z}$:

$\cdot$	...	-1	0	1	2	...
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
-1	...	1	0	-1	-2	...
0	...	0	0	0	0	...
1	...	-1	0	1	2	...
2	...	-2	0	2	4	...
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$-$	...	-1	0	1	2	...
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
-1	...	0	-1	-2	-3	...
0	...	1	0	-1	-2	...
1	...	2	1	0	-1	...
2	...	3	2	1	0	...
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2.4.87. Sei X eine Menge mit einer Verknüpfung $*$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung** $*$, wenn $u * v \in U$ für alle $u, v \in U$ gilt. Dann liefert $*$ eine Verknüpfung auf U per $U \times U \to U$, $(u, v) \mapsto u * v$.

Zum Beispiel ist $\mathbb{N}$ abgeschlossen unter der Addition auf $\mathbb{Z}$. Ebenso ist $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ abgeschlossen unter der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$. Die Teilmenge $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist nicht abgeschlossen unter der Verknüpfung Division $(x, y) \mapsto x/y$ auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Definition 2.4.88. Eine Verknüpfung $*$ auf einer Menge X heißt

- **assoziativ**, wenn $\forall x, y, z \in X\colon x * (y * z) = (x * y) * z$,
- **kommutativ**, wenn $\forall x, y \in X\colon x * y = y * x$.

Man sagt, dass zwei Elemente $x, y \in X$ **kommutieren**, falls $x * y = y * x$ gilt.

2.4.89. Das Symbol $+$ ist ausschließlich für kommutative Verknüpfungen zu verwenden.

Beispiele 2.4.90. In Beispiele 2.4.85 sind alle Additionen und Multiplikationen assoziativ und kommutativ, ebenso das Minimum, $\wedge$ und $\vee$. Subtraktion, Division und $\implies$ sind weder assoziativ noch kommutativ (beispielsweise gelten $0-(0-1) \neq (0-0)-1$ und $0 - 1 \neq 1 - 0$ und (falsch $\implies$ ($p \implies$ falsch)) = wahr $\neq$ falsch = ((falsch $\implies p$) $\implies$ falsch)).

Sei X eine Menge. Die Verknüpfung $\circ$ auf $\mathrm{Abb}(X, X)$ ist assoziativ nach Lemma 2.4.30, aber im Allgemeinen nicht kommutativ: siehe etwa Beispiel 2.4.29 für ein Gegenbeispiel. Genauer ist $\circ$ auf $\mathrm{Abb}(X, X)$ genau dann kommutativ, wenn X aus maximal einem Element besteht.

Beispiele 2.4.91. Male „Baumdiagramme“, um die Assoziativität zu veranschaulichen.

2.4.92. Sei $*$ eine assoziative Verknüpfung auf einer Menge X. Wir wollen zeigen, dass der Ausdruck $x_1 * x_2 * \cdots * x_n$ in dem Sinne sinnvoll ist, dass bei jeder möglichen Klammerung dasselbe Resultat herauskommt (hier ist $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und $x_1, \ldots, x_n \in X$ sind Elemente von X). Um dies zu formalisieren, definieren wir die „von hinten geklammerte“ Interpretation[29]

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n := x_1 * (x_2 * (\ldots (x_{n-2} * (x_{n-1} * x_n)) \ldots))$$

und zeigen das folgende Lemma 2.4.93.

Lemma 2.4.93. *Sei X eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$. Seien $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in X$ gegeben (für natürliche Zahlen $m \geq 1$ und $n \geq 1$). Dann gilt mit der von hinten geklammerten Interpretation ungeklammerter Ausdrücke*

$$(x_1 * \cdots * x_m) * (y_1 * \cdots * y_n) = x_1 * \cdots * x_m * y_1 * \ldots y_n.$$

[29] die Punkte rechts stehen schlicht für die richtige Anzahl sich schließender Klammern.

Beweis. Sei $n \geq 1$ beliebig fixiert. Wir führen Induktion über m. Im Fall $m = 1$ ist die Aussage klar, der Induktionsanfang ist also korrekt. Sei nun $m \geq 2$ und gelte die Aussage des Lemmas für $m - 1$ (Induktionsannahme). Nach Definition unserer Interpretation ungeklammerter Ausdrücke (für die erste Gleichheit) und nach Assoziativität von $*$ (für die zweite Gleichheit) gilt

$$\begin{aligned}(x_1 * \cdots * x_m) * (y_1 * \cdots * y_n) &= (x_1 * (x_2 \cdots * x_m)) * (y_1 * \cdots * y_n) \\ &= x_1 * ((x_2 \cdots * x_m) * (y_1 * \cdots * y_n)).\end{aligned}$$

Per Induktionsannahme gilt

$$(x_2 * \cdots * x_m) * (y_1 * \cdots * y_n) = x_2 * \cdots * x_m * y_1 * \cdots * y_n.$$

Setzen wir dies oben ein, ergibt sich die Behauptung. □

2.4.94. Bei assoziativen Verknüpfungen auf Mengen werden wir in Zukunft auf das Setzen von Klammern verzichten. Dies ist nach 2.4.94 und Lemma 2.4.93 gerechtfertigt.

2.4.95. Implizit haben wir bei der Definition der Σ- und Π-Notation für Summen und Produkte (siehe 1.1.7 und 1.2.1) Assoziativität der Addition bzw. Multiplikation verwendet.

2.4.96. Ist eine Verknüpfung $*$ auf einer Menge X assoziativ und kommutativ, so kommt es in einem Ausdruck $x_1 * x_2 * \cdots * x_{n-1} * x_n$ nicht auf die Reihenfolge der verknüpften Elemente an, es gilt also

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_n = x_{\sigma(1)} * x_{\sigma(2)} * \cdots * x_{\sigma(n)}$$

für jede bijektive Abbildung (alias Umnummerierung) $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir verzichten auf den (einfachen) Beweis dieser Aussage. Der Leser mag sich kleine Beispiele überlegen, etwa $a*b*c*d = d*b*c*a$.

Ende der 7. Vorlesung am 28.10.2019.

Definition 2.4.97. Sei X eine Menge mit einer Verknüpfung $*$. Ein Element $e \in X$ heißt **neutrales** Element, wenn $e * x = x * e = x$ für alle $x \in X$ gilt.

2.4.98. Es kann höchstens ein neutrales Element geben: Seien e und e' neutrale Elemente. Dann gilt $e = e' * e = e'$. Man spricht deshalb von *dem* neutralen Element (wenn es existiert).

Beispiele 2.4.99.

(a) Das neutrale Element von $(\mathbb{N}, +)$ (= der Menge der natürlichen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung) ist 0.
(b) Das neutrale Element von $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ ist 0.
(c) Das neutrale Element von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist 1. Analoges gilt für $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der Multiplikation.
(d) Das neutrale Element von $(\mathrm{Abb}(X), \circ)$ ist die Identität id_X von X.
(e) Es gibt kein neutrales Element für $(\mathbb{N}, \min)$.
(f) Das neutrale Element von $\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ bezüglich $\wedge$ ist wahr, das bezüglich $\vee$ ist falsch.

Definition 2.4.100. Eine **Gruppe** $(G, *)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ;
(b) G hat ein neutrales Element[30], dass wir mit e oder e_G bezeichnen (es ist eindeutig nach 2.4.98);
(c) Für jedes Element $g \in G$ gibt es ein Element $h \in G$ mit $g * h = e = h * g$;
(Gegeben $g \in G$ gibt es genau ein Element $h \in G$ mit $g * h = e = h * g$ (siehe 2.4.103); dieses Element wird das **Inverse** von g oder das zu g **inverse** Element genannt und als g^{-1} notiert.)

Eine Gruppe G heißt **abelsch** oder **kommutativ**, wenn $*$ eine kommutative Verknüpfung ist, wenn also $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$ gilt.

2.4.101. Oft nennt man den Ausdruck $g * h$ das **Produkt** der **Faktoren** g und h; deswegen nennt man $*$ bisweilen **Multiplikation**. Dies ist besonders verbreitet, wenn man das Symbol $\cdot$ statt $*$ verwendet.

2.4.102. Die Verknüpfung einer abelschen Gruppe A wird sehr oft als $+$ notiert. Man schreibt dann in sogenannter **additiver** Schreibweise

- $0 = 0_A$ (statt e_A) für das neutrale Element, welches **Nullelement** genannt wird,
- $-a$ (statt a^{-1}) für das Inverse eines Elements $a \in A$, das **additive Inverse** von a, und definiert
- $a - b := a + (-b)$ für beliebige $a, b \in A$.

Entsprechend nennt man $a + b$ die **Summe** der **Summanden** a und b und bezeichnet $+$ als **Addition**. Es gilt also $a - a = a + (-a) = 0_A = (-a) + a$.

[30] Insbesondere ist G nicht die leere Menge.

2.4.103 (Eindeutigkeit von Inversen)**.** Sei G eine Menge mit assoziativer Verknüpfung $*$ und neutralem Element e. Sei $g \in G$ und seien $h, h \in G$ mit $g * h = e = h * g$ und $g * h' = e = h' * g$. Dann folgt $h = h * e = h * (g * h') = (h * g) * h' = e * h' = h'$.

Beispiele 2.4.104.

(a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen, das Inverse von x ist $-x$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Verknüpfung „komponentenweise Addition“

$$+ \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$(x, y) = ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

macht $\mathbb{R}^n$ zu einer abelschen Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$. Das neutrale Elements ist $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

(c) Sind $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ Gruppen, so auch $G \times H$ mit Verknüpfung $(g, h) *_{G \times H} (g', h') = (g *_G g', h *_H h')$. Das vorige Beispiel $(\mathbb{R}^n, +)$ ist ein iterierter Spezialfall dieser Aussage.

(d) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, beispielsweise hat 1 kein Inverses.

(e) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen, das Inverse von x ist x^{-1}.

(f) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist keine Gruppe.

(g) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ sind keine Gruppen.

(h) Ist X eine Menge, so ist

$$\{f \in \mathrm{Abb}(X, X) \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

mit der Komposition $\circ$ eine Gruppe. Das Inverse von f ist die Umkehrabbildung f^{-1} (siehe Lemma 2.4.32; die dortige Notation ist kompatibel mit der Notation für das Inverse eines Gruppenelements). Das neutrale Element ist id_X. Falls X mindestens zwei Elemente hat, ist diese Gruppe nicht abelsch.

Lemma 2.4.105. *Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann gelten*

(a) $(g^{-1})^{-1} = g$ für alle $g \in G$,

(b) (Inverses eines Produkts) $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ für alle $g, h \in G$,

(c) (Kürzen) $g * h = g * k$ impliziert $h = k$, für alle $g, h, k \in G$,

(d) (Kürzen) $h * g = k * g$ impliziert $h = k$, für alle $g, h, k \in G$.

Beweis. Die Gleichungen $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ sagen nicht nur, dass g^{-1} inverse zu g ist, sondern auch, dass g invers zu g^{-1} ist. Wegen der Eindeutigkeit von Inversen folgt die erste Formel. Wegen

$$\begin{aligned}(h^{-1} * g^{-1}) * (g * h) &= h^{-1} * (g^{-1} * g) * h = h^{-1} * e * h = h^{-1} * h = e \\ &= g * g^{-1} = g * e * g^{-1} = g * (h * h^{-1}) g h^{-1} = (g * h) * (h^{-1} * g^{-1})\end{aligned}$$

ist $h^{-1} * g^{-1}$ das Inverse von $g * h$, die zweite Formel gilt also. „Multipliziert“ man $g * h = g * k$ von links mit g^{-1}, so erhält man $g^{-1} * g * h = g^{-1} * g * k$, also $h = e * h = g^{-1} * g * h = g^{-1} * g * k = e * h = k$. Dies zeigt die dritte Behauptung, und die vierte folgt analog durch Rechtsmultiplikation mit g^{-1}. □

2.4.106. In einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe $(A, +)$ sehen die Erkenntnisse aus Lemma 2.4.105 für beliebige $a, b, c \in A$ so aus: $-(-a) = a$, $-(a+b) = (-b)+(-a) = -b-a = -a-b$ (wegen Kommutativität), (Kürzen) aus $a + b = a + c$ folgt $b = c$. (Kürzen von der anderen Seite ist wegen der Kommutativität der Gruppe nicht extra angegeben.)

2.4.107. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$g^n := \begin{cases} g * g * \cdots * g & \text{falls } n > 0 \qquad (n \text{ Faktoren}), \\ e_G & \text{falls } n = 0, \\ g^{-1} * g^{-1} * \cdots * g^{-1} & \text{falls } n < 0 \qquad (-n \text{ Faktoren}). \end{cases}$$

Man beachte, dass wir auf Grund der Assoziativität keine Klammern setzen müssen. Wer ganz genau ist, kann auch g^{*n} statt g^n schreiben. Beachte, dass dies für $n = -1$ kompatibel mit der Notation g^{-1} für das Inverse ist.

Lemma 2.4.108 (Potenzregeln)**.** *Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann gelten*

$$g^{m+n} = g^m * g^n,$$
$$(g^m)^n = g^{mn}$$

für alle $g \in G$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$. Ist G abelsch, so gilt

$$(gh)^m = g^m * h^m$$

für alle $g, h \in G$ und $m \in \mathbb{Z}$,

Beispiele 2.4.109. Es gelten $g^3 * g^{-5} = g * g * g * g^{-1} * g^{-1} * g^{-1} * g^{-1} * g^{-1} = g^2$ und $(g^{-2})^3 = (g^{-1} * g^{-1}) * (g^{-1} * g^{-1}) * (g^{-1} * g^{-1}) = g^{-6}$.

Beweis. Für die ersten beiden Formeln behandle man die vier Fälle ($m \geq 0$ und $n \geq 0$; $m < 0$ und $n < 0$; $m < 0$ und $n \geq 0$; $m \geq 0$ und $n < 0$) nacheinander, die alle ziemlich offensichtlich sind (man mag den zweiten Fall mit $g^a = (g^{-1})^{-a}$ auf den ersten zurückführen) (Der formale Beweis mit vollständiger Induktion ist dem skeptischen Leser überlassen.) Die letzte Formel ist klar. □

2.4.110. Ist $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, so schreiben wir meist na statt a^n: Für $a \in A$ und $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir also

$$na := \begin{cases} a + a \cdots + a & \text{falls } n > 0 \qquad (n \text{ Summanden}), \\ 0_A & \text{falls } n = 0, \\ (-a) + (-a) + \cdots + (-a) & \text{falls } n < 0 \qquad (-n \text{ Summanden}). \end{cases}$$

2.4.111. In einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe $(A, +)$ sehen die Potenzregeln aus Lemma 2.4.108 für beliebige $a, b \in A$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ so aus: $(m + n)a = ma + na$, $n(ma) = (mn)a$, $m(a + b) = ma + mb$.

2.4.112. Ist $(G, *)$ nur eine Menge mit assoziativer Verknüpfung, so definieren wir $g^n = g * \cdots * g$ (mit n Faktoren) für alle $g \in G$ und alle positiven natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Ist ein neutrales Element e vorhanden, so definieren wir $g^0 = e$.

Ist $(A, +)$ nur eine Menge mit assoziativer kommutativer Verknüpfung, so definieren wir $na = a + \cdots + g$ (mit n Summanden) für alle $a \in A$ und alle positiven natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Ist ein neutrales Element 0 vorhanden, so definieren wir $0a = 0$.

Die obigen Potenzregeln gelten analog, sofern alle Exponenten ≥ 1 bzw. ≥ 0 sind.

Definition 2.4.113. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K zusammen mit zwei kommutativen, assoziativen Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon K \times K \to K, \qquad & (x, y) \mapsto x + y, \qquad && \text{genannt } \textbf{Addition}, \\ \cdot\colon K \times K \to K, \qquad & (x, y) \mapsto x \cdot y, \qquad && \text{genannt } \textbf{Multiplikation}, \end{aligned}$$

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(K1) $(K, +)$ ist eine (abelsche) Gruppe, die **additive Gruppe** des Körpers; ihr Nullelement wird wie üblich als $0 = 0_K$ notiert;

(K2) Die Menge $K \setminus \{0\}$ ist unter Multipliation abgeschlossen, d. h. $\forall x, y \in K \setminus \{0\}$ gilt $x \cdot y \in K \setminus \{0\}$, und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine (abelsche) Gruppe, die **multiplikative Gruppe** des Körpers;

(K3) (Verträglichkeit von Addition und Multiplikation) Für alle $x, y, z \in K$ gilt das **Distributivgesetz**

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

2.4.114. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Wir verwenden die Regel „Punkt-vor-Strich“, um weniger Klammern setzen zu müssen. Außerdem lassen wir meist den „Mal-Punkt“ weg und schreiben xy statt $x \cdot y$. Das Distributivgesetz nimmt dann die Form

$$x(y + c) = xy + xz$$

an. Wir notieren das Einselement der multiplikativen Gruppe $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ als $1 = 1_K$. Es gilt $0_K \neq 1_K$, denn 1 ist ein Element von $K \setminus \{0\}$.

2.4.115. Für $x \in K$ wird das additive Inverse (= das Inverse in der additiven Gruppe $(K, +)$) wie üblich als $-x$ geschrieben. Für $x \in K \setminus \{0\}$ wird das **multiplikative Inverse** (= das Inverse in der multiplikativen Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$) als x^{-1} geschrieben.

Beispiele 2.4.116.

(a) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper, er heißt der Körper der rationalen Zahlen; (mit Schulwissen:) ebenso ist $\mathbb{R}$ ein Körper, genannt der Körper der reellen Zahlen.

(b) $\mathbb{Z}$ zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation ist kein Körper: Die einzige Forderung, die nicht erfüllt ist, ist die Existenz multiplikativer Inverse: Beispielsweise hat 2 kein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}$.

(c) Für Informatiker besonders wichtig: Die Menge $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ mit den wie folgt gegebenen Verknüpfungen Addition und Multiplikation

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ist ein Körper (der Leser prüfe dies; bis auf $1+1=0$ sind alle Werte in den Tabellen die naheliegenden, vgl. Lemma 2.4.121). Der Name $\mathbb{F}_2$ kommt daher, dass es sich um einen Körper (englisch *field*) mit genau 2 Elementen handelt. Man nennt $\mathbb{F}_2$ den Körper mit zwei Elementen. Es gelten $-1=1$ und $1^{-1}=1$.

2.4.117. Die ganzen Zahlen sind in den Körpern $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ enthalten. Für beliebige Körper ist dies falsch, wie man am Beispiel $\mathbb{F}_2$ sieht, der ja nur aus zwei Elementen besteht.

Aufgabe 2.4.118. Zeigen Sie, dass es auf der dreielementigen Menge $\mathbb{F}_3=\{0,1,2\}$ genau eine Addition und genau eine Multiplikation gibt, die diese Menge zu einem Körper machen, so dass 0 das neutrale Element bezüglich der Addition ist und 1 das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

Warnung: Es gibt keinen Körper mit sechs Elementen: Es gibt keine Körperstruktur[31] auf der sechselementigen Menge $\{0,1,a,b,c,d\}$ mit 0 als Nullelement und 1 als Einselement, vgl. Ausblick 2.4.119.

Ausblick 2.4.119. In der Algebra-Vorlesung wird bewiesen: Jeder endliche Körper (:= Körper mit nur endlich vielen Elementen) besteht aus genau p^n Elementen, für eine geeignete Primzahl p und eine geeignete natürliche Zahl $n\geq 1$ (sowohl p als auch n sind eindeutig bestimmt). Umgekehrt gibt es für jede solche Primzahlpotenz p^n im Wesentlichen (= bis auf Umbenennung der Elemente) genau einen Körper mit p^n Elementen. Dieser wird $\mathbb{F}_{p^n}$ notiert. Körper dieser Art spielen in der Verschlüsselungstheorie eine wichtige Rolle, siehe etwa [Wik19, Elliptic Curve Cryptography].

2.4.120. Für Elemente $a\in K$ und $b\in K\setminus\{0\}$ eines Körpers K verwendet man die abkürzenden Schreibweisen

$$\frac{1}{b}:=b^{-1},\quad \text{und}\quad \frac{a}{b}:=a/b:=ab^{-1}.$$

Lemma 2.4.121 (Folgerungen aus den Körperaxiomen)**.** *In jedem Körper K gelten die folgenden Formeln:*

(a) $a0_K=0_K$ *für alle* $a\in K$ *(und insbesondere* $1_K0_K=0_K$*);*
(b) $1_Ka=a$ *für alle* $a\in K$*;*
(c) $ab=0_K \implies (a=0_K$ *oder* $b=0_K)$ *für alle* $a,b\in K$*;*
(d) $-a=(-1_K)a$ *für alle* $a\in K$*;*
(e) $(-1_K)(-1_K)=1_K$ *(oder äquivalent* $(-1_K)^{-1}=-1_K$*; „Minus mal Minus ist Plus“);*
(f) $(-a)(-b)=ab$ *für alle* $a,b\in K$*;*
(g) $\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ *für alle* $a,c\in K$ *und alle* $b,d\in K\setminus\{0\}$*;*
(h) $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ *für alle* $a\in K$ *und alle* $b,c\in K\setminus\{0\}$*;*
(i) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ *für alle* $a,b\in K$ *und alle* $c,d\in K\setminus\{0\}$*;*
(j) $m(ab)=(ma)b$ *für alle* $m\in\mathbb{Z}$ *und alle* $a,b\in K$*.*

Ende der 8. Vorlesung am 31.10.2019, Punkt (d).

Beweis. (a) Aus $0+0=0$ folgt $a0+a0=a(0+0)=a0$. Addieren wir auf beiden Seiten $-a0$, so ergibt sich $a0=0$.

(b) Dies ist klar nach Definition für $a\neq 0$, und für $a=0$ folgt dies aus dem vorigen Punkt.

(c) Aus $a\neq 0$ und $b\neq 0$ folgt $ab\neq 0$, da $K\setminus\{0\}$ unter Multiplikation abgeschlossen ist.

(d) $a+(-1)a=1a+(-1)a=(1+(-1))a=0a=0$ unter Verwendung voriger Punkte. Analog gilt $(-1)a+a=0$. Es folgt $(-1)a=-a$.

(e) Nach dem vorigen Punkt und Lemma 2.4.105 gilt $(-1)(-1)=-(-1)=1$.

(f) $(-a)(-b)=(-1)a(-1)b=ab(-1)(-1)=ab1=1$ nach früheren Punkten.

(g) $\frac{a}{b}\frac{c}{d}=ab^{-1}cd^{-1}=acb^{-1}d^{-1}=ac(db)^{-1}=ac(bd)^{-1}=\frac{ac}{bd}$ nach Lemma 2.4.105.

(h) $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}\frac{c}{c}=\frac{a}{b}cc^{-1}=\frac{a}{b}1=\frac{a}{b}$ (vorige Punkte);

(i) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=(ad)(bd)^{-1}+(bc)(bd)^{-1}=(ad+bc))(bd)^{-1}=\frac{ad+bc}{bd}$;

(j) Wir zeigen dies zuerst für $m\geq 0$ per vollständiger Induktion. Induktionsanfang: Sicherlich gilt $0(ab)=0_K=b0_K=0_Kb=(0a)b$ (unter Verwendung von 2.4.110 und obigem). Induktionsschritt: Gelte $m(ab)=(ma)b$. Daraus folgt $(m+1)(ab)=m(ab)+1(ab)=(ma)b+(1a)b=(ma+1a)b=((m+1)a)b$ (unter Verwendung von 2.4.111).

Sei nun $m<0$. Nach dem gerade Bewiesenen gilt

$$(-m)(ab)=((-m)a)b.$$

[31] Eine Körperstruktur auf einer Menge besteht aus zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf der gegebene Menge, zusammen mit denen die Menge ein Körper ist.

Die linke Seite dieser Gleichung hat als additives Inverses $m(ab)$ (wegen $(-m)(ab) + m(ab) = (-m+m)(ab) = 0(ab) = 0_K$ und 2.4.111), die rechte Seite hat als additives Inverses $(ma)b$ (wegen $((-m)a)b + (ma)b = ((-m)a + ma)b = ((-m+m)a)b = (0a)b = 0_K b = 0_K$ und 2.4.111). Diese additiven Inversen müssen gleich sein. □

2.4.122 (Ganze Zahlen und beliebige Körper)**.** Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi\colon \mathbb{Z} &\to K, \\ n &\mapsto n1_K. \end{aligned}$$

Diese Abbildung bildet 0 auf 0_K ab, 1 auf 1_K, und ist kompatibel mit Addition und Multiplikation: Sie erfüllt nach 2.4.111 und zweimaliger Verwendung des letzten Punkts in Lemma 2.4.121

$$\begin{aligned} \chi(m+n) &= (m+n)1_K = m1_K + n1_K = \chi(m) + \chi(n), \\ \chi(mn) &= (mn)1_K = m(n1_K) = (m(n1_K))1_K = m((n1_K)1_K) = (n1_K)(m1_K) = \chi(n)\chi(m), \end{aligned}$$

Wir können also jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ein Körperelement $n_K := n1_K = \chi(n)$ zuordnen, und diese Zuordnung ist kompatibel mit Addition, Multiplikation, Null und Eins.

Für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$ ist diese Abbildung injektiv und ihr Bild ist die übliche Teilmenge $\mathbb{Z}$ dieser Körper.

Im Allgemeinen ist χ jedoch nicht injektiv: Für den Körper $K = \mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen gilt $\chi(2) = 21_{\mathbb{F}_2} = 1_{\mathbb{F}_2} + 1_{\mathbb{F}_2} = 0_{\mathbb{F}_2} = \chi(0)$.

Definition 2.4.123. Ein **angeordneter Körper** $(K, +, \cdot, \leq)$ ist ein Körper $(K, +, \cdot)$ zusammen mit einer Ordnung $\leq$ auf K, die im folgenden Sinne mit der Körperstruktur verträglich ist: Für alle Elemente $x, y, z \in K$ gelten

(a) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$,
(b) $(0 \leq x)$ und $(0 \leq y) \implies 0 \leq xy$.

Eine Ordnung auf einem Körper mit diesen Eigenschaften nennen wir eine **Körperanordnung**. Die Elemente $x \in K$ mit $x > 0$ nennt man **positiv**, die mit $x < 0$ **negativ**, die mit $x \geq 0$ **nichtnegativ**, die mit $x \leq 0$ **nichtpositiv**.

Beispiele 2.4.124. Der Körper $\mathbb{Q}$ mit seiner üblichen Ordnung $\leq$ ist ein angeordneter Körper. Mit Schulwissen: Dasselbe gilt für den Körper der reellen Zahlen.

Lemma 2.4.125 (Rechenregeln in einem angeordneten Körper)**.** *In jedem angeordneten Körper gelten (jeweils für alle $x, y \in K$):*

(a) $(x \leq y$ *und* $a \leq b) \implies (x + a \leq y + b)$
(b) $(x \leq y$ *und* $0 \leq a) \implies (ax \leq ay)$
(c) $(0 \leq x < y$ *und* $0 \leq a < b) \implies (0 \leq xa < yb)$
(d) $(x \leq y) \implies (-y \leq -x)$
(e) $(x \leq y$ *und* $a \leq 0) \implies (ax \geq ay)$
(f) $(x \neq 0) \implies (0 < x^2)$
(g) $0 < 1$
(h) $(0 < x) \implies (0 < x^{-1})$
(i) $(0 < x \leq y) \implies (0 < y^{-1} \leq x^{-1})$
(j) Aus $a^2 \leq b^2$ *und* $0 \leq b$ *folgt* $a \leq b$.

Beweis. (a) Aus $x \leq y$ folgt $x + a \leq y + a$. Aus $a \leq b$ folgt $a + y \leq b + y$. Nun verwende Transitivität.

(b) Aus ($x \leq y$ und $0 \leq a$) folgt ($0 = x - x \leq y - x$ und $0 \leq a$). Dies liefert $0 \leq (y - x)a = ya - xa$, was $xa = ax \leq ay = ya$ liefert.

(c) Aus ($0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$) folgt $0 = a0 \leq ax \leq ay \leq by$. Zu zeigen bleibt $ay \neq by$. Aber aus $ay = by$ würde wegen $y \neq 0$ per Multiplikation mit y^{-1} folgen, dass $a = b$ gilt, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $ay \neq by$.

(d) Aus $x \leq y$ folgt durch Addition von $-x - y$ die Ungleichung $-y \leq -x$.

(e) Aus ($x \leq y$ und $a \leq 0$) folgt $0 \leq -a$ und damit $-ax = (-a)x \leq (-a)y = -ay$. Daraus folgt $ay \leq ax$.

(f) Gelte $x \neq 0$. Da $\leq$ als Ordnung total ist, gilt entweder $x < 0$ oder $0 < x$, also $0 < -x$ oder $0 < x$. Die obigen Punkte zeigen dann $0 < (-x)^2 = x^2$.

(g) Wegen $0 \neq 1$ folgt dies aus $0 < 1^2 = 1$ nach dem vorigen Punkt.

(h) Gelte $0 < x$. Wir wissen bereits $0 < (x^{-1})^2$ und folgern damit $0 < x(x^{-1})^2 = x^{-1}$.

(i) Gelte $0 < x \leq y$. Daraus folgen $0 < x^{-1}$ und $0 < y^{-1}$ und damit $0 < x^{-1}y^{-1}$. Daraus folgern wir $y^{-1} \leq x^{-1}$. Dies zeigt beide behaupteten Ungleichungen.

(j) Gelte $a^2 \leq b^2$ und $0 \leq b$. Da jede Ordnung total ist, gilt $a \leq b$ (wie gewünscht) oder $b < a$. Nehmen wir an, dass $b < a$ gilt. Dann folgt $b^2 < a^2$ nach obigem und daraus $a^2 \leq b^2 < a^2$, also der Widerspruch $a^2 < a^2$. □

Aufgabe 2.4.126 (Arithmetisches Mittel und Quadrat des geometrischen Mittels)**.** Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$. Im Fall $a \leq b$ gilt $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$. Im Fall $0 \leq a \leq b$ gilt $a^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq b^2$ (vgl. [Wik19, Mittelwert]).

2.4.127. Es ist klar, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ Teilmengen der angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind. Dies gilt allgmein: Für jeden angeordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ gilt $\mathbb{Z} \subset K$, denn aus Lemma 2.4.125 folgt

$$\cdots < -1_K - 1_K < -1_K < 0_K < 1_K < 1_K + 1_K < \ldots.$$

Mit der abkürzenden Schreibweise $n_K := n1_K$ für $n \in \mathbb{Z}$ erhalten wir

$$\cdots < -2_K < -1_K < 0_K < 1_K < 2_K < \ldots.$$

Damit gilt $\mathbb{Z} \subset K$. Wir schreiben oft n statt n_K. Damit hat der Ausdruck na a priori zwei Bedeutungen, die aber wegen $n_K a = (n1_K)a = n(1_K a) = na$ übereinstimmen.

Ebenso gilt $\mathbb{Q} \subset K$, indem man $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit dem Körperelement $q_K := \frac{n_K}{m_K}$ identifiziert. Wir schreiben oft $\frac{n}{m}$ statt $\frac{n_K}{m_K}$.

Obiges zeigt, dass die Abbildung $\chi\colon \mathbb{Z} \to K$ aus 2.4.122 injektiv ist (und dass $m \leq n$ in $\mathbb{Z}$ genau dann gilt, wenn $m_K \leq n_K$ in K gilt). Deshalb können wir die ganzen Zahlen kanonisch als Teilmenge von K auffassen. Dies werden wir im folgenden oft stillschweigend tun. Ebenso ist die Abbildung $\mathbb{Q} \to K$, $x = \frac{p}{q} \mapsto x_K := \frac{\chi(p)}{\chi(q)} = \frac{p_K}{q_K}$, wohldefiniert und injektiv, wie man leicht aus der Injektivität von $\chi\colon \mathbb{Z} \to K$ folgert. Sie ist auch verträglich mit Addition und Multiplikation (und Null und Eins und $\leq$).

Definition 2.4.128. Sei K (oder genauer $(K, +, \cdot, \leq)$) ein angeordneter Körper. Dann heißt die folgende Abbildung **Absolutbetrag** oder **Betrag**:

$$|-|\colon K \to K,$$
$$x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Lemma 2.4.129 (Eigenschaften des Absolutbetrags)**.** *Der Absolutbetrag auf jedem angeordneten Körper K hat die folgenden Eigenschaften (für alle $x, y \in K$):*

(a) $|x| \geq 0$
(b) $|x| = 0 \iff x = 0$
(c) $|-x| = |x|$
(d) $-|x| \leq \pm x \leq |x|$
(e) $|xy| = |x| \cdot |y|$
(f) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ *für* $x \neq 0$
(g) ***Dreiecksungleichung*** $|x + y| \leq |x| + |y|$
(h) ***umgekehrte Dreiecksungleichung*** $|x - y| \geq ||x| - |y||$

2.4.130. Dreiecksungleichung und umgekehrte Dreiecksungleichung (und ihre offensichtlichen Korollare, in denen man jeweils y durch $-y$ ersetzt) lassen sich durch

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

zusammenfassen.

Beweis. Die ersten Punkte sind recht offensichtlich (verwende Lemma 2.4.125).

Dreiecksungleichung: Aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt $x + y \leq |x| + |y|$. Aus $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ folgt $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$. Daraus folgt die Dreiecksungleichung.

Umgekehrte Dreiecksungleichung: Aus der Dreiecksungleichung folgt $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, also $|x| - |y| \leq |x - y|$. Durch Vertauschen von x und y erhält man daraus $-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y - x| = |-(y - x)| = |x - y|$. Die behauptete Ungleichung folgt. □

Aufgabe 2.4.131. Sei K ein angeordneter Körper.

(a) Für alle $x, a \in K$ gilt: $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
(b) Eine Teilmenge $A \subset K$ ist genau dann beschränkt, wenn ein $a \in K$ existiert, so dass für alle $x \in A$ die Ungleichung $|x| \leq a$ gilt.

2.5. **Die reellen Zahlen.**

Satz 2.5.1.

(a) *Es gibt einen angeordneten Körper $(R, +, \cdot, \leq)$ mit der Eigenschaft, dass jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge $A \subset R$ eine kleinste obere Schranke (= ein Supremum) besitzt. Man nennt diese Eigenschaft die* ***Supremumseigenschaft****.*

(b) *Ist $(R', +', \cdot', \leq')$ ein weiterer angeordneter Körper mit der Supremumseigenschaft, so gibt es genau eine Bijektion $\varphi\colon R \to R'$, die mit den jeweiligen Additionen, Multiplikationen und Ordnungen verträglich ist, d. h. $\varphi(x+x) = \varphi(x) +' \varphi(y)$ und $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot' \varphi(y)$ und $x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$ für alle $x, y \in R$ erfüllt.*

Beweis. Nicht in dieser Vorlesung (vgl. [Wik19, Reelle Zahl]). Eine mögliche Konstruktion verwendet sogenannte Dedekind-Schnitte. □

2.5.2. Der aus der Schule bekannte angeordnete Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ der reellen Zahlen hat die in Satz 2.5.1 geforderte Eigenschaft. Wir können ihn uns auf zwei Weisen vorstellen:

- als Punkte auf dem Zahlenstrahl;
- als Dezimalzahlen mit eventuell unendlich vielen Nachkommastellen, wobei $????z99999\ldots$ und $????(z+1)00000\ldots$ (mit gedachtem Komma an derselben Stelle) dieselbe Zahl beschreiben, wobei z eine von Neun verschiedene Ziffer ist und die Fragezeichen für dieselbe endliche Ziffernfolge stehen; es gilt etwa $37{,}48999999\ldots = 37{,}4900000\ldots$.

Anschaulich ist beide Male klar, dass jede nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum hat.

2.5.3. Alle folgenden Resultate werden nur die in Satz 2.5.1 angegebene axiomatische Charakterisierung des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen verwenden.

Ende der 9. Vorlesung am 04.11.2019, Punkt (d).

2.5.4. Der angeordnete Körper $\mathbb{Q}$ besitzt die Supremumseigenschaft nicht: Betrachte $A := \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$. Die Menge A ist nicht leer und nach oben beschränkt durch 2 (denn aus $q > 2$ folgt $q^2 > 4 > 2$, also $q \notin A$). Wir führen nun die Annahme, dass A ein Supremum s in $\mathbb{Q}$ hat, zum Widerspruch. Sicherlich gilt $s \geq 1 \in A$.

- Fall $s^2 = 2$: Dieser Fall tritt nach Satz 2.3.12 nicht ein.
- Fall $s^2 > 2$: Setze $x := \frac{1}{2}(s + \frac{2}{s}) \in \mathbb{Q}$. Die naheliegenden Rechnungen zeigen $2 < x^2 < s^2$. Für alle $q \in A$ gilt $q^2 < 2 < x^2$. Aus Lemma 2.4.125.(j) folgt daraus $q < x < s$. Also ist x eine obere Schranke von A, die echt kleiner als s ist. Widerspruch.
- Fall $s^2 < 2$: Daraus folgt $\frac{1}{2} < \frac{1}{s^2}$ und dann $2 < (\frac{2}{s})^2$. Setze $t := \frac{2}{s} \in \mathbb{Q}$. Nach dem vorhergehenden Punkt erfüllt $x := \frac{1}{2}(t + \frac{2}{t}) \in \mathbb{Q}$ die Abschätzungen $2 < x^2$ und $x < t$. Wegen $t > 0$ und $x > 0$ folgen $(\frac{2}{x})^2 < 2$, also $\frac{2}{x} \in A$, und $\frac{2}{x} > \frac{2}{t} = s$. Also ist s keine obere Schranke von A. Widerspruch.

Lemma 2.5.5 (Infimumseigenschaft der reellen Zahlen)**.** *Jede nach unten beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Beweis. Die Menge $A' := \{-a \mid a \in A\}$ ist nach oben beschränkt und hat somit ein Supremum s. Dann ist $-s$ ein Infimum von A. □

2.5.6. Wir haben in 2.4.127 gesehen, dass die ganzen und rationalen Zahlen kanonisch in jedem angeordneten Körper enthalten sind. Wir erhalten also $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Es gilt

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \ldots\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen **irrationale Zahlen**.

Satz 2.5.7. *Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist* ***archimedisch***[32]*, d. h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$. Mit anderen Worten hat die Teilmenge $\mathbb{N}$ keine obere Schranke in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Falls es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$ gibt, so ist x eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Als nichtleere Menge mit einer oberen Schranke besitzt $\mathbb{N}$ eine kleinste obere Schranke (= ein Supremum) $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Wegen $s - 1 < s$ ist $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1$. Daraus folgt $n + 1 > s$. Wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ widerspricht dies der Annahme, dass s eine obere Schrankte von $\mathbb{N}$ ist. Also muss es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$ geben. □

Korollar 2.5.8.

(a) *Unter jeder reellen Zahl findet man eine ganze Zahl, in Formeln: $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exists m \in \mathbb{Z}\colon m < x$.*

(b) *Für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, in Formeln: $\forall \varepsilon > 0\colon \exists n \geq 1\colon 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

[32] Allgemein heißt ein angeordneter Körper $(K, \leq)$ archimedisch, wenn es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$ gibt.

(c) *Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets noch eine rationale Zahl, in Formeln:* $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x < y) \implies (\exists r \in \mathbb{Q}\colon x < r < y)$.

Beweis. Wir verwenden die Rechenregeln für angeordnete Körper, siehe Lemma 2.4.125.

(a) Nach Satz 2.5.7 gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $-x < n$. Per Multiplikation mit der negativen Zahl -1 erhalten wir $x > -n$. Wir können also $m = -n \in \mathbb{Z}$ wählen.

(b) Aus $\varepsilon > 0$ folgt $0 < \frac{1}{\varepsilon}$. Nach Satz 2.5.7 gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Ingesamt gilt $0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$ (und somit $n \geq 1$). Multiplikation mit den beiden positiven Zahlen ε und $\frac{1}{n}$ liefert die gewünschte Ungleichung.

(c) Seien reelle Zahlen $x < y$ gegeben. Wegen $0 < y - x$ und (b) finden wir eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < y - x$. (Anschaulich ist $\frac{1}{n}$ echt kleiner als der Abstand zwischen x und y, was nahelegt, dass ein geeignetes ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{n}$ zwischen x und y liegt. Dies wird im folgenden formal gezeigt.) Wegen (a) und Satz 2.5.7 gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < x$ und $y < b$. Betrachte die Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N} \mid x < a + m\frac{1}{n}\}.$$

Diese ist wegen $n(b-a) \in M$ nicht leer (beachte, dass dies eine natürliche Zahl ist). Da die natürlichen Zahlen wohlgeordnet sind (Lemma 2.4.72), hat M ein kleinstes Element $k \in M$ (direktes Argument: Das kleinste Element der endlichen Menge $\{m \in M \mid m \leq n(b-a)\}$ ist das kleinste Element von M). Es gilt $k \geq 1$. Wir behaupten $a + k\frac{1}{n} < y$.

Sonst würde $a + k\frac{1}{n} \geq y$ gelten. Addition von $-\frac{1}{n}$ liefert $a + (k-1)\frac{1}{n} \geq y - \frac{1}{n} > x$, also $(k-1) \in M$ im Widerspruch dazu, dass k das kleinste Element von M ist.

Insgesamt zeigt dies $x < a + k\frac{1}{n} < y$, und offensichtlich gilt $a + k\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$. □

Korollar 2.5.9. *Seien $x, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ und sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Gilt $x \leq \frac{1}{n}c$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$, so folgt $x \leq 0$.*

Beweis. Dies ist eine einfache Konsequenz aus Korollar 2.5.8.(b): Falls $x > 0$ oder äquivalent $\frac{x}{c} > 0$ gelten würde, gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < \frac{x}{c}$, also $\frac{1}{n}c < x$. Da die linke Seite kleiner wird, wenn wir n vergrößern, liefert dies einen Widerspruch zur Annahme.

□

Satz 2.5.10 (Bernoullische Ungleichung)**.** *Sei $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion. Die Abschätzung gilt offensichtlich für $n = 0$ (und auch für $n = 1, 2$). Gelte die Abschätzung für ein $n \in \mathbb{N}$. Multiplizieren wir sie mit $1 + x \geq 0$, so erhalten wir wie gewünscht

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

□

Proposition 2.5.11.

(a) *Sei $b > 1$ eine reelle Zahl. Dann gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > c$.*

(b) *Sei $0 \leq b < 1$ eine reelle Zahl. Dann gibt es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.*

Beweis. (a) Setze $x := b - 1 > 0 \geq -1$. Die Bernoullische Ungleichung liefert

$$b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $\mathbb{R}$ archimedisch ist (Satz 2.5.7), gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{c-1}{x}$. Wegen $x > 0$ folgt $nx > c - 1$ und daraus $b^n \geq 1 + nx > c$ wie gewünscht.

(b) Für $b = 0$ ist das trivial. Gelte $b \neq 0$. Nach den Rechenregeln in Lemma 2.4.125 gilt $0 < 1 < \frac{1}{b}$. Nach dem vorigen Punkt gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{b}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Weil b und ε positiv sind, ist dies äquivalent zu $\varepsilon > b^n$.

□

2.6. **Wurzeln.**

Bemerkung 2.6.1. Ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so verwenden wir die folgenden naheliegenden Abkürzungen:

$$\mathbb{R}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq a\},$$
$$\mathbb{R}_{>a} := \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}.$$

Analog definieren wir $\mathbb{Q}_{\geq a}$, $\mathbb{Q}_{>a}$, $\mathbb{Z}_{\geq a}$, $\mathbb{Z}_{>a}$, $\mathbb{N}_{\geq a}$ $\mathbb{N}_{>a}$.

Definition 2.6.2. Eine Abbildung $f \colon I \to J$ zwischen Teilmengen $I, J \subset \mathbb{R}$ heißt

- **monoton wachsend**, falls für alle $x, y \in I$ gilt: Aus $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$.
- **streng monoton wachsend**, falls für alle $x, y \in I$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$.
- **monoton fallend**, falls für alle $x, y \in I$ gilt: Aus $x \leq y$ folgt $f(x) \geq f(y)$.
- **streng monoton fallend**, falls für alle $x, y \in I$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) > f(y)$.

Statt *streng* sagt man auch *strikt*.

2.6.3. Jede streng monoton wachsende/fallende Funktion ist injektiv.

Proposition 2.6.4 (Existenz der m-ten Wurzel)**.** *Seien $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x^m = a$.*

*Wir nennen dieses Element die m-**te Wurzel von** a und notieren sie als $\sqrt[m]{a}$ oder $a^{\frac{1}{m}}$. Im Fall $m = 2$ sprechen wir von der **(Quadrat-)Wurzel** und schreiben sie als $\sqrt{a}$.*

Beispiel 2.6.5. Die Wurzel aus 2 ist $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nach Satz 2.3.12. Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

2.6.6. Seien $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Finde $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$ und $q = \frac{m}{n}$. Wir definieren $a^q := (a^m)^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dies hängt nicht von der Wahl von m, n mit $q = \frac{m}{n}$ ab.

Beweis im Fall $m = 2$. Der Fall $a = 0$ ist klar: Es gilt $0^2 = 0$ und aus $x^2 = 0$ folgt $x = 0$ wegen Lemma 2.4.121.

Gelte im Folgenden $a > 0$. Definiere

$$M := \left\{ y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \colon y^2 \leq a \right\}.$$

Wir wollen zeigen, dass M ein Supremum besitzt und dass dieses Supremum die gesuchte 2-te Wurzel aus a ist.

In den folgenden Punkten verwenden wir oft die Rechenregeln für angeordnete Körper (Lemma 2.4.125).

- Behauptung: Die Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $y \mapsto y^2$, ist (wohldefiniert und) streng monoton wachsend: Für alle $y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $y < z$ gilt $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) > 0$, also $y^2 < z^2$.
- Behauptung: M ist nach oben beschränkt.
  Es gilt $0 < a < a + 1$. Durch „Multiplikation“ mit $0 < 1 < a + 1$ erhalten wir $0 < a < (a + 1)^2$, also $a + 1 \notin M$. Auf Grund des (strengen) monotonen Wachstums ist M durch $a + 1$ nach oben beschränkt.
- Wegen $0 \in M$ gilt $M \neq 0$.

Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat M ein Supremum $s := \sup M$.

- Behauptung $s > 0$: Nach Korollar 2.5.8 existiert ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $0 < \frac{1}{n} < a$. Aus $1 \leq n$ folgt $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < a$, also $\frac{1}{n} \in M$ und damit $s \geq \frac{1}{n} > 0$.
- Behauptung $s^2 \leq a$: Nach Korollar 2.5.8 existiert ein $N \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $0 < \frac{1}{N} < s$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ folgt $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < s$, also $x_n := s - \frac{1}{n} > 0$.
  Sei $n \geq N$. Weil s die kleinste obere Schranke von M ist und $x_n = s - \frac{1}{n} < s$ gilt, ist x_n keine obere Schranke von M, es gibt also ein $\widetilde{x}_n \in M$ mit $x_n < \widetilde{x}_n \leq s$. Auf Grund der Monotonie (hier wird $x_n > 0$ verwendet) folgt
  $$a \geq (\widetilde{x}_n)^2 \geq (x_n)^2 = (s - \frac{1}{n})^2 = s^2 - 2s\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \geq s^2 - 2s\frac{1}{n},$$
  also $s^2 - a \leq 2s\frac{1}{n}$ für alle $n \geq N$. Wir erhalten $s^2 - a \leq 0$ aus Korollar 2.5.9.

- Behauptung $s^2 \geq a$: Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $s < s + \frac{1}{n} \notin M$, da s obere Schranke von M ist. Es folgt

$$a < (s + \frac{1}{n})^2 = s^2 + 2s\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq s^2 + (2s+1)\frac{1}{n},$$

  also $a - s^2 \leq (2s+1)\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und somit $a - s^2 \leq 0$ aus Korollar 2.5.9.

Dies zeigt $a = s^2$, also die Existenz einer Quadratwurzel aus a in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie von $y \mapsto y^2$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, denn jede streng monotone Funktion ist injektiv. □

Beweis für m beliebig. Der Fall $m = 1$ ist trivial. Ebenso ist der Fall $a = 0$ klar: Dann gilt $0^m = 0$ und aus $x^m = 0$ folgt $x = 0$ wegen Lemma 2.4.121.

Gelte im Folgenden $m \geq 2$ und $a > 0$. Definiere

$$M := \left\{ y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : y^m \leq a \right\}.$$

Wir wollen zeigen, dass M ein Supremum besitzt und dass dieses Supremum die gesuchte m-te Wurzel aus a ist.

In den folgenden Punkten verwenden wir oft die Rechenregeln für angeordnete Körper (Lemma 2.4.125).

- Behauptung: Die Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $y \mapsto y^m$, ist (wohldefiniert und) streng monoton wachsend: Für alle $y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $y < z$ gilt $y^m < z^m$.

  Sei $y \in \mathbb{R}$. Aus $0 \leq y$ folgt $0 \leq y^2$, dann $0 \leq y^3$, ...,[33][34] $0 \leq y^m$ mit den Rechenregeln. Dieselben Regeln (multipliziere $y < z$ sukzessive mit sich selbst) zeigen auch, dass $y \mapsto y^m$ monoton wachsend ist.
- Behauptung: M ist nach oben beschränkt.

  Es gilt $0 < a < a + 1$. Durch „Multiplikation“ mit $0 < 1 < a + 1$ erhalten wir mit den Rechenregeln $0 < a < (a+1)^2$. Nochmalige Multiplikation“ mit $0 < 1 < a + 1$ liefert $0 < a < (a+1)^3$ usw. und schließlich $0 < a < (a+1)^m$. (Formal wieder mit vollständiger Induktion.)

  Für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $a + 1 \leq y$ folgt auf Grund der Monotonie $a < (a+1)^m \leq y^m$ und somit $y \notin M$. Es folgt $M \subset \mathbb{R}_{<a+1}$, d. h. M ist durch $a + 1$ nach oben beschränkt.
- Es gilt $M \neq 0$ wegen $0 \in M$.

Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat M ein Supremum $s := \sup M$.

- Behauptung $s > 0$: Nach Korollar 2.5.8 existiert ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $0 < \frac{1}{n} < a$. Aus $1 \leq n$ folgt $\frac{1}{n} \leq 1$. Multipliziert man dies mit $0 < \frac{1}{n}$, so erhält man $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Nochmaliges Multiplizieren liefert $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$. ... und schließlich $\frac{1}{n^m} \leq \frac{1}{n^{m-1}}$. Dies zeigt $\left(\frac{1}{n}\right)^m < \frac{1}{n} < a$, also $\frac{1}{n} \in M$. Da s eine obere Schranke von M ist, folgt $0 < \frac{1}{n} \leq s$.
- Behauptung $s^m \leq a$: Nach Korollar 2.5.8 existiert ein $N \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $0 < \frac{1}{N} < s$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ folgt $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < s$, also $x_n := s - \frac{1}{n} > 0$.

  Sei $n \geq N$. Weil s die kleinste obere Schranke von M ist und $x_n = s - \frac{1}{n} < s$ gilt, ist x_n keine obere Schranke von M, es gibt also ein $\widetilde{x}_n \in M$ mit $x_n < \widetilde{x}_n \leq s$. Auf Grund der Monotonie folgt

$$a \geq (\widetilde{x}_n)^m \geq (x_n)^m = (s - \frac{1}{n})^m = s^m + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{1}{n^k} s^{m-k}$$

  Mit den Eigenschaften des Absolutbetrags (Lemma 2.4.129) erhalten wir

$$\begin{aligned} s^m - a \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{1}{n^k} s^{m-k} \leq \left| \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{1}{n^k} s^{m-k} \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \left| \binom{m}{k} \right| \cdot |(-1)|^k \cdot \frac{1}{|n|^k} \cdot |s|^{m-k} \\ \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \underbrace{\frac{1}{n^k}}_{\leq \frac{1}{n}} s^{m-k} \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{n} s^{m-k} \leq \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} s^{m-k} \right)}_{>0} \end{aligned}$$

  Da dies für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt, folgt $s^m - a \leq 0$ aus Korollar 2.5.9.
- Behauptung: $s^m \geq a$.

  Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $s < s + \frac{1}{n} \notin M$, da s obere Schranke von M ist. Es gilt also

$$a < (s + \frac{1}{n})^m = s^m + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{n^k} s^{m-k}$$

  Vollkommen analog wie oben erhalten wir daraus

$$a - s^m < \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} s^{m-k} \right)}_{>0}.$$

  Da dies für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt, folgt $a - s^m \leq 0$ aus Korollar 2.5.9.

Dies zeigt $a = s^m$, also die Existenz einer m-ten Wurzel aus a in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie von $y \mapsto y^m$, denn jede streng monotone Funktion ist injektiv. □

[33] Der formale Beweis geht mit vollständiger Induktion über m.

[34] Alternativbeweis: In $z^m - y^m = (z - y)(z^{m-1} + z^{m-2}y + \cdots + zy^{m-2} + y^{m-1})$ sind beide Faktoren > 0.

2.7. **Komplexe Zahlen.**

Definition 2.7.1. Eine **komplexe Zahl** ist ein Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen. Man schreibt eine komplexe Zahl (a, b) als $a + ib$ oder $a + bi$.[35] Die Menge der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl. Dann heißt

- $\mathrm{Re}(z) = a$ der **Realteil** von z,
- $\mathrm{Im}(z) = b$ der **Imaginärteil** von z,
- $\overline{z} = \overline{a + ib} := a - ib := a + i(-b)$ die **zu** z **konjugierte** komplexe Zahl,
- $|z| = |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der **Betrag**[36] der komplexen Zahl z.

Wir fassen $\mathbb{R}$ vermöge $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x = x + 0i$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.

2.7.2. Wir stellen uns $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlenebene vor, der sogenannten **Gaußschen Zahlenebene**. In dem üblichen Koordinatensystem entspricht $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ der horizontalen Achse, die man **reelle Achse** nennt; man nennt die vertikale Achse die **imaginäre Achse**; sie besteht genau aus den komplexen Zahlen $ib = 0 + ib$, für $b \in \mathbb{R}$ (siehe [Wik19, Komplexe Zahl] für Bilder). Der Realteil ist die erste Koordinate, der Imaginärteil die zweite. Komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, ist Spiegelung an der reellen Achse. Der Betrag $|z|$ ist die Länge des Vektors z, also der Abstand zwischen z und 0 (nach dem Satz des Pythagoras).

Ende der 10. Vorlesung am 07.11.2019.

Satz 2.7.3. *Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wird mit Addition*

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

und Multiplikation

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc)$$

*zu einem Körper, dem **Körper der komplexen Zahlen**.*

2.7.4. Es gilt $i \cdot i = i^2 = -1$. Mit dieser Formel ist die Multiplikation leicht zu memorieren. In den komplexen Zahlen hat die Gleichung $X^2 = -1$ genau zwei Lösungen, nämlich i und $-i$: Diese sind offensichtlich Lösungen, und aus $x^2 = -1$ folgt $0 = x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, also $x + i = 0$ oder $x - i = 0$.

Man sollte nicht $\sqrt{-1}$ statt i schreiben, denn auch $-i$ ist eine Wurzel aus -1.

2.7.5. Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ dehnen Addition und Multiplikation von der Teilmenge $\mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{C}$ aus: Die Inklusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $a \mapsto a = a + i0$, ist verträglich mit Addition, Multiplikation und Betragsbildung (da $|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a + i0|$). Man sagt, dass $\mathbb{R}$ ein **Teilkörper** von $\mathbb{C}$ ist.

2.7.6. Die Formel $i^2 = -1$ zeigt, dass es auf dem Körper der komplexen Zahlen keine Körperanordnung gibt, denn in einem angeordneten Körper ist jedes Quadrat nicht-negativ und -1 ist negativ (Lemma 2.4.125).

2.7.7. In der komplexen Zahlenebene ist die Addition komplexer Zahlen die „Addition von Vektoren“. Multiplikation ist in Polarkoordinaten „Addition der Winkel und Multiplikation der Längen“ (siehe später). Beispielsweise ist Multiplikation mit i eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn um 90 Grad.

Beweis. Wir müssen die Bedingungen in Definition 2.4.113 prüfen. Es ist klar, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe ist (denn $\mathbb{R}^2$ ist eine solche, siehe Beispiel 2.4.104.(b)). Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation sind leichte Rechenübungen, ebenso wie das Distributivgesetz. Dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgeschlossen unter Multiplikation ist, folgt aus den folgenden leichten zu beweisenden Rechenregeln

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}, \tag{2.7.1}$$

$$|z| = 0 \iff z = 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zu zeigen bleibt, dass jedes Element von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses hat. Für alle $z = a + ib \in \mathbb{C}$ gilt

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

[35] Hier ist i ein Symbol.

[36] Dies ist nicht der Betrag eines angeordneten Körpers

Im Fall $z \neq 0$ ist die reelle Zahl $|z|^2$ sicherlich invertierbar in $\mathbb{C}$ mit Inversem $\frac{1}{|z|^2}$; folglich ist $\frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ das multiplikative Inverse von $z = a + ib$. □

2.7.8. Wir kennen bereits die Rechenregeln (2.7.1). Stupides Nachrechnen beweist die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z}), \\ \overline{\overline{z}} &= z \\ \overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w}, \\ \overline{zw} &= \overline{z} \cdot \overline{w}, \\ z \cdot \overline{z} = |z|^2 &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \\ |z| &= |\overline{z}|. \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

(2.7.3)

Lemma 2.7.9 (Dreiecksungleichung für den Betrag auf $\mathbb{C}$)**.** *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Beweis. Dies folgt aus den späteren Erkenntnissen 2.8.6 und Satz 2.8.17 in Abschnitt 2.8 (deren Beweis Lemma 2.7.9 nicht verwendet). □

Satz 2.7.10 (Fundamentalsatz/Hauptsatz der Algebra - ohne Beweis in dieser Vorlesung)**.** *In (teilweise undefinierten) Worten: Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad ≥ 1 hat eine komplexe Nullstelle.*

In Formeln: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, mit $a_n \neq 0$. Dann gibt es eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

2.7.11. Der Fall $n = 2$ ist leicht von Hand lösbar, siehe Aufgabe 2.7.14. Der Fall $n = 1$ ist offensichtlich. In den Fällen $n = 1, 2, 3, 4$ gibt es allgemeine Lösungsformeln (mit Hilfe der vier Grundrechenarten und Wurzelziehen), nicht aber für $n \geq 5$. Siehe [Wik19, Fundamentalsatz der Algebra, Lösen von Gleichungen, Polynomgleichungen] für weitergehende Informationen (Achtung, teilweise werden die Koeffizienten dort als reell angenommen).

Korollar 2.7.12. *In (teilweise undefinierten) Worten: Jedes normierte Polynom mit komplexen Koeffizienten ist Produkt von linearen normierten Polynomen der Form $X - z$, für $z \in \mathbb{C}$.*

In Formeln: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Dann gilt

$$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = (X - z_n) \cdot \cdots \cdot (X - z_1)$$

für geeignete komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Beweis. Per vollständiger Induktion. Für $n = 0, 1$ ist die Aussage klar. Für $n \geq 2$ gibt es nach dem Fundamentalsatz der Algebra 2.7.10 eine Nullstelle $u \in \mathbb{C}$. Nun führe Polynomdivision durch $X - u$ durch, wobei kein Rest verbleibt, da u eine Nullstelle ist. (Genauer wird das in der Linearen Algebra erklärt.) □

Aufgabe 2.7.13 (Jede komplexe Zahl hat eine Quadratwurzel)**.** Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Setze

$$w := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{|z| + a} + i\sqrt{|z| - a}\right) & \text{falls } b \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{|z| + a} - i\sqrt{|z| - a}\right) & \text{falls } b < 0. \end{cases} \tag{2.7.4}$$

Zeige, dass dies ein sinnvoller Ausdruck ist, dass also die Ausdrücke unter den Wurzelzeichen nichtnegative reelle Zahlen sind, und dass $w^2 = z$ und $(-w)^2 = z$ gelten.

Bonus: Erfüllt $x \in \mathbb{C}$ die Gleichung $x^2 = z$, so gilt $x = w$ oder $x = -w$.

Aufgabe 2.7.14. Jede quadratische Gleichung $X^2 + pX + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ hat eine Lösung in den komplexen Zahlen.

Hinweis: Quadratische Ergänzung/Mitternachtsformel/p-q-Formel und Aufgabe 2.7.13.

2.8. **Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^m$.**

2.8.1. Wir fixieren eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$.

Definition 2.8.2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \| - \| \colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ x = (x_1, \ldots, x_m) &\mapsto \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} \end{aligned}$$

heißt **Norm** (beachte, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen als Summe von Quadraten reeller Zahlen nichtnegativ ist). Man nennt $\|x\|$ die **Norm von** x.

2.8.3. Genau dann gilt $\|x\| = 0$, wenn $x = 0 = (0, 0, \ldots, 0)$ gilt.

2.8.4. Nach dem Satz des Pythagoras ($m - 1$ mal angewandt) ist $\|x\|$ die Länge des Vektors $x \in \mathbb{R}^m$, also sein Abstand zum Nullpunkt.

2.8.5. Im Fall $m = 1$ ist die Norm die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$, in Formeln $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2.8.6. Im Fall $m = 2$ ist die Norm die Betragsfunktion auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$: Für alle $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alias $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Definition 2.8.7. Gegeben $x, y \in \mathbb{R}^m$ nennen wir

$$\|x - y\| = \|y - x\|$$

den **Abstand von** x **und** y.

2.8.8. Der Abstand von x und y ist genau dann Null, wenn $x = y$ gilt.

2.8.9. Die folgenden Definitionen dienen vorrangig dem Beweis der Dreiecksungleichung in Satz 2.8.17.

Definition 2.8.10. Wir definieren eine Abbildung, genannt **Skalarmultiplikation**, per

$$\begin{aligned} . \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m, \\ (\lambda, x) = (\lambda, (x_1, \ldots, x_m)) &\mapsto \lambda.x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m). \end{aligned}$$

Später schreiben wir auch λx statt $\lambda.x$.

2.8.11. Wir erinnern daran, dass $\mathbb{R}^m$ mit der komponentenweisen Addition eine abelsche Gruppe ist (siehe Beispiel 2.4.104.(b)).

Lemma 2.8.12 (Eigenschaften der Skalarmultiplikation)**.** *Die folgenden Rechenregeln gelten für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^m$:*

$$\begin{aligned} 1.x &= x, \\ \lambda.(\mu.x) &= (\lambda\mu).x, \\ (\lambda + \mu).x &= \lambda.x + \mu.x, \\ \lambda.(x + y) &= \lambda.x + \lambda.y. \end{aligned}$$

2.8.13. Diese Regeln besagen, dass $\mathbb{R}^m$ ein **$\mathbb{R}$-Vektorraum** ist. Man nennt die Elemente von $\mathbb{R}^m$ auch **Vektoren**. Vektorräume werden in der Linearen Algebra ausführlich studiert.

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

Definition 2.8.14. Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren eine Abbildung, genannt **Skalarprodukt** (oder genauer **Standardskalarprodukt auf** $\mathbb{R}^m$, per

$$\langle -, - \rangle \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$
$$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_m), (y, \ldots, y_m)) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

Lemma 2.8.15 (Eigenschaften des Skalarprodukts und der Norm)**.** *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechenregeln:*

$$\begin{aligned}
\langle x, x \rangle &\geq 0, \\
\langle x, x \rangle = 0 &\iff x = 0, \\
\langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle, \\
\langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle = \langle z, x + y \rangle, \\
\langle \lambda . x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda . y \rangle, \\
\|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle}, \\
\|\lambda . x\| &= |\lambda| \cdot \|x\|.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir erklären die ersten beiden Regeln, die anderen rechnet man einfach nach. Es gilt $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$, da das Quadrat jeder reellen Zahl ≥ 0 ist. Im Fall $x \neq 0$ ist ein $x_i \neq 0$; somit gilt $x_i^2 > 0$ und damit $\langle x, x \rangle > 0$. Im Fall $x = 0$ gilt natürlich $\langle x, x \rangle = 0$. □

Satz 2.8.16 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ gilt*[37]

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

oder äquivalent $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $y \neq 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ zunächst beliebig. Es gilt (mit den Rechenregeln aus Lemma 2.8.15)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\
&= \langle x, x - \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \lambda \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.
\end{aligned}$$

Setzen wir speziell $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ (der Nenner ist $\neq 0$), so erhalten wir nach Multiplikation mit $\langle y, y \rangle > 0$

$$0 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle^2 + \langle x, y \rangle^2.$$

Dies liefert sofort die erste behauptete Ungleichung. Durch Wurzelziehen folgt die zweite (unter Verwendung von Lemma 2.4.125.(j)). □

Ende der 11. Vorlesung am 11.11.2019.

Satz 2.8.17 (Dreiecksungleichung und umgekehrte Dreiecksungleichung)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ gelten*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

und $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

2.8.18. Anschauung: In jedem Dreieck in $\mathbb{R}^m$ ist die Länge jeder Seite kleiner-gleich der Summe der Längen der anderen beiden Seiten: Für beliebige Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^m$ alias Ecken eines Dreiecks gilt

$$\|a - c\| \leq \|a - b\| + \|b - c\|.$$

Dies erhält man aus der Dreiecksungleichung 2.8.17 durch $x := a - b$ und $y := b - c$.

[37] (Man kann am Beweis ablesen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y *linear abhängig* sind, was hier bedeutet, dass x ein skalares Vielfaches von y ist oder umgekehrt.)

Beweis. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung 2.8.16 berechnen wir

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert die Dreiecksungleichung (nach Lemma 2.4.125.(j)). Die umgekehrte Dreiecksungleichung folgt daraus wie im Beweis von Lemma 2.4.129. □

3. Konvergenz

3.0.1. Wir fixieren eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ und betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^m$ mit der Norm $x \mapsto \|x\|$. Der Leser sollte am Anfang besonders die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ im Sinn haben, da man sich diese am besten vorstellen kann.

3.1. Folgen.

Definition 3.1.1. Eine **Folge (in $\mathbb{R}^m$)** ist eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$. Wir nennen $x_n := x(n) \in \mathbb{R}^m$ das **n-te Folgeglied** und schreiben eine solche Folge meist als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz als $(x_n)_n$. Oft verwenden wir die Schreibweise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ um anzudeuten, wo die Folgeglieder liegen.

Ist $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben, so nennen wir allgemeiner auch jede Abbildung $x\colon \mathbb{N}_{\geq n_0} \to \mathbb{R}^m$ eine Folge und notieren sie als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq n_0}} = (x_n)_{n\geq n_0}$.

3.1.2.

- Fall $m = 1$: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ heißt **Folge reeller Zahlen** oder **reelle Folge**.
- Fall $m = 2$: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ kann wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ auch als Folge komplexer Zahlen aufgefaßt werden. Tun wir dies, so sprechen wir von einer **Folge komplexer Zahlen** oder **komplexen Folge** und schreiben $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.
- Fall m beliebig: Hier entsteht ein kleines Notationsproblem: Das n-te Folgeglied $x_n \in \mathbb{R}^m$ ist ein m-Tupel $x_n = ((x_n)_1, (x_n)_2, \dots, (x_n)_m)$. Um doppelte untere Indizes zu vermeiden, mag man Elemente $a \in \mathbb{R}^m$ als $a = (a^1, \dots, a^m)$ notieren und hat damit $x_n = ((x_n)^1, (x_n)^2, \dots, (x_n)^m)$ oder kürzer $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)$. Im Folgenden werden wir jedoch äußerst selten die einzelnen Komponenten der Folgeglieder benötigen, so dass dieses Notationsproblem kaum auftritt.

Beispiele 3.1.3. Bilder malen!

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, x, x^2, \dots)$ eine Folge reller Zahlen. Als Abbildung ist sie durch $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x^n$, gegeben. Beispiele sind
  - $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$,
  - $((\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$.
  - $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$.

(b) Die reelle Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}_{>0}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ ist als Abbildung durch $\mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$, gegeben.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ ist $(x)_{n\in\mathbb{N}} = (x, x, x, \dots)$ eine Folge. Eine solche Folge heißt **konstant**.

(d) $((n, n^2, n^3))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Folge im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$.

(e) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, z, z^2, z^3, \dots)$ eine Folge komplexer Zahlen. Ein Beispiel ist die Folge $(1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots)$.

(f) (mit Schulwissen) $((\cos(n), \sin(n)))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Folge in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$. Wir können diese Folge auch als komplexe Folge $(\cos(n) + i\sin(n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ auffassen.

Definition 3.1.4 (Konvergenz)**.** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ ist **konvergent**, falls es ein $a \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass gilt:

> Für alle reellen Zahlen $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ die Ungleichung $\|x_n - a\| < \varepsilon$ gilt.

In Quantorenschreibweise ausgedrückt:[38]

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon \|x_n - a\| < \varepsilon$$

[38] In dieser Schreibweise ist implizit mitverstanden, dass ε reell und n natürlich sein sollen. Genauer, aber weniger prägnant ist

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}\colon \|x_n - a\| < \varepsilon$$

Wir sagen in diesem Fall, dass $(x_n)_n$ **gegen** a **konvergiert** und nennen a den[39] **Grenzwert** oder **Limes** der Folge und schreiben[40]

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

und sagen „a ist der Limes von x_n für n gegen unendlich“. Alternativschreibweisen dafür sind

- $x_n \to a$ für $n \to \infty$ (oder sehr kurz $x_n \to a$) oder
- $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Beide werden als „x_n geht gegen a für n gegen unendlich“ gelesen.

Eine **divergente** Folge ist eine nicht konvergente Folge.

3.1.5. Für reelle und komplexe Folgen kann man in der obigen Definition $\|x_n - a\|$ durch $|x_n - a|$ ersetzen, denn die Norm auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist der Betrag, wie in 2.8.5 und 2.8.6 beobachtet.

Definition 3.1.6. Seien $x \in \mathbb{R}^m$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^m \colon \|y - x\| < \varepsilon\}.$$

ε-Ball um x oder **Ball um x mit Radius ε** oder **ε-Umgebung von x**.

3.1.7. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}^m$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Folgeglieder in $B_\varepsilon(a)$ liegen. Mit *fast alle* meinen wir hier und anderswo „alle bis auf endlich viele“.

Beispiele 3.1.8.

(a) Jede konstante Folge $(x, x, \dots)$ konvergiert gegen x.

(b) Die reelle Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, in Formeln $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dies folgt aus Korollar 2.5.8.(b).

(c) Sei $-1 < a < 1$. Dann konvergiert die reelle Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. Dies folgt aus Proposition 2.5.11.

(d) Die reelle Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent: Sonst sei a ihr Grenzwert. Für $\varepsilon = 1$ liegen also fast alle Folgenglieder in $B_\varepsilon(a) = B_1(a)$. Es folgt $1, -1 \in B_1(a)$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir den Widerspruch

$$2 = |1 - (-1)| \le |1 - a + a + 1| \le |1 - a| + |a + 1| = |1 - a| + |-1 - a| < 1 + 1 = 2.$$

Also ist unsere Folge nicht konvergent.

Definition 3.1.9. Eine Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\|x_n\| \le s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, wenn also alle Folgeglieder in einem s-Ball $B_s(0)$ um den Nullpunkt liegen, für ein $s \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1.10.

(a) Der Grenzwert jeder konvergenten Folge in $\mathbb{R}^m$ ist eindeutig bestimmt.

(b) Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}^m$ ist beschränkt.

(c) Aus $x_n \to a$ in $\mathbb{R}^m$ folgt $\|x_n\| \to \|a\|$ in $\mathbb{R}$.

Beweis.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Grenzwerte einer konvergenten Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$. Wegen $a \ne b$ gilt $\varepsilon := \frac{1}{2}\|a - b\| > 0$. Wegen der Konvergenz gegen a gibt es ein $n_a \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - a\| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_a$. Wegen der Konvergenz gegen b gibt es ein $n_b \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - b\| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_b$. Sei $N := \max(n_a, n_b)$. Dann folgt für alle $n \ge N$ mit der Dreiecksungleichung (Satz 2.8.17)

$$2\varepsilon = \|a - b\| \le \|a - x_n\| + \|x_n - b\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

---

oder gar das viel unlesbarere

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \colon \Big((\varepsilon > 0) \implies \big(\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon (n \ge N) \implies (\|x_n - a\| < \varepsilon)\big)\Big)$$

[39] Der bestimmte Artikel wird in Proposition 3.1.10 gerechtfertigt.

[40] Der Pfeil $\to$ zusammen mit dem Zeichen ∞ für unendlich deuten hier an, dass n größer und größer wird. Der Pfeil ist hier in keinster Weise ein „Abbildungspfeil“.

(b) Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ eine konvergente Folge mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon = 1$. Dann gibt es N mit $\|x_n - a\| < 1$ für alle $n > N$. Es folgt

$$\|x_n - a\| \leq M := \max(1, \|x_0 - a\|, \|x_1 - a\|, \ldots, \|x_N - a\|)$$

und somit

$$\|x_n\| = \|x_n - a + a\| \leq \|x_n - a\| + \|a\| \leq M + a$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist unsere Folge beschränkt.

(c) Die umgekehrte Dreiecksungleichung liefert

$$|\|x_n\| - \|a\|| \leq \|x_n - a\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Konvergenz $x_n \to a$ impliziert, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die rechte Seite für alle $n \geq n_0$ kleiner als ε ist. Dies gilt dann erst recht für die linke Seite. □

Proposition 3.1.11. *Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Dann sind die Folgen $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen und $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Produkte konvergent und es gelten:*

(a) $x_n + y_n \to a + b$,

(b) $x_n y_n \to ab$.

Gelten $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$, so ist die Folge (x_n^{-1}) der Inversen konvergent und es gilt

(c) $x_n^{-1} = \frac{1}{x_n} \to a^{-1} = \frac{1}{a}$.

3.1.12. Proposition 3.1.11 läßt sich speziell auf die konstante konvergente Folge $(x_n)_n = (a)_n$ und eine beliebige konvergente Folge $y_n \to b$ anwenden: Dieser Spezialfall liefert $a + y_n \to a + b$ und $ay_n \to ab$.

3.1.13. Teil (c) von Proposition 3.1.11 läßt sich immer auf Endstücke von Folgen anwenden, die gegen eine Zahl $\neq 0$ konvergieren: Aus $x_n \to a \neq 0$ folgt bereits $x_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

3.1.14. Die Aussagen von Proposition 3.1.11 kann man (unter den dortigen Annahmen) auch so schreiben:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) + \Big(\lim_{n\to\infty} y_n\Big)$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} y_n\Big)$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$$

Ende der 12. Vorlesung am 14.11.2019.

Beweis.

(a) Die Dreiecksungleichung zeigt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $x_n \to a$ gibt es ein $n_a \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_a$. Ebenso gibt es ein $n_b \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_b$. Für alle $n \geq \max(n_a, n_b)$ folgt $|(x_n + y_n) - (a + b)| < 2\varepsilon$. Wir wollen aber „$< \varepsilon$“.

Indem wir anfangs, nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$, im obigen Argument mit $\varepsilon/2$ statt ε arbeiten, erhalten wir $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ für alle $n \geq \max(n_a, n_b)$. Dies zeigt $x_n + y_n \to a + b$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n y_n - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b.$$

Mit der Dreiecksungleichung und $|st| = |s| \cdot |t|$ für alle s, t in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ folgt

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b|.$$

Die konvergente Folge $(x_n)_n$ ist beschränkt (Proposition 3.1.10), also gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $x_n \to a$ und $y_n \to b$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ und $|y_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit folgt aus der obigen Abschätzung

$$|x_n y_n - ab| \leq c \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot |b| = (c + |b|) \cdot \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Wie oben (vergleiche auch die nachfolgende Bemerkung 3.1.15) stört die Konstante $|b| + c$ nicht[41], da $\varepsilon > 0$ beliebig war; ebensowenig stört es, dass in der Abschätzung ein $\leq$-Zeichen statt eines $<$-Zeichen steht. Wir erhalten $x_n y_n \to ab$. □

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - x_n}{x_n a}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|x_n - a| < \varepsilon$ gilt. Für solche n erhalten wir

$$\Big|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\Big| < \frac{1}{|x_n|} \cdot \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Wie oben (vgl. Bemerkung 3.1.15) genügt es, eine Konstante $c > 0$ zu finden, so dass $\frac{1}{|x_n|} < c$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Konvergenz unserer Reihe und die Annahme $a \neq 0$ liefern, dass fast alle x_n in $B_{\frac{|a|}{2}}(a)$ liegen. Für fast alle n gilt also mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|x_n| = |a - (a - x_n)| \geq |a| - |a - x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

und somit $\frac{2}{|a|} > \frac{1}{|x_n|}$ wie gewünscht.

3.1.15. Im letzten Beweis haben wir gesehen, dass es auf positive Konstanten bei „$< \varepsilon$“ nicht ankommt. Wir halten dies fest.

Bemerkung 3.1.16. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge. Sei $a \in \mathbb{R}^m$. Sei $c > 0$ reell. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\|x_n - a\| < \varepsilon$ gilt.

(b) Für alle $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\|x_n - a\| \leq c \cdot \varepsilon'$ gilt.

Für den Beweis von (a) $\implies$ (b), gegeben $\varepsilon' > 0$, wähle man $\varepsilon = c\varepsilon' > 0$. Für den Beweis von (b) $\implies$ (a), gegeben $\varepsilon > 0$, wähle man $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2c} > 0$.

Proposition 3.1.17. *Gelte $x_n \to a$ und $y_n \to b$ in $\mathbb{R}^m$, und gelte $\lambda_n \to \mu$ in $\mathbb{R}$. Dann gelten $x_n + y_n \to a + b$ und $\lambda_n.x_n \to \mu.a$ in $\mathbb{R}^m$.*

3.1.18. In Limes-Schreibweise gelten also

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) + \big(\lim_{n\to\infty} y_n\big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(\lambda_n.x_n) = \big(\lim_{n\to\infty} \lambda_n\big).\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big).$$

Beweis. Für die Aussage über die Folge $(x_n + y_n)_n$ ersetze man im Beweis von Proposition 3.1.11.(a) den reellen Betrag $|-|$ durch die Norm $\|-\|$ auf $\mathbb{R}^m$. Für die Aussage über die Folge $(\lambda_n.x_n)_n$ beachte man

$$\|\lambda_n.x_n - \lambda.a\| = \|\lambda_n.(x_n - a) + (\lambda_n - \lambda).a\| \leq |\lambda_n| \cdot \|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|a\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Rest des Beweises geht dann analog zum Beweis von Proposition 3.1.11.(b). □

Lemma 3.1.19. *Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ eine reelle Folge mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$. Gilt $x_n \leq c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt auch $a \leq c$.*

Aus $x_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt analog $a \geq c$.

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann gilt $a > c$. Sei $\varepsilon := a - c > 0$. Wegen $x_n \to a$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $x_n - c = x_n - a + a - c > -\varepsilon + \varepsilon = 0$. Dies widerspricht der Annahme $x_n \leq c$. □

Lemma 3.1.20. *Seien $x_n \to a$ und $y_n \to b$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a \leq b$.*

Beweis. Die Folge $(x_n - y_n)_n$ konvergiert gegen $a - b$, nach Proposition 3.1.11 (und 3.1.12). Ihre Glieder sind ≤ 0. Also erfüllt der Grenzwert $a - b \leq 0$ nach Lemma 3.1.19. □

Aufgabe 3.1.21. Aus $x_n \to a$ in $\mathbb{R}$ folgt $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to a$.

[41] Auch nicht, wenn sie Null ist.

3.1.22. Die folgende Definition ist ein Spezialfall der Definition 2.6.2, denn relle Folgen sind Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir schreiben sie dennoch explizit auf.

Definition 3.1.23. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

(a) **monoton wachsend,** falls $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(b) **streng** oder **strikt monoton wachsend,** falls $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(c) **monoton fallend,** falls $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(d) **streng** oder **strikt monoton fallend,** falls $x_n > x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition 3.1.24. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt** bzw. **nach unten beschränkt** bzw. **beschränkt**, falls die Teilmenge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{R}$ diese Eigenschaft hat (siehe Definition 2.4.66; diese Definition von Beschränktheit reeller Folgen ist nach Aufgabe 2.4.131 kompatibel mit Definition 3.1.9). Hat diese Teilmenge ein Supremum bzw. Infimum, so nennt man dieses das **Supremum** bzw. **Infimum der Folge** und notiert es als $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ bzw. $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

3.1.25. Jede monoton wachsende/fallende reelle Folge ist automatisch nach unten/oben beschränkt.

Proposition 3.1.26. *Jede monotone beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.*
Ausführlich: Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge konvergiert gegen ihr Supremum. Analog konvergiert jede monoton fallende, nach unten beschränkte reelle Folge gegen ihr Infimum.

Beweis. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Weil $\mathbb{R}$ die Supremumseigenschaft hat, existiert $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gelten $x_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_{n_0} > M - \varepsilon$ ist. Da $(x_n)_n$ monoton wachsend ist, folgt auch $x_n > M - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir erhalten $0 \leq M - x_n < \varepsilon$ und somit $|x_n - M| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ wie gewünscht.

Die zweite Aussage wird analog bewiesen, oder per Übergang von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die erste zurückgeführt. □

Lemma 3.1.27. *Die Folge* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ *konvergiert.*

3.1.28. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wird sich später als *Eulersche Zahl* $e = \exp(1) = 2,718281...$ herausstellen (siehe Beispiel 5.1.20). Vergleiche Zinseszins: Bei jährlichem Zinssatz von $1 = 100\%$ wächst das Kapital pro Jahr um den Faktor $(1+1)$. Bei monatlichem Zinssatz von $\frac{1}{12} = \frac{100}{12}\%$ ist der jährliche Wachstumsfaktor $(1+\frac{1}{12})^{12} = 2.613035$. Bei täglicher Verzinsung mit $\frac{1}{365} = \frac{100}{365}\%$ ist der jährliche Wachstumsfaktor $(1+\frac{1}{365})^{365} = 2,714567$.

Beweis. Definiere

$$x_n := \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad y_n := \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1},$$

für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir werden sogar zeigen:

- $(x_n)_n$ ist monoton wachsend,
- $(y_n)_n$ ist monoton fallend,
- beide Folgen sind konvergent und haben denselben Grenzwert.

Sei $n \geq 2$. Mit der Bernoullischen Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq -1$ (Satz 2.5.10) erhalten wir

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n = \left(1-\tfrac{1}{n^2}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1-\tfrac{1}{n}$$

und durch Umordnen

$$x_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geq \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1}.$$

Ähnlich gilt

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\tfrac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+\tfrac{1}{n}.$$

und liefert per Umordnen

$$y_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n = y_{n-1}.$$

Somit ist $(x_n)_n$ monoton wachsend und $(y_n)_n$ (streng) monoton fallend. Offensichtlich gilt $x_n \leq x_n(1+\frac{1}{n}) = y_n$ für alle n. Folglich sind beide Folgen monoton und beschränkt und konvergieren daher (Proposition 3.1.26). Aus $y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ folgt mit Proposition 3.1.11 und bereits bekannten Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\cdot\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} 1}_{=1} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}}_{=0}\Big) = \lim_{n\to\infty} x_n. \qquad \square$$

Ende der 13. Vorlesung am 18.11.2019.

Definition 3.1.29. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge. Dann heißt $a \in \mathbb{R}^m$ ein **Häufungspunkt von** $(x_n)_n$, falls in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgeglieder liegen.

Lemma 3.1.30. *Gilt $x_n \to a$ in $\mathbb{R}^m$, so ist a der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_n$.*

Beweis. Sicherlich ist a ein Häupfungspunkt. Sei $b \in \mathbb{R}^m$ mit $b \neq a$. Setze $\varepsilon := \frac{\|a-b\|}{2} > 0$. Dann liegen fast alle Folgeglieder in $B_\varepsilon(a)$, welches wegen der Dreiecksungleichung disjunkt von $B_\varepsilon(b)$ ist (denn die Annahme $x \in B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b)$ führt zum Widerspruch $\|a-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| < 2\varepsilon = \|a-b\|$). Also liegen nur endlich viele Folgeglieder in $B_\varepsilon(b)$, d. h. b ist kein Häufungspunkt. $\square$

Beispiele 3.1.31.

(a) Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Folgen mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Definiere eine Folge durch

$$z_n := \begin{cases} x_n & \text{für gerades } n, \\ y_n & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Dann besitzt z_n die Häufungspunkte a und b (die auch übereinstimmen können).

(b) Die Folge

$$x_n := \begin{cases} 0 & \text{für gerades } n, \\ n & \text{für ungerades } n, \end{cases}$$

hat genau einen Häufungspunkt, nämlich Null, ist aber nicht konvergent.

(c) Sei $(x_n)_n$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ (eine solche existiert nach Aufgabe 2.4.50). Dann divergiert diese Folge und jede reelle Zahl ist ein Häufungspunkt dieser Folge. Der Beweis ist dem Leser überlassen (verwende Korollar 2.5.8).

Definition 3.1.32. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge. Ist $0 \leq k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennen wir die Folge

$$(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{k_0}, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots)$$

eine **Teilfolge** unserer Folge.

3.1.33. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert offensichtlich gegen denselben Grenzwert.

Proposition 3.1.34. *Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge. Dann ist $a \in \mathbb{R}^m$ genau dann ein Häufungspunkt dieser Folge, wenn eine Teilfolge gegen a konvergiert.*

Beweis.

„$\Leftarrow$“: Konvergiert eine Teilfolge von $(x_n)_n$ gegen a, so ist a nach Definition ein Häufungspunkt.

„$\Rightarrow$“: Wir definieren die Teilfolge induktiv: Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Definition eines Häufungspunktes gibt es ein $k_1 > k_0$ mit $x_{k_1} \in B_1(a)$. Dann gibt es $k_2 > k_1$ mit $x_{k_2} \in B_{1/2}(a)$, $k_3 > k_2$ mit $x_{k_3} \in B_{1/3}(a)$, ... Wegen $\|x_{k_n} - a\| < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ erhalten wir, dass die Folge $(x_{k_n})_n$ gegen a konvergiert. $\square$

3.1.35. Wir versehen die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ wie folgt mit einer Ordnung: Auf $\mathbb{R}$ nehmen wir die übliche Ordnung $\leq$. Weiter gelte $-\infty \leq a \leq +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Oft schreiben wir ∞ statt $+\infty$.

Definition 3.1.36. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, wenn sie in der folgenden Liste auftaucht, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a \leq b$ beliebig sind:

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ (**offenes Intervall**)
(ii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$ (**halboffenes Intervall**)
(iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$ (**halboffenes Intervall**)
(iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ (**abgeschlossenes Intervall**)

Die **Randpunkte** all dieser Intervalle sind a und b. Im Fall $a, b \in \mathbb{R}$ ist die **Länge** dieser Intervalle $|b - a|$.

Auf den Seiten der Randpunkte $\pm\infty$ verwendet man üblicherweise Runde klammern, man schreibt also beispielsweise $[0, \infty)$ statt $[0, \infty]$. Beachte, dass die leere Menge auch ein Intervall ist.

Beispiel 3.1.37. Für $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist die ε-Umgebung um x (= der ε-Ball um x, siehe Definition 3.1.6) das offene Intervall mit Randpunkten $x - \varepsilon$ und $x + \varepsilon$, in Formeln $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Satz 3.1.38 (Bolzano-Weierstraß[42])**.** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt (äquivalent: eine konvergente Teilfolge).*

Beweis. Seien $a_0 < b_0$ reelle Zahlen mit $a_0 \leq x_n \leq b_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren induktiv Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$: Seien a_n und b_n für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits definiert. Enthält das Intervall $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ unendlich viele Folgeglieder, so setzen wir $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$. Sonst setzen wir $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$ und $b_{n+1} := b_n$. In jedem Fall enthält das neue Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ebenfalls unendlich viele Folgeglieder.

Die Folge $(a_n)_n$ ist monoton wachsend, die Folge $(b_n)_n$ ist monoton fallend. Wegen der offensichtlichen Ungleichung $a_n \leq b_n$ für alle n sind beide Folgen beschränkt und konvergieren daher (Proposition 3.1.26). Setze $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Wir behaupten $a = b$. Per Induktion erhalten wir $b_n - a_n = 2^{-n} \cdot (b_0 - a_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $((2^{-n}))_n = ((\frac{1}{2^n}))_n$ gegen Null konvergiert, folgt $b - a = \lim(b_n - a_n) = (\lim 2^{-n}) \cdot (b_0 - a_0) = 0$ aus Proposition 3.1.11, also $b = a$.

Wir behaupten, dass a ein Häufungspunkt der Folge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to a$ gelten $a_n, b_n \in B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition des Intervalles gilt $[a_n, b_n] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Im abgeschlossenen Intervall liegen nach Konstruktion unendlich viele Folgeglieder. Somit gilt dies auch für das offene Intervall. Daher ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_n$. □

3.1.39. Die im Beweis konstruierte Folge $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen ist ein Beispiel einer *Intervallschachtelung.*

Proposition 3.1.40. *Für jeden Vektor $v = (v^1, \ldots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ gilt*[43]*:*

$$\max(|v^1|, \ldots, |v^m|) \leq \|v\| \leq \sqrt{m} \cdot \max(|v^1|, \ldots, |v^m|). \tag{3.1.1}$$

Beweis. Sei der Index $s \in \{1, \ldots, m\}$ so gewählt, dass $|v^s| = \max(|v^1|, \ldots, |v^m|)$ gilt. Dann gilt auch $(v^s)^2 = \max((v^1)^2, \ldots, (v^m)^2)$, und wir erhalten

$$|v^s| = \sqrt{(v^s)^2} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^m (v^j)^2}}_{=\|v\|} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m (v^s)^2} = \sqrt{m(v^s)^2} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{(v^s)^2} = \sqrt{m} \cdot |v^s|.$$

□

Korollar 3.1.41 (Konvergenz = Konvergenz in jeder Koordinate)**.** *Gegeben eine Folge*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((x_n^i)_{1\leq i\leq m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}^m$ und ein $a \in \mathbb{R}^m$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- *Für alle $i = 1, \ldots, m$ konvergiert die Folge $(x_n^i)_n$ gegen a^i.*
- *Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert gegen a.*

[42] Weierstraß hat einige Jahre in Paderborn gelebt, siehe [Wik19, Weierstraß].

[43] Wir verwenden hier obere Indizes für die Koordinaten des Vektores v, vgl. 3.1.2.

Insbesondere konvergiert eine Folge $(z_n)_n \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ komplexer Zahlen genau dann, wenn die Folgen der Realteile $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ und der Imaginärteile $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ konvergieren.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.1.40, indem man in (3.1.1) v durch $x_n - a$ ersetzt. Ausführlich:

Gelte $x_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\|x_n - a\| < \varepsilon$ für fast alle n. Die erste Ungleichung in (3.1.1) zeigt dann für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$, dass $|x_n^i - a^i| < \varepsilon$ für fast alle n gilt. Dies zeigt $x_n^i \to a^i$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Gelte $x_n^i \to a^i$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $N_i \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_i$ gilt $|x_n^i - a^i| < \varepsilon$. Sei $N := \max(N_1, \dots, N_m)$. Dann gilt $|x_n^i - a^i| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Dies bedeutet

$$\max(|x_n^1 - a^1|, \dots, |x_n^m - a^m|) < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Die zweite Ungleichung in (3.1.1) zeigt dann

$$\|x_n - a\| < \sqrt{m} \cdot \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Es gilt also $x_n \to a$. □

Korollar 3.1.42 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(x_n)_n$ einen Häufungspunkt (äquivalent: eine konvergente Teilfolge).*

Beweis. Sei $r > 0$ so, dass $x_n \in B_r(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ist die Folge $(x_n^i)_n$ beschränkt, denn nach Proposition 3.1.40 gilt $|x_n^i| \leq \|x_n\| < r$. Nach Bolzano-Weierstraß 3.1.38 gibt es eine Teilfolge von $(x_n)_n$, so dass die erste Komponente konvergiert. Davon gibt es eine Teilfolge, so dass auch die zweite Komponente konvergiert. Nach m Schritten erhalten wir so eine Teilfolge, bei der alle Komponenten konvergieren. Nach Korollar 3.1.41 konvergiert diese Teilfolge in $\mathbb{R}^m$. □

Proposition 3.1.43. *Eine beschränkte Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass jede konvergente Folge genau einen Häufungspunkt hat (Lemma 3.1.30).

Habe umgekehrt unsere Folge genau einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}^m$. Wir behaupten, dass unsere Folge gegen a konvergiert. Sonst gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgeglieder nicht in $B_\varepsilon(a)$ liegen. Betrachte eine entsprechende Teilfolge $(x_{n_k})_k \subset \mathbb{R}^m \setminus B_\varepsilon(a)$. Als beschränkte Folge besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.1.42 einen Häufungspunkt $b \in \mathbb{R}$ (welcher dann auch ein Häufungspunkt der ursprúnglichen Folge ist). Somit gibt es ein $k' \in \mathbb{N}$ (sogar unendlich viele) mit $|x_{n_{k'}} - b| < \varepsilon$. Wir erhalten

$$|a - b| \geq \underbrace{|a - x_{n_{k'}}|}_{\geq \varepsilon} - \underbrace{|x_{n_{k'}} - b|}_{< \varepsilon} > \varepsilon - \varepsilon = 0$$

und somit $a \neq b$. Dies widerspricht der Annahme, dass unsere Folge nur einen Häufungspunkt hat. Dies zeigt die Konvergenz gegen a. □

Satz 3.1.44. *Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge. Angenommen, jede Teilfolge besitzt eine konvergente Teilfolge und die Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen stimmen überein. Dann konvergiert bereits die gesamte Folge.*

Beweis. Wir behaupten, dass unsere Folge beschränkt ist: Sonst setze $n_0 := 0$. Sei n_1 so, dass $\|x_{n_1}\| > \|x_{n_0}\| + 1$ gilt. Sei n_2 so, dass $\|x_{n_2}\| > \|x_{n_1}\| + 2$ gilt, etc. Dies liefert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ unserer Folge, die offensichtlich keine konvergente Teilfolge hat (betrachte die Folge der Beträge und verwende Proposition 3.1.10).

Nach Proposition 3.1.43 genügt es zu zeigen, dass unsere Folge genau einen Häufungspunkt hat. Dies folgt aber aus Proposition 3.1.34. □

Definition 3.1.45. Eine Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ heißt **Cauchyfolge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k, l \geq n_0$ die Ungleichung $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ gilt. In Quantorenschreibweise:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall k, l \geq n_0 \colon \|x_k - x_l\| < \varepsilon.$$

Bemerkung 3.1.46. Die Cauchyfolgenbedingung ist äquivalent zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall k \geq n_0 \colon \forall l \in \mathbb{N} \colon \|x_k - x_{k+l}\| < \varepsilon.$$

Satz 3.1.47 (Cauchy-Kriterium für Folgen)**.** *Eine Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. Sei unsere Folge konvergent mit Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $x_n \to a$ konvergiert, gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ schon $\|x_n - a\| < \varepsilon$ gilt. Seien nun $k, l \geq n_0$. Es folgt

$$\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - a\| + \|a - x_l\| \leq 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist unsere Folge eine Cauchy-Folge.

Ende der 14. Vorlesung am 21.11.2019.

Sei umgekehrt unsere Folge $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k, l \geq N$ bereits $\|x_k - x_l\| < 1$ gilt. Setze $r := 1 + \max\{\|x_i - x_N\| \mid 0 \leq i \leq N-1\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $\|x_n\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \leq r + \|x_N\|$. Also ist unsere Folge beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß 3.1.42 hat sie einen Häufungspunkt a. Für die Konvergenz reicht es nach Proposition 3.1.43 zu zeigen, dass sie keinen weiteren Häufungspunkt hat.

Angenommen, $b \neq a$ wäre ein weiterer Häufungspunkte. Setze $\varepsilon := \frac{1}{3}\|a - b\| > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ für alle $k, l \geq n_0$ gilt. Da a und b Häufungspunkte sind, gibt es $k, l \geq n_0$ mit $\|a - x_k\| < \varepsilon$ und $\|a - x_l\| < \varepsilon$; es folgt der Widerspruch

$$\|a - b\| \leq \|a - x_k\| + \|x_k - x_l\| + \|x_l - b\| < 3\varepsilon = \|a - b\| \qquad \square.$$

Beispiel 3.1.48. Wir definieren induktiv eine Folge in $\mathbb{R}$ durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ für $n \geq 1$. Wir behaupten, dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge ist. Per Induktion sehen wir $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1+k} - x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_{n+k}} - \frac{1}{1 + x_n} = \frac{x_n - x_{n+k}}{(1 + x_n)(1 + x_{n+k})} \leq \frac{|x_n - x_{n+k}|}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}$$

und daraus

$$|x_{n+1+k} - x_{n+1}| \leq \tfrac{4}{9}|x_{n+k} - x_n|.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $\varphi_k(n) := |x_{n+k} - x_n| \geq 0$ und erhalten $\varphi_k(n+1) \leq \frac{4}{9}\varphi_k(n)$. Per Induktion erhalten wir daraus $\varphi_k(n) \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \varphi_k(0)$. Da $\varphi_k(0) \leq 2$ für alle k gilt, gilt

$$|x_{n+k} - x_n| = \varphi_k(n) \leq 2\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Weil die rechte Seite nicht k abhängt und für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Nach dem Cauchy-Kriterium 3.1.47 konvergiert sie. Sei a ihr Grenzwert.

Gehen wir nun in der definierenden Gleichung auf beiden Seiten zum Grenzwert über, so erhalten wir mit Proposition 3.1.11

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x_n} = \frac{1}{1 + \lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{1 + a},$$

also $a^2 + a - 1 = 0$. Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, gilt

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Wegen $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \geq 0$ nach Lemma 3.1.19. Damit haben wir den Grenzwert zu $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ bestimmt (wir haben also den Kettenbruch $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$ bestimmt, vgl. [Wik19, Kettenbruch]).

Aufgabe 3.1.49. Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ reelle Zahlen. Die induktiv definierte Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ für $n \geq 1$ konvergiert gegen $\sqrt{a}$.

3.2. **Reihen.**

Definition 3.2.1. Eine **Reihe** $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$ besteht aus einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ und der ihr zugeordneten Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ der **Partialsummen**, wobei

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

die n-te Partialsumme ist. Die Elemente a_n heißen die **Glieder** der Reihe. Die Reihe $((a_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ heißt **konvergent**, falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert; der Grenzwert dieser Folge heißt in diesem Fall der **Wert** oder die **Summe** der Reihe und wird als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \sum a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

notiert. Eine **divergente** Reihe ist eine nicht konvergente Reihe.

Analog sind, für beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$, Reihen der Form $((a_n))_{n\geq n_0}$ definiert, mit n-ter Partialsumme $s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ und Schreibweise $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ für den Limes im Fall der Konvergenz.

Proposition 3.2.2 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** *Eine Reihe* $((a_n))_n \subset \mathbb{R}^m$ *ist genau dann konvergent, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq n_0$ *und alle* $m \in \mathbb{N}$ *die folgende Abschätzung gilt:*

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\| < \varepsilon$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen 3.1.47. □

Definition 3.2.3 (Nullfolge)**.** Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert.

Korollar 3.2.4 (Notwendige Bedingung für Konvergenz)**.** *Konvergiert die Reihe* $((a_n))_n$*, so ist* $(a_n)_n$ *eine Nullfolge.*

Beweis. Wähle $m = 0$ in Proposition 3.2.2. □

Beispiele 3.2.5.

(a) **Geometrische**[44] **Reihe**: Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $-1 < q < 1$. Dann konvergiert die **geometrische Reihe** $((q^n))_{n\in\mathbb{N}}$ und hat den Wert $\frac{1}{1-q}$.

Beweis. Wir setzen und berechnen

$$\begin{aligned} s_n &:= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n, \\ qs_n &= \quad\; q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}, \\ (1-q)s_n &= 1 - q^{n+1}, \\ s_n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen $\frac{1}{1-q}$ (Proposition 3.1.11 und Beispiel 3.1.8.(c)). Also ist die geometrische Reihe konvergent und hat den Wert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. □

Skalare Vielfache $((cq^n))_n$ der geometrischen Reihe werden ebenfalls als geometrische Reihe bezeichnet und sind natürlich konvergent (klar bzw. Bemerkung 3.2.6). Beispiele für geometrische Reihen sind

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

$$0,99999\ldots = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1. \tag{3.2.1}$$

(b) Die Reihe $(((-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, da $(-1)^n \not\to 0$ gilt.

(c) Die **harmonische Reihe** $\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ erfüllt zwar die notwendige Bedingung $\frac{1}{n} \to 0$ für Konvergenz. Sie konvergiert aber nicht, da sie das Cauchy-Kriterium für Reihen 3.2.2 verletzt:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Man sieht daraus leicht, dass jede natürliche Zahl von einer geeigneten Partialsumme übertroffen wird, vgl. „überhängender Turm“ aus Dominosteinen an Tischkante, [Wik19, Harmonische Reihe, Anwendungsbeispiel].

(d) Die Reihe $((\frac{1}{n(n-1)}))_{n\geq 2}$ konvergiert mit Grenzwert

$$\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

[44] In der Folge $(1, q, q^2, q^3, \ldots)$ ist für $q > 0$ jedes Folgenglied nach dem ersten das *geometrische Mittel* seines Vorgängers und seines Nachfolgers.

Beweis. Per Induktion berechnet man die m-te Partialsumme zu

$$s_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{m}, \tag{3.2.2}$$

für $m \geq 2$. Für $m \to \infty$ gilt $s_m = 1 - \frac{1}{m} \to 1$. □

Bemerkung 3.2.6.

(a) Sind $((a_n))_n$ und $((b_n))_n$ konvergente Reihen, so ist auch die Reihe $((a_n + b_n))_n$ konvergent mit Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Ist $((a_n))_n$ eine konvergente Reihe und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar, so ist auch die Reihe $((\lambda a_n))_n$ konvergent mit Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beide Behauptungen folgen aus Proposition 3.1.17.

(b) Eine Reihe $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn das Endstück $((a_n))_{n\geq k}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ konvergiert, und im Fall der Konvergenz gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$: Man wende Proposition 3.1.17 auf $\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{N} a_n$ für alle $N \geq k$ an und betrachte $N \to \infty$. Endlich viele Glieder am Anfang spielen also keine Rolle für die Konvergenz, beeinflussen jedoch den Wert der Reihe.

Proposition 3.2.7. *Sei $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt, wenn die Reihe konvergiert. Im Fall der Konvergenz ist die Summe der Reihe das Supremum der Partialsummen.*

Beweis. Die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$ ist wegen $a_n \geq 0$ monoton wachsend. Ist sie nach oben beschränkt, so konvergiert sie gegen ihr Supremum $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$ (Proposition 3.1.26). Ist sie nicht nach oben beschränkt, so divergiert sie offensichtlich. □

Beispiel 3.2.8. Sei $s \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Dann konvergiert die Reihe $\left(\left(\frac{1}{n^s}\right)\right)_{n\geq 1}$.

Beweis. Alle Glieder der Reihe sind ≥ 0. Für alle $n \geq 2$ gilt $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Damit können wir die m-te Partialsumme wie folgt nach oben abschätzen.

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{m^s} \leq 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \dots + \frac{1}{m(m-1)} \underset{\text{Beispiel 3.2.5.(d)}}{\overset{(3.2.2)\text{ in}}{=}} 2 - \frac{1}{m} \leq 2$$

Konvergenz der Reihe folgt damit aus Proposition 3.2.7.[45] □

Bemerkung: Die Werte $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dieser Reihe für $s \in \{2, 3, \dots\}$ sind nicht leicht zu berechnen, aber höchst interessant: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, vgl. [Wik19, Basler Problem, Riemannsche ζ-Funktion].

Ende der 15. Vorlesung am 25.11.2019.

Definition 3.2.9. Eine Reihe $((a_n))_n$ in $\mathbb{R}^m$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $((\|a_n\|))_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Die Reihe heißt **bedingt konvergent**, falls sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Proposition 3.2.10. *Jede absolut konvergente Reihe $((a_n))_n$ in $\mathbb{R}^m$ konvergiert und ihr Wert erfüllt*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|.$$

[45] Ein fast identischer Alternativbeweis verwendet das Majorantenkriterium 3.2.13, das wir in Bälde beweisen, und Beispiel 3.2.5.(d).

Beweis. **Konvergenz:** Für alle natürlichen Zahlen $n \geq m \geq n_0$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|a_k\|.$$

Da die Reihe $((\|a_n\|))_n$ konvergiert, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen 3.2.2 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die rechte Seite unserer Abschätzung kleiner als ε ist. Dies gilt dann auch für die linke Seite. Dies bedeutet nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen 3.2.2, dass die Reihe $((a_n))_n$ konvergiert.

Normabschätzung: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| \sum_{n=0}^{k} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{k} \|a_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|,$$

denn die erste Abschätzungen folgt aus der Dreiecksungleichung, die zweite aus Proposition 3.2.7.

Die bereits gezeigte Konvergenz der Reihe $((a_n))$, also der Folge $(\sum_{n=0}^{k} a_n)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, impliziert Konvergenz der Folge $(\|\sum_{n=0}^{k} a_n\|)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\left\| \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \right\|$ nach Proposition 3.1.10.(c). Die rechte Seite als obere Schranke für alle Folgeglieder ist dann wie gewünscht auch eine obere Schranke für den Grenzwert (Lemma 3.1.19). □

3.2.11. Sei $((a_n))_n$ eine absolut konvergente Reihe. Ist $0 \leq k_0 < k_1 < \dots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlem, so konvergiert die „Teilreihe“ $((a_{k_n}))_n$ ebenfalls absolut. Dies folgt aus zweimaliger Anwendung von Proposition 3.2.7 (denn $\sum_{n=0}^{N} \|a_{k_n}\| \leq \sum_{n=0}^{k_N} \|a_n\|$). Insbesondere ist jedes Endstück einer absolut konvergenten Reihe absolut konvergent.

3.2.12. Sind $((a_n))_n$ und $((b_n))_n$ absolut konvergente Reihen, so ist auch die Reihe $((a_n + b_n))_n$ absolut konvergent. Dies folgt sofort aus der Dreiecksungleichung und Proposition 3.2.7 (denn $\sum_{k=0}^{n} \|a_k + b_k\| \leq \sum_{k=0}^{n}(\|a_k\| + \|b_k\|) = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| + \sum_{k=0}^{n} \|b_k\|$). Ist $((a_n))_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar, so ist auch die Reihe $((\lambda.a_n))_n$ absolut konvergent (klar bzw. Proposition 3.1.17).

Proposition 3.2.13 (Majorantenkriterium)**.** *Seien $((a_n))_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}^m$ und $((b_n))_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Ist $((b_n))_n$ konvergent und gilt $\|a_n\| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $((a_n))_n$ absolut.*

*Wir nennen $((b_n))_n$ in diesem Fall eine **konvergente Majorante** von $((a))_n$.*

Im Fall $\|a_n\| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|\sum a_n\| \leq \sum \|a_n\| \leq \sum b_n$.

Beweis. Indem wir endlich viele Glieder der Reihe $((b_n))_n$ abändern, können wir (nach Bemerkung 3.2.6.(b)). ohne Einschränkung annehmen, dass $\|a_n\| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir verwenden Proposition 3.2.7 zweimal: Zunächst ist die Folge der Partialsummen von $((b_n))$ nach oben beschränkt durch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$; dasselbe gilt dann für die Folge der Partialsummen von $((\|a_n\|))_n$; also konvergiert $((\|a_n\|))_n$ und ihre Summe erfüllt $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$; somit ist $((a_n))_n$ absolut konvergent. Die Abschätzung $\|\sum a_n\| \leq \sum \|a_n\|$ ist Proposition 3.2.10. □

Beispiel 3.2.14. Beispiel unter Verwendung von minimalem Schulwissen über den Logarithmus: Die Reihe $\left(\left(\frac{1}{(\log n)^n}\right)\right)_{n\geq 2}$ konvergiert, denn für $n \geq 9$ gilt $\log n \geq 2$ und somit ist die geometrische Reihe $(((\frac{1}{2})^n))_n$ eine konvergente Majorante.

Beispiel 3.2.15 (Dezimaldarstellung)**.** Sei $(d_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von Ziffern $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Dann ist die Reihe $((d_i 10^{-i}))_{i\geq 1}$ konvergent mit Wert $\in [0, 1]$; ihr Wert $\sum_{i=1}^{\infty} d_i 10^{-i} \in [0, 1]$ wird in der Regel in Dezimaldarstellung als $0, d_1 d_2 d_3 \dots$ notiert.

Beweis. Wir verwenden das Majorantenkriterium 3.2.13. Die geometrische Reihe $((9\cdot 10^{-i}))_{i\geq 1}$ ist konvergent mit Wert 1 nach (3.2.1) und eine konvergente Majorante unserer Reihe. Der Wert dieser Reihe ist somit ≤ 1 und offensichtlich ≥ 0. □

Proposition 3.2.16 (Darstellung reeller Zahlen im Dezimalsystem)**.** *Sei $x \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es Ziffern $d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, für alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$, mit*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i}.$$

Wir schreiben $x = 0,d_1d_2d_3\ldots$ und nennen dies die ***Dezimaldarstellung von*** *x. Stehen in dieser Darstellung ab einer Position nur noch Nullen, so lassen wir diese weg. Die Ziffer d_i heißt die* ***i-te Nachkommastelle*** *von x. Die Folge $(d_1, d_2, \ldots)$ der Nachkommastellen ist eindeutig bestimmt, falls wir nicht erlauben, dass ab einer Position alle folgenden Nachkommastellen Neun sind.*

Ist $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl mit $n \leq y$, so definieren wir $x := y - n$ und erhalten mit den zu x gehörigen d_i's

$$y = n + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i}$$

und schreiben $y = n, d_1d_2d_3\ldots$. Ist $z \in \mathbb{R}_{<0}$, so schreiben wir ein Minuszeichen vor den Ausdruck für $-z$, z. B. $x = -17,38$.

Jede solche Darstellung liefert eine reelle Zahl.

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur im Fall $x \in [0,1)$. Wähle induktiv $d_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ maximal mit $\sum\limits_{i=0}^{n} d_i \cdot 10^{-i} \leq x$. Insbesondere gilt $d_0 = 0$ wegen $x < 1$. Auf Grund der maximalen Wahlen folgt $x - \sum\limits_{i=0}^{n} d_i \cdot 10^{-i} \in \left[0, 10^{-n}\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (im Fall $d_n < 9$ ist das klar wegen der Maximalität von d_n, im Fall $d_n = 9$ muss man d_{n-1} betrachten etc.). Die Folge $(x - \sum\limits_{i=0}^{n} d_i \cdot 10^{-i})_n$ ist also eine Nullfolge (Lemma 3.1.20). Somit folgt die behauptete Konvergenz. Nach Konstruktion gibt es kein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_N \neq 9$ und $d_i = 9$ für alle $i > N$, denn sonst ist d_N nicht maximal gewählt (denn $\sum_{i=N+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 10^{-N}$ nach (3.2.1)). Dies zeigt die Eindeutigkeit.

Wir zeigen, dass jede solche Darstellung eine reelle Zahl liefert. Ohne Einschränkung können wir uns auf den Fall ohne Minuszeichen und mit $n = 0$ zurückziehen, müssen also zeigen, dass $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i}$ eine reelle Zahl definiert. Das folgt aber aus dem Majorantenkriterium 3.2.13 mit dem Vielfachen $((9 \cdot 10^{-i}))_{i \geq 1}$ der geometrischen Reihe als konvergenter Majorante (siehe (3.2.1)). □

Proposition 3.2.17 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $((a_n))_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine reelle Zahl c mit $c < 1$, so dass*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c \tag{3.2.3}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so konvergiert die Reihe $((a_n))$ absolut.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir wieder annehmen, dass (3.2.3) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, also $|a_{n+1}| \leq c|a_n|$. Per Induktion folgt $|a_n| \leq c^n|a_0|$. Die geometrische Reihe $((c^n|a_0|))_n$ (Beispiel 3.2.5.(a)) ist somit eine konvergente Majorante der Reihe $((|a_n|))_n$. Nach dem Majorantenkriterium 3.2.13 ist $((a_n))_n$ absolut konvergent. □

Warnung 3.2.18. Die Bedingung (3.2.3) im Quotientenkriterium 3.2.17 kann nicht zu $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ abgeschwächt werden: Die harmonische Reihe $((\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ erfüllt diese abgeschwächte Bedingung, ist aber divergent (Beispiel 3.2.5.(c)).

Beispiel 3.2.19. Die Reihe $((a_n))_n = \left(\left(\frac{n}{q^n}\right)\right)_n$ mit $q > 1$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium 3.2.17 (absolut), denn wegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{q} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{q} < 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

ist jedes c mit $\frac{1}{q} < c < 1$ eine mögliche Konstante für das Quotientenkriterium (etwa $c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + 1\right) < 1$). Insbesondere gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{q^n} = 0$ nach Korollar 3.2.4 (exponentielles Wachstum versus lineares Wachstum).

Beispiele 3.2.20. Die Reihe $((a_n))_n = \left(\left(\frac{1}{n!}\right)\right)_n$ konvergiert (absolut) auf Grund des Quotientenkriteriums 3.2.17, denn es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $n \geq 1$. Ihr Grenzwert heißt **Eulersche Zahl**, notiert

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Lemma 3.2.21. *Sei $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$). Dann sind die drei durch*

$$e_n := \frac{x^n}{n!},$$

$$c_n := (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$s_n := (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

definierten Reihen $((e_n))_n$, $((c_n))_n$ *und* $((s_n))_n$ *absolut konvergent.*

Beweis. Dies ist offensichtlich im Fall $x = 0$. Im Fall $x \neq 0$ folgen alle Ausagen aus dem Quotientenkriterium 3.2.17, denn es gelten

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \geq 2|x| - 1, \tag{3.2.4}$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|x|}{2n+2} \cdot \frac{|x|}{2n+1} \leq \left(\frac{|x|}{2n}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \qquad \text{für alle } n \geq |x|,$$

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{|x|}{2n+3} \cdot \frac{|x|}{2n+2} \leq \left(\frac{|x|}{2n}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \qquad \text{für alle } n \geq |x|.$$

□

Definition 3.2.22. Die folgenden Definitionen beruhen auf Lemma 3.2.21. Die Abbildung

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

heißt **Exponentialfunktion**. Genauso heißt die durch dieselbe Formel definierte Funktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

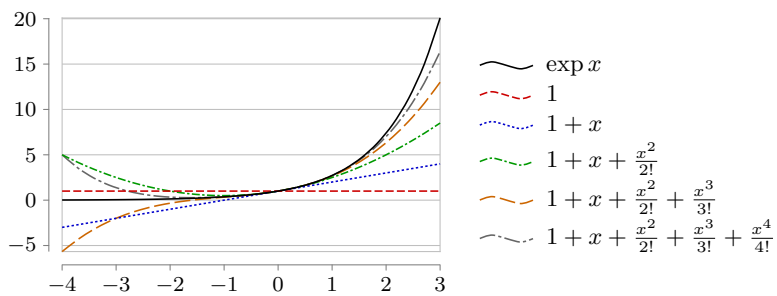


Abbildung 1. Die ersten fünf Partialsummen der Exponentialfunktion

Die **Kosinusfunktion** ist die Abbildung

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \pm \cdots = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots.$$

Genauso heißt die durch dieselbe Formel definierte Funktion $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

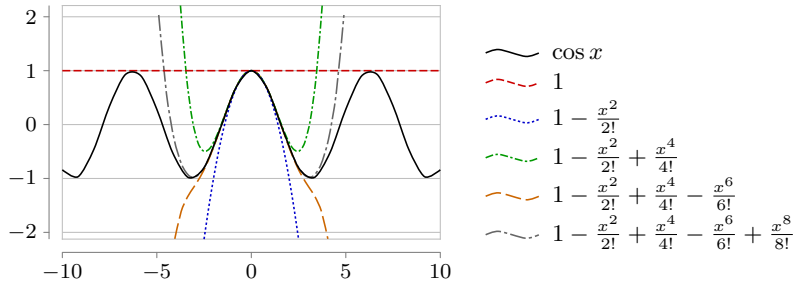


Abbildung 2. Die ersten fünf Partialsummen des Kosinus

Die **Sinusfunktion** ist die Abbildung

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \cdots = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots.$$

Genauso heißt die durch dieselbe Formel definierte Funktion $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

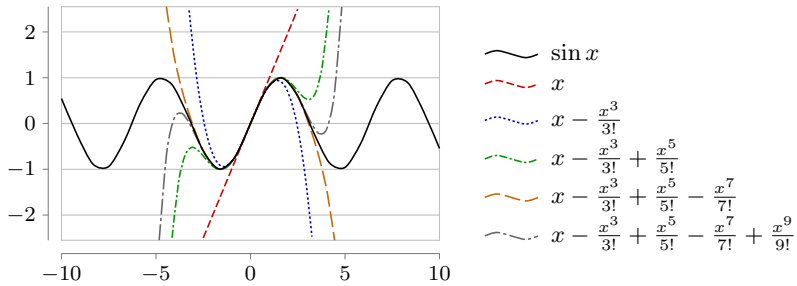


Abbildung 3. Die ersten fünf Partialsummen des Sinus

3.2.23. Der Wert der Exponentialfunktion bei 1 ist die Eulersche Zahl (Beispiel 3.2.20), in Formeln $\exp(1) = e$.

Aufgabe 3.2.24. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die **Eulersche Formel**

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x). \tag{3.2.5}$$

Weil $\cos(x)$ und $\sin(x)$ reelle Zahlen sind, folgen

$$\operatorname{Re}(\exp(ix)) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 3.2.25 (Restgliedabschätzung)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) mit $|x| \le \frac{1}{2}(N+1)$. Dann gilt*

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \right| \le 2\frac{|x|^N}{N!}.$$

Beweis. Wir verwenden die Abschätzung (3.2.4) aus dem Beweis von Lemma 3.2.21 samt der dortigen Notation. Für alle $n \ge N$ erhalten wir daraus per Induktion

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = |e_n| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} |e_N| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \frac{|x|^N}{N!}$$

für alle $n \ge N$. Das Majorantenkriterium 3.2.13 (angewendet auf die $(\ge N)$-Endstücke der Reihen) liefert wie gewünscht (unter Verwendung der geometrischen Reihe)

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \le \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \frac{|x|^N}{N!} = \frac{|x|^N}{N!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\frac{|x|^N}{N!}. \qquad \square$$

Ende der 16. Vorlesung am 28.11.2019.

Beispiel 3.2.26. Die Restgliedabschätzung in Lemma 3.2.25 ist nützlich zur numerischen Berechnung von $\exp(x)$ und speziell zur Berechnung der Eulerschen Zahl $e = \exp(1)$. Sei $N = 16$. Dann gilt $\frac{2}{N!} \le 9.5589 \cdot 10^{-14} \le 10^{-13}$, und somit unterscheidet sich

$$\sum_{n=0}^{15} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots + \frac{1}{1\,307\,674\,368\,000} = 2,718\,281\,828\,458\,995...$$

von der Eulerschen Zahl e höchstens um $10^{-13} = 0,000\,000\,000\,000\,1$. Damit kennen wir e bis zur 11. Nachkommastelle.

Satz 3.2.27 (Cauchy-Produkt von Reihen)**.** *Seien $((a_n))_n$ und $((b_n))$ absolut konvergente Reihen reeller (oder komplexer) Zahlen. Setze*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Dann ist auch die Reihe $((c_n))$ absolut konvergent mit Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big). \tag{3.2.6}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Reihe $((c_n))$ und bestimmen ihren Grenzwert; danach zeigen wir ihre absolute Konvergenz.

Seien $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ und $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ die n-ten Partialsumme. Setze $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (diese Ausdrücke sind wohldefiniert auf Grund der (absoluten) Konvergenz).

Konvergenz von $((c_n))_n$ gegen AB, d. h. $C_n \to AB$: Sei $D_n := A_n \cdot B_n$. Proposition 3.1.11 liefert die Konvergenz

$$D_n = A_n \cdot B_n \to AB.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $(D_n - C_n)_n$ eine Nullfolge ist (denn Proposition 3.1.11 liefert dann $C_n = D_n - (D_n - C_n) \to AB - 0 = AB$). Es gilt (mit hoffentlich selbsterklärender Notation)

$$D_n - C_n = \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} a_i b_j - \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n \\ i+j \le n}} a_i b_j = \sum_{(i,j) \in \Delta_n} a_i b_j, \tag{3.2.7}$$

wobei

$$\Delta_n := \{(i,j) \in \{0,\dots,n\} \times \{0,\dots,n\} \mid i + j > n\}.$$

(Die Summe geht über alle Indizes (i,j) „echt oberhalb der Diagonale“ in einem Quadrat; male Bild.)

Seien $\overline{A}_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ und $\overline{B}_n := \sum_{k=0}^{n} |b_k|$ die n-ten Partialsummen der Betragsfolgen und setze $\overline{A} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\overline{B} := \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ (wohldefiniert auf Grund der absoluten Konvergenz). Setzen wir $\overline{D}_n := \overline{A}_n \cdot \overline{B}_n$, so liefert Proposition 3.1.11 wie oben die Konvergenz

$$\overline{D}_n = \overline{A}_n \cdot \overline{B}_n \to \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Insbesondere ist $(\overline{D}_n)_n$ eine Cauchy-Folge (nach dem Cauchy-Kriterium 3.1.47). Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass insbesondere für alle $n \ge n_0$

$$|\overline{D}_n - \overline{D}_{n_0}| < \varepsilon$$

gilt. Es gilt

$$\overline{D}_n - \overline{D}_{n_0} = \sum_{(i,j) \in \Gamma_{n,n_0}} |a_i| \cdot |b_j|,$$

wobei

$$\Gamma_{n,n_0} := \{(i,j) \in \{0,\dots,n\} \times \{0,\dots,n\} \mid i > n_0 \text{ oder } j > n_0\}.$$

(Die Summe geht über alle Indizes (i,j) in einem Quadrat „ohne ein kleines Quadrat links unten“; male Bild.)

Für alle $n \ge 2n_0$ gilt $\Delta_n \subset \Gamma_{n,n_0}$ (denn aus $i \le n_0$ und $j \le n_0$ folgt $i + j \le 2n_0 \le n$; male Bild) und somit

$$|D_n - C_n| \overset{(3.2.7)}{=} \left| \sum_{(i,j) \in \Delta_n} a_i b_j \right| \le \sum_{(i,j) \in \Delta_n} |a_i| \cdot |b_j| \le \sum_{(i,j) \in \Gamma_{n,n_0}} |a_i| \cdot |b_j| = \overline{D}_n - \overline{D}_{n_0} < \varepsilon.$$

Also ist $(D_n - C_n)_n$ eine Nullfolge. Insgesamt zeigt dies $C_n \to AB$, also (3.2.6).

Absolute Konvergenz von $((c_n))_n$: Das gerade Bewiesene, angewandt auf die (absolut) konvergenten Reihen $((|a_n|))_n$ und $((|b_n|))_n$, zeigt, dass die Reihe mit Gliedern

$$\overline{c}_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}|$$

konvergiert (und den Wert $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{c}_n = \big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\big) \cdot \big(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\big)$ hat, was wir aber nicht benötigen). Wegen

$$|c_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}| = \overline{c}_n$$

ist die Reihe $((\overline{c}_n))_n$ eine konvergente Majorante der Reihe $((|c_n|))$; letztere ist somit nach dem Majorantenkriterium 3.2.13 konvergent. Dies bedeutet, dass $((c_n))$ absolut konvergent ist. □

Satz 3.2.28 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (oder allgemeiner $x, y \in \mathbb{C}$) gilt*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Wir wissen, dass $\exp(x)$ der Wert der absolut konvergenten Reihe $((\frac{x^n}{n!}))_n$ ist, und analog für $\exp(y)$. Das Cauchy-Produkt von Reihen 3.2.27 zeigt, dass $\exp(x)\exp(y)$ der Wert der absolut konvergenten Reihe $((c_n))_n$ mit Gliedern

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

ist, wobei der binomischen Lehrsatz 1.2.13 die letzte Gleichheit liefert. Es folgt $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$. □

Korollar 3.2.29. *Es gelten*

(a) $\exp(x) > 0$ *und* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,
(b) die reelle Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend (und insbesondere injektiv),*
(c) $\exp(n) = e^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *(und insbesondere* $\exp(0) = 1$*),*
(d) $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ *und* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(e) $|\exp(ix)| = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ aus Satz 3.2.28 liefert

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Dies zeigt $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ für alle reellen oder komplexen Zahlen x.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Für $x \geq 0$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \geq 1 > 0.$$

Für $x < 0$ gilt $-x > 0$, und das bereits Bewiesene zeigt $\exp(-x) > 0$ und $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$.

Für $x > 0$ gilt $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots > 1$. Damit gilt für beliebige reelle Zahlen $a < b$

$$\exp(b) = \exp(a + (b-a)) = \exp(a) \cdot \underbrace{\exp(b-a)}_{>1} > \exp(a).$$

Also ist $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Für $n \geq 0$ folgt $\exp(n) = e^n$ mit vollständiger Induktion: Für $n = 0, 1$ ist dies klar; für $n \geq 1$ gilt mit Induktionsannahme und Funktionalgleichung $\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$. Für $n < 0$ gilt dann $\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = (e^{-n})^{-1} = e^n$.

Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir zeigen $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$. Wegen $|w| = |\overline{w}|$ für alle $w \in \mathbb{C}$ und Kompatibilität der komplexen Konjugation mit Addition, Multiplikation und Division gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} - \exp(z)\right| = \left|\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} - \exp(z)}\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} - \overline{\exp(z)}\right|$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Da die linke Seite für $N \to 0$ gegen Null konvergiert, tut dies auch die rechte Seite. Dies zeigt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(\overline{ix}) = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1. \qquad \square$$

Proposition 3.2.30 (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $((a_n))_n$ *eine Reihe in* $\mathbb{R}$ *(oder* $\mathbb{C}$*). Es gebe eine reelle Zahl* $c < 1$ *mit*

$$|a_n|^{1/n} = \sqrt[n]{|a_n|} \leq c \tag{3.2.8}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$*. Dann ist die Reihe* $((a_n))$ *absolut konvergent.*

Beweis. Wegen $|a_n| \leq c^n$ und der Voraussetzung $c < 1$ ist die geometrische Reihe eine konvergente Majorante, das Majorantenkriterium 3.2.13 liefert also die absolute Konvergenz. $\square$

Warnung 3.2.31. Die Bedingung (3.2.8) im Wurzelkriterium 3.2.30 kann nicht zu $\sqrt[n]{a_n} < 1$ abgeschwächt werden: Die harmonische Reihe $((\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ erfüllt diese abgeschwächte Bedingung, ist aber divergent (siehe Beispiel 3.2.5.(c)).

Definition 3.2.32. Eine Reihe $((a_n))_n \subset \mathbb{R}$ heißt **alternierend**, falls alle geraden Folgeglieder ≥ 0 sind und alle ungeraden ≤ 0, oder umgekehrt.

Proposition 3.2.33 (Leibnizkriterium)**.** *Sei* $((a_n))_n$ *eine alternierende Reihe in* $\mathbb{R}$*, so dass die Beträge* $|a_n|$ *der Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden, d. h. es gilt* $|a_n| \searrow 0$ *(der diagonale Pfeil steht für „konvergiert monoton fallend gegen“). Dann konvergiert die Reihe* $((a_n))_n$ *und es gilt* $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq |a_0|$.

Falls $a_{2n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt $\sum_{n=0}^{2N+1} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{2N} a_n$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. (Illustriere mit Bild!) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass all geraden Glieder $a_{2n} \geq 0$ sind und alle ungeraden Glieder $a_{2n+1} \leq 0$ (sonst ersetze $((a_n))$ durch $((-a_n))$).

Setze $b_n := |a_n| \geq 0$. Dann gelten $a_n = (-1)^n b_n$ und $b_n \searrow 0$. Seien $(s_n)_n$ die Folge der Partialsummen der Reihe $((a_n))_n$. Definiere $\tau_n := s_{2n}$ und $t_n := s_{2n+1}$. Dann ist $(\tau_n)_n$ monoton fallend und $(t_n)_n$ ist monoton wachsend, da

$$\tau_{n+1} = s_{2(n+1)} = s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} \leq s_{2n} = \tau_n$$

und

$$t_{n+1} = s_{2n+3} = s_{2n+1} + b_{2n+2} - b_{2n+3} \geq s_{2n+1} = t_n.$$

Weiterhin gilt $t_n = s_{2n+1} = s_{2n} - b_{2n+1} = \tau_n - b_{2n+1} \leq \tau_n$. Als monoton wachsende bzw. fallende beschränkte Folge konvergiert $(t_n)_n$ bzw. $(\tau_n)_n$ gegen ihr Supremum bzw. ihr Infimum (Proposition 3.1.26). Wir erhalten

$$\lim t_n = \lim(\tau_n - b_{2n+1}) = (\lim \tau_n) - \lim b_{2n+1} = \lim \tau_n - 0 = \lim \tau_n$$

(Proposition 3.1.11). Somit konvergiert auch s_n gegen diesen Wert. Die erste Abschätzung folgt aus

$$a_0 = b_0 = \tau_0 \geq \lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n \geq t_0 = s_1 = b_0 - b_1 \geq -b_1 \geq -b_0 = -a_0.$$

Die zweite Abschätzung ist klar, da der Wert der Reihe das Supremum von $(t_n)_n$ und das Infimum von $(\tau_n)_n$ ist. □

Beispiele 3.2.34. Das Leibniz-Kriterium 3.2.33 kann zur numerischen Bestimmung des Kosinus (und des Sinus) verwendet werden:

(a) Die Reihe $\left(\left((-1)^n \frac{1}{(2n)!}\right)\right)_n$ ist alternierend und die Beträge ihre Glieder bilden eine streng monoton fallende Nullfolge. Sie konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium 3.2.33, was wir natürlich schon wissen, denn ihr Wert ist

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \pm \cdots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \pm \ldots$$

Außerdem zeigt Proposition 3.2.33, dass jede der „geraden“ Partialsummen größer(-gleich) als $\cos(1)$ ist, und dass jede der „ungeraden“ Partialsummen kleiner(-gleich) als $\cos(1)$ ist; insbesondere gilt

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} = 0.5402777... < \cos(1) < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} = 0,541666....$$

(b) Die

$$\cos(2) = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} - \frac{64}{720} + \frac{256}{40320} \mp \cdots = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} \mp \ldots$$

definierende Reihe ist alternierend und ihr (≥ 1)-Endstück hat Glieder, deren Beträge eine streng monoton fallende Nullfolge bilden. Wir erhalten

$$1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{45} = -\frac{19}{45} = -0,4222... < \cos(2) < 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{45} + \frac{2}{315} \mp = -\frac{131}{315} = -0,41\overline{587301}. \tag{3.2.9}$$

3.2.35. Das Leibnizkriterium 3.2.33 liefert im Allgemeinen keine absolute Konvergenz (siehe das nachfolgende Beispiel 3.2.36).

Beispiel 3.2.36. Die **alternierende harmonische Reihe** $\left(\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)\right)_n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium 3.2.33 (unbewiesene Zusatzinfo: ihr Wert ist der natürliche Logarithmus $\log(2)$ von 2). Sie konvergiert jedoch nicht absolut, denn die harmonische Reihe konvergiert nicht (Beispiel 3.2.5.(c)).

Ende der 17. Vorlesung am 02.12.2019.

Aufgabe 3.2.37. Zeigen Sie, das die Restglieder von Kosinus und Sinus wie folgt abgeschätzt werden können. Seien $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \leq \frac{|x|^{2N}}{(2N)!} \qquad \text{falls } |x| \leq 2N+1,$$

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2N+1}}{(2N+1)!} \qquad \text{falls } |x| \leq 2N+2,$$

Hinweis: Leibnizkriterium 3.2.33.

4. Stetigkeit

4.1. Folgen- und ε-δ-Stetigkeit.

Definition 4.1.1 (Stetigkeit)**.** Seien I und J Teilmengen von $\mathbb{R}$ (etwa Intervalle) und sei $p \in I$ ein Punkt. Eine Abbildung $f\colon I \to J$ heißt

(a) **folgenstetig im Punkt** p, falls für alle Folgen $(x_n)_n \subset I$ gilt: Aus $x_n \to p$ folgt $f(x_n) \to f(p)$.
(b) **folgenstetig**, falls f in allen Punkten $p \in I$ folgenstetig ist.
(c) **ε-δ-stetig im Punkt** p, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in I\colon \Big(|x-p| < \delta \implies |f(x) - f(p))| < \varepsilon\Big).$$

(d) **ε-δ-stetig**, falls f in allen Punkten $p \in I$ ε-δ-stetig ist.

4.1.2. In Worten bedeutet die ε-δ-Stetigkeit in p, dass der Funktionswert $f(x)$ von $f(p)$ beliebig wenig abweicht, wenn x hinreichend nahe bei p liegt.

4.1.3. Illustriere mit Bildern und erkläre bereits einige der Beispiele 4.1.7!

4.1.4. Ist $f\colon I \to J$ eine Abbildung zwischen Teilmengen I und J von $\mathbb{C}$, so werden Folgenstetigkeit und ε-δ-Stetigkeit (in einem Punkt $p \in I$) genauso definiert. Viele der folgenden Resultate gelten auch in diesem Kontext mit den naheliegenden Beweisen.

Bemerkung 4.1.5. Diese Definition ist die wahrscheinlich wichtigste Definition der Analysis. Stetigkeit tritt in allen Bereichen der Mathematik auf.

Satz 4.1.6. *Seien $f\colon I \to J$ eine Abbildung zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und sei $p \in I$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(a) f ist folgenstetig in p,
(b) f ist ε-δ-stetig in p.

Insbesondere ist f genau dann folgenstetig, wenn f ε-δ-stetig ist.

*Wir verwenden deshalb im Folgenden den Begriff **stetig** als Abkürzung für die äquivalenten Begriffe folgenstetig und ε-δ-stetig, und analog für **stetig in** p.*

Beweis. „(a) $\implies$ (b)“: Wir zeigen äquivalent „$\neg$(b) $\implies$ $\neg$(a)“: Sei f nicht ε-δ-stetig, d. h. es gelte die Negation von (b)[46]

$$\exists \varepsilon > 0\colon \forall \delta > 0\colon \exists x \in I\colon ((|x-p| < \delta) \wedge (|f(x) - f(p))| \geq \varepsilon).$$

Sei ein solches $\varepsilon > 0$ fixiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ (wähle man $\delta = \frac{1}{n}$ und so) gibt es also ein $x_n \in I$ mit $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon$. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_n$ offensichtlich gegen p, aber die Bildfolge $(f(x_n))_n$ konvergiert nicht gegen $f(p)$. Also ist f nicht folgenstetig.

„(b) $\implies$ (a)“: Sei $(x_n)_n$ eine Folge in I mit $x_n \to p$. Wir wollen zeigen, dass die Bildfolge $(f(x_n))_n$ gegen $f(p)$ konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der ε-δ-Stetigkeit in p gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ aus $|x-p| < \delta$ bereits $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ folgt. Wegen $x_n \to p$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - p| < \delta$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $n \geq N$ aber auch $|f(x_n) - f(p)| < \varepsilon$. Dies zeigt $f(x_n) \to f(p)$. $\square$

Beispiele 4.1.7.

(a) Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.
(b) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, stetig.
(c) Allgemeiner ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, stetig. (Der Leser prüfe sowohl folgen- als auch ε-δ-Stetigkeit.)
(d) Die Betragsfunktion $|-|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, ist stetig. Dies folgt aus Proposition 3.1.10.(c).

[46] Wir erinnern daran, dass $p \implies q$ gleichwertig zu $\neg p \vee q$ ist. Die Verneinung $\neg(\neg p \vee q)$ ist gleichwertig zu $p \wedge \neg q$.

(e) Die Quadratwurzel $\sqrt{-}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig (denn in einer Übungsaufgabe wurde gezeigt, dass aus $x_n \to a$ folgt, dass $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$ gilt). Ähnlich zeigt man, dass $\sqrt[m]{-}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig ist. Wir werden in Satz 4.6.1 einen anderen Beweis dafür geben.

(f) Die Funktion

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

ist in keinem Punkt stetig: Für $p \in \mathbb{Q}$ betrachte die gegen p konvergierenden Folgen $p + \frac{1}{n}$ rationaler und $p + \frac{\sqrt{2}}{n}$ irrationaler Zahlen. Für $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ betrachte die gegen p konvergierenden Folge $p + \frac{1}{n}$ irrationaler und die wie folgt konstruierte, gegen p konvergierende Folge $(q_n)_{n \geq 1}$ rationaler Zahlen: Für jedes $n \geq 1$ sei q_n eine beliebige rationale Zahl mit $p < q_n < p + \frac{1}{n}$ (eine solche existiert nach Korollar 2.5.8.(c)).

(g) Die Funktion

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

ist in Null stetig, aber in keinem anderen Punkt. Die Begründung ist dem Leser überlassen.

(h) Betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x \leq 0, \\ 1 & \text{falls } x < 0, \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &g = f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \\ &x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f nicht stetig (sie ist aber in allen Punkte $p \neq 0$ stetig). Die Funktion g ist stetig.

(i) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $x \in \mathbb{R}$ auf die größte ganze Zahl unterhalb x abbildet, in allen Punkten von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und in allen Punkten von $\mathbb{Z}$ unstetig (:= nicht stetig).

Beispiele 4.1.8. Die folgenden Aussagen sind klar nach Definition 4.1.1.

(a) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Teilmengen (und sei $p \in I$). Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(I) \subset J$. Dann ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann stetig (in p), wenn die induzierte Abbildung $I \to J$, $x \mapsto f(x)$, stetig (in p) ist.

(b) Ist $f\colon I \to J$ stetig (in $p \in I$) und $I' \subset I$ eine Teilmenge (mit $p \in I'$), so ist auch die Restriktion $f|_{I'}\colon I' \to J$ stetig (in p).

Lemma 4.1.9 (Lokalität von Stetigkeit)**.** *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a < b$ reelle Zahlen und $p \in (a,b) \cap I$. Dann ist die Einschränkung $f|_{(a,b)\cap I}\colon (a,b) \cap I \to \mathbb{R}$ genau dann in p stetig, wenn f in p stetig ist.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Aufgabe 4.1.10 (Stetigkeit stückweise stetiger Funktionen)**.** Seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(b) = g(b)$. Dann ist die folgende Funktion stetig.

$$\begin{aligned} &F\colon [a,c] \to \mathbb{R}, \\ &x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \leq b, \\ g(x) & \text{falls } x > b. \end{cases} \end{aligned}$$

Folgere: Ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und sind $a =: a_0 < a_1 < \cdots < a_n := b$ reelle Zahlen, so dass alle Einschränkungen $F|_{[a_{i-1},a_i]}\colon [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ stetig sind, für $i = 1, \ldots, n$, so ist F stetig.

Die entsprechenden Aussagen gelten auch für $a = -\infty$ oder $b = +\infty$.

4.2. **Grundlegendes zu stetigen Funktionen.**

Proposition 4.2.1. *Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig: Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen (bzw. in einem Punkt $p \in I$ stetige Funktionen) und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen*

$$\begin{aligned} f+g\colon I \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto (f+g)(x) := f(x)+g(x),\\ f\cdot g\colon I \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto (f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x),\\ \lambda f\colon I \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \end{aligned}$$

stetig (bzw. stetig in p). Sei $I' := \{x \in I \mid f(x) \neq 0\}$. Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig (bzw. stetig in p, falls $p \in I'$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}\colon I' \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \left(\frac{1}{f}\right)(x) := \frac{1}{f(x)},\\ \frac{g}{f}\colon I' \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \left(\frac{g}{f}\right)(x) := \frac{g(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Beweis. (Folgen-)Stetigkeit der Funktionen $f+g$, $f\cdot g$ und $\frac{1}{f}$ folgt aus Proposition 3.1.11. Stetigkeit der anderen Funktionen λf und $\frac{g}{f} = g \cdot \frac{1}{g}$ sind Konsequenzen daraus (unter Verwendung der Stetigkeit der konstanten Funktion $x \mapsto \lambda$). □

Beispiel 4.2.2 (Stetigkeit polynomialer Funktionen)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto a_n x^n + \dots + a_0, \end{aligned}$$

stetig. Jede Funktion dieser Gestalt nennt man eine **polynomiale Funktion**. Oft schreibt man eine solche Funktion als $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$.

Beweis. Die Funktion $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, und für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $c_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a$, stetig. Also ist $f = c_{a_n}\mathrm{id}\cdot\mathrm{id}\cdots\mathrm{id} + \dots + c_{a_1}\mathrm{id} + c_{a_0}$ nach Proposition 4.2.1 stetig. □

Beispiel 4.2.3 (Stetigkeit von Quotienten polynomialer Funktionen)**.** Sei $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ und $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ polynomiale Funktionen. Sei $I := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tfrac{f}{g}\colon I &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}, \end{aligned}$$

stetig. Dies folgt aus Beispiel 4.2.2 und Proposition 4.2.1.

Proposition 4.2.4 (Verknüpfung/Komposition stetiger Abbildungen)**.** *Sei $f\colon I \to J$ in p stetig und sei $g\colon J \to K$ in $f(p)$ stetig. Dann ist $g \circ f$ in p stetig.*

Insbesondere ist die Komposition stetiger Abbildungen stetig.

Beweis. Gelte $x_n \to p$. Dann folgt $f(x_n) \to f(p)$ wegen der Stetigkeit von f. Daraus folgt $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(p)) = (g \circ f)(p)$ wegen der Stetigkeit von g. Also ist $g \circ f$ in p stetig. □

Aufgabe 4.2.5. Beweise Proposition 4.2.4 mit ε-δ-Stetigkeit.

4.3. **Stetigkeit von Exponential-, Kosinus- und Sinusfunktion.**

Lemma 4.3.1. *Die reelle Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und die komplexe Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass exp bei 0 stetig ist, und erinnern dazu an die Restgliedabschätzung aus Lemma 3.2.25 (für $N = 1$): Es gilt

$$|\exp(x) - \exp(0)| = |\exp(x) - 1| = \left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{0} \frac{x^n}{n!}\right| \leq 2\frac{|x|}{1!} = 2|x|.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) mit $|x| \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$.

Sei nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta := \min(\frac{\varepsilon}{2}, 1)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) mit $|x - 0| < \delta$ sicherlich $|x| = |x - 0| < \delta \leq 1$ und so nach der obigen Abschätzung $|\exp(x) - \exp(0)| \leq 2|x| < 2\delta \leq \varepsilon$. Also ist exp bei 0 stetig.

Sei nun $p \in \mathbb{R}$ (oder $p \in \mathbb{C}$) beliebig. Sei $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n \to p$. Dann gilt auf Grund der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz 3.2.28)

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - p)\exp(p).$$

Wegen $x_n - p \to 0$ und der bereits bewiesenen Stetigkeit bei 0 folgt $\exp(x_n - p) \to \exp(0) = 1$. Es folgt $\exp(x_n) = \exp(x_n - p) \cdot \exp(p) \to 1 \cdot \exp(p) = \exp(p)$. Also ist exp bei p stetig. □

Korollar 4.3.2. *Kosinusfunktion* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und Sinusfunktion* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig.*

Dasselbe gilt auch für die komplexen Varianten, wie wir eventuell später sehen werden.

Beweis. Gelte $x_n \to p$ in $\mathbb{R}$. Dann folgt $ix_n \to ip$ in $\mathbb{C}$. (Folgen-)Stetigkeit der komplexen Exponentialfunktion (Lemma 4.3.1) liefert $\exp(ix_n) \to \exp(ip)$. Daraus folgen Konvergenz $\mathrm{Re}(\exp(ix_n)) \to \mathrm{Re}(\exp(ip))$ und $\mathrm{Im}(\exp(ix_n)) \to \mathrm{Im}(\exp(ip))$ nach Korollar 3.1.41. Nach der Eulerformel (3.2.5) gilt $\exp(ia) = \cos(a) + i\sin(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also $\mathrm{Re}(\exp(ia)) = \cos(a)$ und $\mathrm{Im}(\exp(ia)) = \sin(a)$. Dies liefert $\cos(x_n) \to \cos(p)$ und $\sin(x_n) \to \sin(p)$. Also sind Kosinus und Sinus (folgen)stetig. □

Beispiel 4.3.3. Die Funktion

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \\ &x \mapsto \sqrt{x} + \left|\frac{1}{2 + \sqrt{x+1}}\right| - \exp\left(\frac{(1 + \sin(x^3))(x^{-2} + \frac{1+x}{\sqrt{1+x}})}{x^4 + \sqrt{1 + \sqrt{x^3}}}\right), \end{aligned}$$

ist stetig. Dies folgt aus den Beispielen 4.1.7, den Propositionen 4.2.1 und 4.2.4, Lemma 4.3.1 und Korollar 4.3.2.

Ende der 18. Vorlesung am 05.12.2019.

4.4. **Zwischenwertsatz.**

Lemma 4.4.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in $p \in I$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Gilt $f(p) > c$, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > c$ für alle Elemente $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap I$ gilt. Analoges gilt, wenn man in beiden Abschätzungen „$> c$“ durch durch „$< c$“ ersetzt.*

Insbesondere gilt: Verschwindet eine stetige Funktion an einem Punkt nicht, so verschwindet sie auch nicht „in der Nähe“ dieses Punktes.

Beweis. Setze $\varepsilon := f(p) - c > 0$. Dann liefert die ε-δ-Stetigkeit in p das gesuchte $\delta > 0$. Im Fall $f(p) < c$ betrachte man $\varepsilon := c - f(p) > 0$. □

Satz 4.4.2 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, wobei $a \leq b$ reelle Zahlen sind. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*[47]

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $f(a) \leq f(b)$ annehmen (sonst betrachte $-f$). Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$. Auf Grund der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ ist

$$p := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$$

wohldefiniert. Beachte $p \in [a, b]$. Wir zeigen, dass $f(p) = y$ gilt, indem wir die beiden Fälle $f(p) > y$ und $f(p) < y$ jeweils zum Widerspruch führen.

Fall $f(p) > y$: Insbesondere gilt dann $p > a$. Nach Lemma 4.4.1 gibt es ein $\delta > 0$, so dass f auf $(p - \delta, p + \delta) \cap [a, b]$ nur Werte $> y$ annimmt. Sei p' ein Element dieses Schnitts mit $p' < p$ (ein solches existiert wegen $a < p$). Dann ist p' ebenfalls eine obere Schranke der Menge $\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$. Also ist p nicht die kleinste obere Schranke dieser Menge. Widerspruch.

Fall $f(p) < y$: Insbesondere gilt dann $p < b$. Nach Lemma 4.4.1 gibt es ein $\delta > 0$, so dass f auf $(p - \delta, p + \delta) \cap [a, b]$ nur Werte $< y$ annimmt. Sei p' ein Element dieses Schnitts mit $p < p'$ (ein solches existiert wegen $p < b$). Dann gilt $f(p') < y$. Dies widerspricht der Definition von p. □

[47] Im Fall $f(a) \leq f(b)$ gibt es also für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Im Fall $f(a) \geq f(b)$ gibt es also für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $f(b) \leq y \leq f(a)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Korollar 4.4.3. *Seien I ein Intervall (siehe Definition 3.1.36) und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Im Fall $I = \emptyset$ ist $f(I) = \emptyset$ ein Intervall. Gelte $I \neq \emptyset$. Setze $l := \inf f(I)$, falls $f(I)$ nach unten beschränkt ist, und sonst $l := -\infty$. Setze $r := \sup f(I)$, falls $f(I)$ nach oben beschränkt ist, und sonst $r := +\infty$. Sicherlich gilt $f(I) \subset [l, r]$.

Wir behaupten $(l, r) \subset f(I)$. Sei $x \in (l, r)$. Dann ist x weder eine untere Schranke noch eine obere Schranke von $f(I)$. Also existieren $a, b \in I$ mit $f(a) < x < f(b)$. Der Zwischenwertsatz 4.4.2 (angewandt auf $f|_{[a,b]}$ im Fall $a \leq b$ und auf $f|_{[b,a]}$ im Fall $a > b$) liefert $x \in f(I)$ wie gewünscht.

Zusammengefaßt gilt also $(l, r) \subset f(I) \subset [l, r]$. Somit muss $f(I)$ eines der Intervalle (l, r), $[l, r)$, $(l, r]$, $[l, r]$ sein. □

Aufgabe 4.4.4. Polynomiale Funktionen von ungeradem Grad haben stets eine Nullstelle: Sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine polynomiale Funktion $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ mit n ungerade und $a_n \neq 0$. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $p(y) = 0$.

Aufgabe 4.4.5. Jede stetige injektive Abbildung von einem reellen Intervall nach $\mathbb{R}$ ist streng monoton (entweder wachsend oder fallend).

Hinweis: Man beginne mit dem Fall, dass der Definitionsbereich die Gestalt $[a, b]$ hat.

4.5. **Monotonie und Stetigkeit.**

Proposition 4.5.1. *Jede monotone Funktion, deren Bild ein Intervall ist, ist stetig.*

In Formeln: Seien $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Ist $g(I)$ ein Intervall, so ist g stetig.

Beweis. Der Fall $I = \emptyset$ ist trivial, so dass wir $I \neq \emptyset$ annehmen können. Wir nehmen ohne Einschränkung an, das g monoton wachsend ist (sonst ersetze g durch $-g$). Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a \leq b$, so dass $g(I)$ eines der vier Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) ist.

Sei $p \in I$. Wir zeigen die Stetigkeit von g in p. Sei $\varepsilon > 0$. Wir unterscheiden vier Fälle:

- $a < g(p) < b$: Sicherlich gibt es eine reelle Zahl $\varepsilon' > 0$ mit $g(p) \pm \varepsilon' \in (a, b)$ und $\varepsilon' < \varepsilon$. Wegen $(a, b) \subset g(I)$ gibt es Elemente $l, r \in I$ mit $g(l) = g(p) - \varepsilon'$ und $g(r) = g(p) + \varepsilon'$. Aus dem monotonen Wachstum folgt $l < p < r$. Sei $\delta := \min(p - l, r - p) > 0$. Sei $x \in I$ mit $|x - p| < \delta$ beliebig. Dann gilt $l \leq p - \delta < x < p + \delta \leq r$. Das monotone Wachstum liefert $g(p) - \varepsilon' = g(l) \leq g(x) \leq g(r) = g(p) + \varepsilon'$, also $|g(x) - g(p)| \leq \varepsilon' < \varepsilon$. Also ist g in p stetig.
- $a = g(p) < b$: Sicherlich gibt es eine reelle Zahl $\varepsilon' > 0$ mit $g(p) + \varepsilon' < b$ und $\varepsilon' < \varepsilon$. Wegen $(a, b) \subset g(I)$ gibt es $r \in I$ mit $g(r) = g(p) + \varepsilon'$. Aus dem monotonen Wachstum folgt $p < r$. Sei $\delta := r - p > 0$. Sei $x \in I$ mit $|x - p| < \delta$ beliebig. Dann gilt $x < p + \delta = r$. Die Annahme $a = g(p)$ besagt, dass $g(p)$ das kleinste Element von $g(I)$ ist. Dies und das monotone Wachstum liefern $g(p) \leq g(x) \leq g(r) = g(p) + \varepsilon'$, also $0 \leq g(x) - g(p) \leq \varepsilon' < \varepsilon$. Also ist g in p stetig.
- $a < g(p) = b$: Analog.
- $a = g(p) = b$: In diesem Fall ist g die konstante Abbildung $x \mapsto a$ und somit stetig. □

Korollar 4.5.2. *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $J \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f\colon I \to J$ eine bijektive Abbildung. Ist f streng monoton (wachsend/fallend), so ist die Umkehrabbildung*

$$f^{-1}\colon J \to I$$

stetig und streng monoton (wachsend/fallend).[48]

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass f streng monoton wachsend ist (sonst betrachte die Funktion $-f\colon I \to J' := \{-y \mid y \in J\}$). Wir behaupten, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist: Seien $x, y \in J$ mit $x < y$. Nehmen wir an, dass $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$ gilt. Anwenden von f liefert den Widerspruch $x = f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y)) = y$. Also muss $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ gelten.

Die Funktion $g\colon J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^{-1}(x)$, ist somit streng monoton wachsend. Da ihr Bild $g(J) = f^{-1}(J) = I$ ein Intervall ist, ist sie nach Proposition 4.5.1 stetig. Somit ist auch f^{-1} stetig. □

[48] Die Abbildung f ist dabei nicht als stetig vorausgesetzt. Ist J ebenfalls ein Intervall, so muss f nach Proposition 4.5.1 stetig sein.

4.6. **Stetigkeit der Wurzelfunktion.**

Satz 4.6.1. *Sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl. Die m-te Potenzfunktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ x &\mapsto x^m, \end{aligned}$$

ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv[49]*. Ihre Umkehrfunktion, die m-te Wurzelfunktion*

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{-} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ x &\mapsto \sqrt[m]{x}, \end{aligned}$$

ist stetig und streng monoton wachsend (und natürlich bijektiv).

Beweis. Sei $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^m$, die m-te Potenzfunktion. Sie ist stetig nach Proposition 4.2.1. Aus $0 \leq x < y$ folgen $0 \leq x^2 < y^2$ und $0 \leq x^3 < y^3$ usw. und schließlich $0 \leq x^m < y^m$ (nach Lemma 2.4.125.(c)). Also ist f streng monoton wachsend und insbesondere injektiv. Wir zeigen nun die Surjektivität von f. Für jedes $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $y < N$ (da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, Satz 2.5.7). Wegen $N \leq N^m$ folgt $y \in [0, N^m]$. Da die stetige Abbildung f nach dem Zwischenwertsatz 4.4.2 jeden Wert zwischen $0 = f(0)$ und $N^m = f(N)$ annimmt, liegt y im Bild von f. Also ist f surjektiv. Die Behauptungen über die m-te Wurzelfunktion folgen nun aus Korollar 4.5.2. □

4.7. **Stetigkeit des natürlichen Logarithmus.**

4.7.1. Wir erinnern daran, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur positive Werte annimmt (Korollar 3.2.29.(a)). Also induziert sie eine Abbildung $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.

Satz 4.7.2. *Die Exponentialfunktion $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Ihre Umkehrfunktion, der* ***(natürliche) Logarithmus***

$$\log \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},$$

ist stetig, streng monoton wachsend und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Insbesondere gelten $\log(1/x) = -\log(x)$ und $\log(1) = 0$.

4.7.3. Der natürliche Logarithmus wird auch als ln notiert.

Beweis. Die Stetigkeit haben wir in Lemma 4.3.1 gezeigt. Wir wissen bereits, dass $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ streng monoton wachsend und somit injektiv ist (Korollar 3.2.29.(b)). Wir zeigen nun die Surjektivität dieser Funktion. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten

$$\begin{aligned} \exp(n) &= 1 + n + \tfrac{n^2}{2} + \ldots \geq 1 + n, \\ \exp(-n) &= \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{1+n}. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz 4.4.2 nimmt die stetige Funktion exp jeden Wert zwischen $\frac{1}{1+n}$ und $1 + n$ an. Da es für jedes $y \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{1+n} < y < 1 + n$ gibt, folgt die Surjektivität. Die Umkehrfunktion $\log := \exp^{-1}$ ist somit nach Korollar 4.5.2 stetig und streng monoton wachsend. Aus $\exp(0) = 1$ folgt $0 = \log(1)$.

Die Funktionalgleichung des Logarithmus ist eine formale Konsequenz der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz 3.2.28): Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\log(x) + \log(y) = \log\Big(\exp\big(\log(x) + \log(y)\big)\Big) = \log\Big(\exp\big(\log(x)\big) \cdot \exp\big(\log(y)\big)\Big) = \log(x \cdot y). \qquad \square$$

Insbesondere gilt $\log(x) + \log(1/x) = \log(1) = \log(\exp(0)) = 0$.

[49] Die letzten beiden Punkte sind nach Proposition 2.6.4 (und deren Beweis) bereits bekannt. Wir geben hier einen unabhängigen Alternativbeweis.

Definition 4.7.4 (Allgemeine Potenz)**.** Für reelles $a > 0$ definiere

$$\begin{aligned} a^? \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0}, \\ x &\mapsto a^x := \exp(x \log(a)). \end{aligned}$$

Mit derselben Formel definieren wir $a^? \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Im Ausdruck a^x heißt a die **Basis** und x der **Exponent**.

4.7.5. Die Funktionen $a^? \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ und $a^? \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen (Proposition 4.2.4).

4.7.6. Diese Definition erweitert die Definition von a^n für $n \in \mathbb{Z}$ aus 2.4.107, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$a^n \overset{\text{Def. } 4.7.4}{=} \exp(n \log(a)) = \underbrace{\exp(\log(a)) \cdots \exp(\log(a))}_{n \text{ Faktoren}} = a \cdots a \overset{2.4.107}{=} a^n$$

und wegen $\exp(-\log(a)) = \exp(\log(1/a)) = 1/a$

$$a^{-n} \overset{\text{Def. } 4.7.4}{=} \exp(-n \log(a)) = \exp(-\log(a)) \cdots \exp(-\log(a)) = (1/a) \cdots (1/a) \overset{2.4.107}{=} a^{-n}.$$

4.7.7. Speziell für die Eulersche Zahl $e = \exp(1) > 0$ erhalten wir

$$e^x = \exp(x \log(e)) = \exp(x)$$

für alle reellen oder komplexen x (diese Notation für die Exponentialfunktion ist vermutlich in der Schule gebräuchlich). Die Eulersche Formel 3.2.5 schreibt sich damit als

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

die Funktionalgleichung $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ der Exponentialfunktion aus Satz 3.2.28 als

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ (und allgemeiner alle } x, y \in \mathbb{C}).$$

Lemma 4.7.8. *Seien $a, b > 0$ positive reelle Zahlen, $x, y \in \mathbb{R}$ (oder $x, y \in \mathbb{C}$) und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann gelten*

(a) $a^{x+y} = a^x a^y$ und insbesondere $a^0 = 1$ und $a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$,
(b) $(a^x)^y = a^{xy}$ und insbesondere $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ und $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$.
(c) $a^x b^x = (ab)^x$.

Beweis. Die einfachen Beweise sind dem Leser überlassen. □

Ende der 19. Vorlesung am 09.12.2019.

Aufgabe 4.7.9. Für alle positiven reellen Zahlen $a > 0$ gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $n \to \infty$.

Lemma 4.7.10. *Für $a > 0$ reell mit $a \neq 1$ ist $a^? \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ stetig und bijektiv. Der **Logarithmus zur Basis** a*

$$\begin{aligned} \log_a \colon \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}, \\ y &\mapsto \log_a(y) := \frac{\log(y)}{\log(a)}, \end{aligned}$$

ist die zugehörige Umkehrfunktionfunktion und ist stetig. Im Fall $a > 1$ sind $a^?$ und $\log_a$ streng monoton wachsend, im Fall $a < 1$ streng monoton fallend.

4.7.11. Wegen $\log(e) = 1$ ist $\log_e = \log$ der natürliche Logarithmus.

Beweis. Stetigkeit beider Funktionen ist klar, da exp und log stetig sind. Bijektivität von $a^? = \exp(? \log(a))$ folgt aus der Bijektivität von $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ und $\log(a) \neq 0$. Wegen

$$\log_a(a^x) = \frac{\log(\exp(x \log(a)))}{\log(a)} = \frac{x \log(a)}{\log(a)} = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$a^{\log_a(y)} = \exp\left(\frac{\log(y)}{\log(a)} \log(a)\right) = \exp(\log(y)) = y$$

für alle $y > 0$ ist $\log_a$ zu $a^?$ invers. Im Fall $a > 1$ gilt $\log(a) > \log(1) = 0$, im Fall $a < 1$ gilt $\log(a) < \log(1) = 0$. Die behauptete strenge Monotonie von $a^? = \exp(? \log(a))$ folgt somit aus dem streng monotonen Wachstum von exp. □

4.7.12. Der Logarithmus $\log_{10}$ zur Basis 10 misst in etwa die Anzahl der Dezimalstellen vor dem Komma, denn wegen $\log(10) > 0$ ist $\log_{10}$ streng monoton wachsend und es gilt $\log_{10}(1) = 0$, $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(100) = 2, \ldots, \log_{10}(10^n) = n$. Analoges gilt für andere Stellenwertsysteme, beispielsweise misst $\log_2$ in etwa die Stellenanzahl im Binärsystem.

Lemma 4.7.13. *Für fixiertes $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion*

$$\begin{aligned}(-)^a \colon \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}_{>0},\\ x &\mapsto x^a = \exp(a\log(x)).\end{aligned}$$

(Im Unterschied zu Lemma 4.7.10 ist nun der Exponent fixiert und die Basis variabel.) Diese ist stetig und genau dann streng monoton wachsend bzw. konstant bzw. streng monoton fallend, wenn $a > 0$ bzw. $a = 0$ bzw. $a < 0$ gilt.

Für $a \neq 0$ ist $(-)^a$ bijektiv mit Umkehrfunktion $(-)^{\frac{1}{a}}$.

Beweis. Der einfache Beweis ist dem Leser überlassen. □

Beispiel 4.7.14. Die Funktionen x^3 und $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ sind streng monoton wachsend und invers zueinander, während $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ und $x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ streng monoton fallend und invers zueinander sind.

4.8. **Kreiszahl π und trigonometrische Funktionen.**

4.8.1. Sei

$$\mathbb{S}^1 := \{z \mid |z| = 1\}$$

der **Einheitskreis**, also der Kreis in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit Radius Eins um den Ursprung.[50] Für alle $z \in \mathbb{S}^1$ gilt

$$z^{-1} = \overline{z}, \tag{4.8.1}$$

denn $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $a + ib \in \mathbb{S}^1$ äquivalent zu $a^2 + b^2 = 1$, und letztere impliziert $a, b \in [-1, 1]$.

4.8.2. Wir beweisen einige wichtige Formeln für Kosinus und Sinus. Sei $t \in \mathbb{R}$. Aus der Eulerschen Formel Formel (3.2.5) und Korollar 3.2.29.(e) erhalten wir

$$\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{S}^1. \tag{4.8.2}$$

Insbesondere sind $\cos(t)$ bzw. $\sin(t)$ Real- bzw. Imaginärteil von $\exp(it)$. Wir folgern, dass

$$(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1 \qquad \text{oder kurz} \qquad \cos^2 + \sin^2 = 1$$

gilt und dass Kosinus- und Sinusfunktion in $[-1, 1]$ landen, also Funktionen

$$\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \text{und} \qquad \sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

induzieren. Korollar 3.2.29.(d) und die Eulerformel liefern

$$\exp(-it) = (\exp(it))^{-1} = \overline{\exp(it)} = \cos(t) - i\sin(t) \tag{4.8.3}$$

(Die zweite Gleichung folgt auch aus (4.8.1).) Durch Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichung zu bzw. von der Eulerformel erhalten wir

$$\cos(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}, \tag{4.8.4}$$

$$\sin(t) = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}. \tag{4.8.5}$$

Insbesondere erhalten wir daraus die folgenden Symmetrieeigenschaften von Kosinus und Sinus:[51]

$$\begin{aligned}\cos(-t) &= \cos(t)\\ \sin(-t) &= -\sin(t)\end{aligned}$$

Der Graph der Kosinusfunkton ist also spiegelsymmetrisch zur „vertikalen Achse“, der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz 3.2.28) liefert

$$\exp(i(s + t)) = \exp(is)\exp(it) \tag{4.8.6}$$

[50] Allgemeiner bezeichnet $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ die n-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$.

[51] Diese Formeln folgen auch direkt - sogar für komplexe Argumente - aus den definierenden Reihen.

für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Mit der Eulerformel erhält man daraus sofort die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus:

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t), \\ \sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t). \end{aligned} \tag{4.8.7}$$

Aufgabe 4.8.3. Zeigen Sie die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus (4.8.7). Folgern Sie

$$\cos(u) - \cos(v) = -2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \qquad \sin(u) - \sin(v) = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Hinweis: $s = \frac{u+v}{2}$, $t = \frac{u-v}{2}$.

4.8.4. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1, \\ t &\mapsto \gamma(t) := \exp(it) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t). \end{aligned}$$

Sie ist nach 4.8.2 wohldefiniert und stetig als Verknüpfung der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \xrightarrow{t \mapsto it} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}$ (Proposition 4.2.4, Lemma 4.3.1). Die Formeln (4.8.3) und (4.8.6) werden zu

$$\begin{aligned} \gamma(t+s) &= \gamma(t)\gamma(s) && \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}, \\ \gamma(-t) &= \gamma(t)^{-1} = \overline{\gamma(t)} && \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir werden diese Formeln und die Erkenntnisse aus 4.8.2 und 4.8.1 im Folgenden ohne weitere Zitate verwenden.

4.8.5. Unser Ziel ist im Folgenden zu verstehen, wie sich der Punkt $\gamma(t)$ in Abhängigkeit von der „Zeit“ $t \in \mathbb{R}$ auf dem Kreis $\mathbb{S}^1$ bewegt. Die Antwort findet sich in 4.8.35.

4.8.6. Wir illustrieren, wie einige Partialsummen von $t \mapsto \exp(it)$ die Funktion $t \mapsto \exp(it)$ approximieren. Statt $\exp(it)$ ist $\frac{11}{10}\exp(it)$ alias der Kreis mit Radius $1,1$ eingezeichnet, damit beim Hereinzoomen die Approximationen gut sichtbar sind.

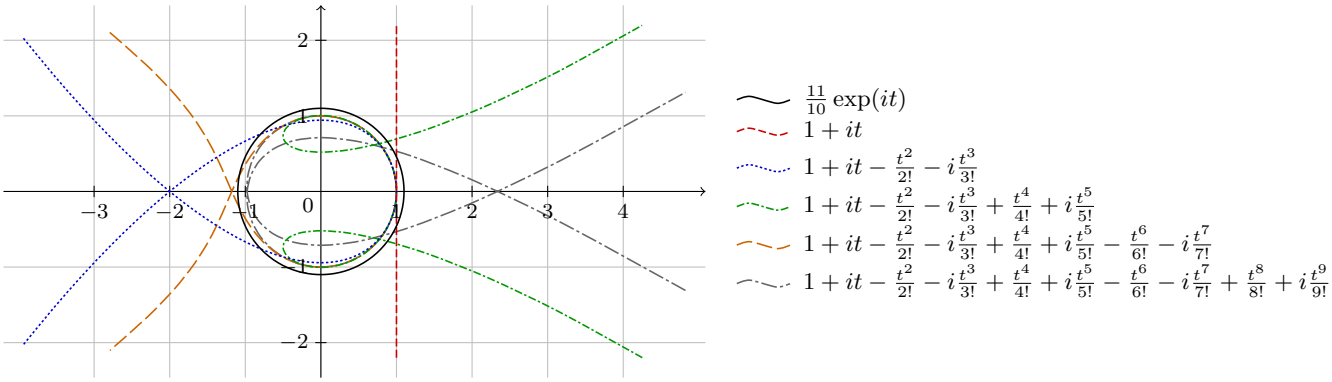


Abbildung 4. Fünf gerade Partialsummen von $\exp(it)$

Satz 4.8.7. *Die Abbildung $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ ist surjektiv.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede komplexe Zahl $z = a + ib \in \mathbb{S}^1$ mit Realteil $a \geq 0$ im Bild von γ liegt. Wegen $\cos(0) = 1$ (nach Definition) und $\cos(2) < 0$ (nach (3.2.9)) gibt es nach dem Zwischenwertsatz 4.4.2 ein $t \in [0, 2]$ mit $\cos(t) = a$. Wegen $a^2 + b^2 = 1 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2$ folgt $\sin(t) = b$ oder $\sin(t) = -b$. Im Fall $\sin(t) = b$ gilt $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t) = a + ib = z$. Im Fall $\sin(t) = -b$ gilt $\gamma(-t) = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos(t) - i\sin(t) = a + ib = z$. Also ist z im Bild von γ.

Sei nun $z = a + ib \in \mathbb{S}^1$ beliebig. Definiere w durch die Formel (2.7.4) in Aufgabe 2.7.13. Dann gilt $w^2 = z$ und somit $|w|^2 = |w^2| = |z| = 1$ und $|w| = 1$. Außerdem gilt $\mathrm{Re}(w) = \frac{\sqrt{|z|+a}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}} \geq 0$ wegen $a \in [-1, 1]$. Also gibt es nach dem bereits Bewiesenen ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(t) = w$. Es folgt $\gamma(2t) = \gamma(t)\gamma(t) = w^2 = z$. $\square$

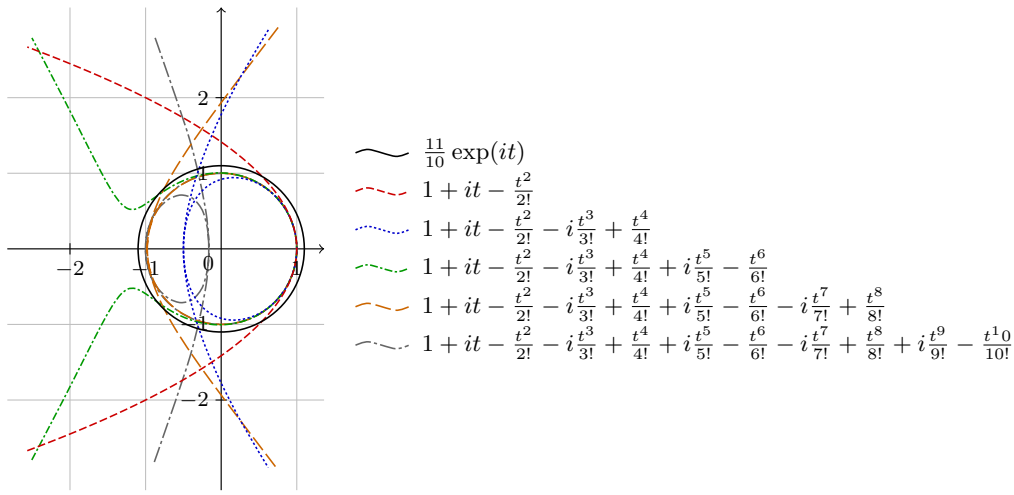


Abbildung 5. Fünf ungerade Partialsummen von $\exp(it)$

Definition 4.8.8. Die **Kreiszahl** π ist definiert durch[52]

$$\pi := \inf\{t > 0 \mid \gamma(t) = -1\}.$$

4.8.9. Wir werden sehen (siehe Satz 4.8.29), dass π der halbe Umfang eines Kreises mit Radius 1 ist (alternativ: das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines beliebigen Kreises; oder der Umfang eines Kreises mit Durchmesser Eins). Dies rechtfertigt den Namen Kreiszahl. Die Bezeichnung π kommt von *Perimeter* alias Umfang.

Proposition 4.8.10. *Es gelten* $\pi > 0$ *und* $\gamma(\pi) = -1 = \gamma(-\pi)$ *oder äquivalent*

$$e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi}.$$

Insbesondere gelten $\cos(\pm\pi) = -1$ *und* $\sin(\pm\pi) = 0$.

Beweis. Nach Definition von π als Supremum gibt es eine Folge $(x_n)_n$ positiver reeller Zahlen mit $\gamma(x_n) = -1$ und $x_n \to \pi$. Die Stetigkeit von γ liefert $\gamma(\pi) = \lim \gamma(x_n) = \lim -1 = -1$. Es folgt $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi)^{-1} = (-1)^{-1} = -1$. Sicherlich gilt $\pi \geq 0$; dabei ist Gleichheit wegen $\gamma(0) = 1$ ausgeschlossen. Die letzte Behauptung folgt sofort aus der Eulerformel. □

Definition 4.8.11. Sei $T \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **T-periodisch**, falls $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.8.12. *Die Funktionen* $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ *und* $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ *und* $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ *sind* 2π*-periodisch, d. h. es gelten*

$$\gamma(t+2\pi) = \gamma(t) \qquad \text{und} \qquad \cos(t+2\pi) = \cos(t) \qquad \text{und} \qquad \sin(t+2\pi) = \sin(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ *(dabei ist* 2π *jeweils die „minimale Periode“, vgl. Satz 4.8.14 und Aufgabe 4.8.26).*

Beweis. Wegen $\gamma(t+2\pi) = \gamma(t)\gamma(\pi)\gamma(\pi) = \gamma(t)(-1)^2 = \gamma(t)$ ist γ 2π-periodisch. Dann sind auch Realteil $\cos = \operatorname{Re} \circ \gamma$ und Imaginärteil $\sin = \operatorname{Im} \circ \gamma$ 2π-periodisch. □

Aufgabe 4.8.13. Es gelten $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ und $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Satz 4.8.14. *Es gilt*

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}, \tag{4.8.8}$$

wobei $2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *die Menge der ganzzahligen Vielfachen von* 2π *ist.*

[52] Dies ist wohldefiniert nach der „Infimumseigenschaft“ 2.5.5 der reellen Zahlen, denn die angegebene Menge ist nach unten beschränkt durch 0 und nicht leer: Nach Satz Satz 4.8.7 existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(t) = -1$. Wegen $\gamma(0) = 1$ ist t entweder positiv oder negativ. Im Fall $t < 0$ gilt $\gamma(-t) = \gamma(t)^{-1} = (-1)^{-1} = -1$.

Beweis. Wir behaupten, dass γ auf dem offenen Intervall $(-\pi, \pi)$ den Wert -1 nicht annimmt: Sonst sei $t \in (-\pi, \pi)$ mit $\gamma(t) = -1$. Der Fall $\pi > t > 0$ kann nicht eintreten nach Definition von π. Wegen $\gamma(0) = 1$ bleibt nur der Fall $-\pi < t < 0$ übrig; in diesem Fall gelten aber $0 < -t < \pi$ und $\gamma(-t) = \gamma(t)^{-1} = -1$, was wieder der Definition von π widerspricht.

Die Inklusion $\supset$ in (4.8.8) ist klar, denn für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\gamma(2\pi n) = \gamma(\pi)^{2n} = (-1)^{2n} = 1$.

Für die Inklusion $\subset$ sei $t \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(t) = 1$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ maximal mit $2\pi n \leq t < 2\pi(n+1)$ (dies verwendet $\pi > 0$). Für $s := t - 2\pi n - \pi \in [-\pi, \pi)$ gilt $\gamma(s) = \gamma(t - 2\pi n - \pi) = \gamma(t)\gamma(-2\pi n)\gamma(-\pi) = -1$. Da γ auf $(-\pi, \pi)$ den Wert -1 nicht annimmt, folgt $s = -\pi$ und somit $t = s + 2\pi n + \pi = 2\pi n$. □

Satz 4.8.15. *Die Einschränkung* $\gamma|_{[0,2\pi)} \colon [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ *ist bijektiv.*

Beweis. Injektivität: Gelte sonst $\gamma(s) = \gamma(t)$ für $s, t \in [0, 2\pi)$, wobei wir $s \leq t$ annehmen dürfen. Wir erhalten $\gamma(t - s) = \gamma(t)\gamma(-s) = \gamma(s)\gamma(-s) = \gamma(0) = 1$, also $t - s \in 2\pi\mathbb{Z}$ nach Satz 4.8.14. Wegen $0 \leq t - s < 2\pi$ folgt $t - s = 0$, also $t = s$.

Surjektivität: Nach Satz 4.8.7 ist γ surjektiv. Zu jedem $z \in \mathbb{S}^1$ existiert also ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(t) = z$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ maximal mit $2\pi n \leq t < 2\pi(n+1)$. Dann gelten $t - 2\pi n \in [0, 2\pi)$ und $\gamma(t - 2\pi n) = \gamma(t)\gamma(-2\pi n) = \gamma(t) = z$. □

Definition 4.8.16. Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $p \in I$ **Nullstelle von** f, falls $f(p) = 0$ gilt.

Satz 4.8.17.

(a) Die Nullstellen der Sinusfunktion sind genau die ganzzahligen Vielfachen von π, in Formeln

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \sin(t) = 0\} = \pi\mathbb{Z} := \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) $\sin(t) > 0$ *für alle* $t \in (0, \pi)$.

4.8.18. Aus Satz 4.8.17.(b) und der Periodizität und der Symmetrie des Sinus erhält man das Vorzeichen des Sinus auf allen Intervallen $(n\pi, (n+1)\pi)$. Beispielsweise gilt für alle $t \in (\pi, 2\pi)$

$$\sin(t) = -\sin(-t) = -\sin(\underbrace{2\pi - t}_{\in(0,\pi)}) < 0. \tag{4.8.9}$$

Beweis. Wir behaupten, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $\sin(t) = 0$
- $\gamma(t) \in \{\pm 1\}$
- $t \in \pi\mathbb{Z}$

Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt aus $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{S}^1$. Zur Äquivalenz der letzten beiden Aussagen: Aus $\gamma(t) \in \{\pm 1\}$ folgt $\gamma(2t) = \gamma(t)^2 = 1$, also $2t \in 2\pi\mathbb{Z}$ nach Satz 4.8.14 und somit $t \in \pi\mathbb{Z}$. Aus $t \in \mathbb{Z}\pi$, sagen wir $t = n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$, folgt $\gamma(t) = \gamma(n\pi) = \gamma(\pi)^n = (-1)^n \in \{\pm 1\}$ nach Proposition 4.8.10. Damit ist die Behauptung über die Nullstellen gezeigt.

Für jedes $0 < t < 1$ ist $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \mp$ der Wert einer alternierenden Reihe, und die Beträge der Glieder dieser Reihe bilden eine monoton fallende Nullfolge, so dass $\sin(t) \geq t - \frac{t^3}{3!} > 0$ nach dem Leibnizkriterium 3.2.33 gilt. (Es gilt insbesondere $1 \leq \pi$.) Da die Sinusfunktion auf $[0, \pi]$ nur die Nullstellen 0 und π hat, folgt $\sin(t) > 0$ für alle $t \in (0, \pi)$, denn sonst gäbe es eine weitere Nullstelle nach dem Zwischenwertsatz 4.4.2. □

Ende der 20. Vorlesung am 12.12.2019.

Proposition 4.8.19. *Die Abbildung* γ *induziert eine Bijektion*

$$\gamma|_{[0,\pi]} \colon [0, \pi] \to H := \{z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

zwischen $[0, \pi]$ *und dem „oberen Halbkreis“* H.

4.8.20. Wegen $\gamma(0) = 1$ und $\gamma(\pi) = -1$ und Stetigkeit von γ wird der Halbkreis im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

Beweis. Nach Satz 4.8.17 und (4.8.9) gelten für $t \in [0, 2\pi)$

$$\operatorname{Im}(\gamma(t)) = \sin(t) \begin{cases} = 0 & \text{falls } t \in \{0, \pi\}, \\ > 0 & \text{falls } t \in (0, \pi), \\ < 0 & \text{falls } t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Unter der Bijektion $\gamma|_{[0,2\pi)} \colon [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ aus Satz 4.8.15 wird also $[0, \pi]$ bijektiv auf H abgebildet. □

Proposition 4.8.21. *Es gelten $\gamma(\pi/2) = i$ und $\gamma(-\pi/2) = -i$ oder äquivalent*

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad \text{und} \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Insbesondere gelten $\cos(\pm\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(-\pi/2) = -1$.

Beweis. Setze $z := \gamma(\pi/2 \in \mathbb{S}^1$. Dann gelten $\gamma(\pi/2)^2 = \gamma(\pi) = -1$ nach Proposition 4.8.10 und $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ nach Proposition 4.8.19. Also ist z eine Quadratwurzel aus -1 mit nichtnegativem Imaginärteil, d. h. $z = i$. Es folgt $\gamma(-\pi/2) = \gamma(\pi/2)^{-1} = i^{-1} = -i$. □

Satz 4.8.22. *Es gilt*

$$\cos(t) = \sin(t + \pi/2)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere sind die Nullstellen des Kosinus genau die ungeradzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, in Formeln

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \cos(t) = 0\} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} := \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\},$$

und $\pi/2$ ist die kleinste positive Nullstelle des Kosinus.

Beweis. Für jede komplexe Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Im}(zi) = \operatorname{Im}(ai - b) = a = \operatorname{Re}(z)$. Aus Proposition 4.8.21 und der Eulerformel erhalten wir

$$\sin(t + \pi/2) = \operatorname{Im}(\gamma(t + \pi/2)) = \operatorname{Im}(\gamma(t)\gamma(\pi/2)) = \operatorname{Im}(\gamma(t)i) = \operatorname{Re}(\gamma(t)) = \cos(t).$$

Also ist t genau dann eine Nullstelle des Kosinus, wenn $t + \pi/2$ eine Nullstelle des Sinus ist, wenn also nach Satz 4.8.17 $t + \pi/2 \in \mathbb{Z}\pi$ gilt. Dies ist äquivalent zu $t \in -\pi/2 + \pi\mathbb{Z} = \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$. □

Satz 4.8.23. *Die Einschränkung $\cos|_{[0,\pi]} \colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist bijektiv und streng monoton fallend (und $\pi/2$ ist die eindeutige Nullstelle). Ihre Umkehrfunktion, der* ***Arcus-Kosinus***[53]

$$\arccos \colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

ist stetig und streng monoton fallend.

Beweis. Nach Proposition 4.8.19 und der dortigen Notation ist die erste der beiden folgenden Abbildungen bijektiv.

$$[0, \pi] \xrightarrow{\gamma|_{[0,\pi]}} H \xrightarrow{\operatorname{Re}} [-1, 1].$$

Die zweite ist sicherlich bijektiv (die Umkehrabbildung ist durch $a \mapsto a + i\sqrt{1 - a^2}$ gegeben). Damit ist $\cos|_{[0,\pi]} = \operatorname{Re} \circ \gamma|_{[0,\pi]} \colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ als Verknüpfung bijektiver Abbildungen bijektiv.

Da der Sinus bei 0 und π verschwindet (Satz 4.8.17), gelten $\cos(0) = \gamma(0) = 1$ und $\cos(\pi) = \gamma(\pi) = -1$.

Also ist die Funktion $\cos \colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv, stetig und erfüllt $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$. Somit muss sie streng monoton fallend sein (nach Aufgabe 4.4.5): Sonst gibt es reelle Zahlen $s < t$ in $[0, \pi]$ mit $\cos(s) \leq \cos(t)$; es folgt $-1 = \cos(\pi) \leq \cos(s) \leq \cos(t)$; nach dem Zwischenwertsatz 4.4.2, angewandt auf $\cos|_{[t,\pi]}$, gibt es ein $u \in [t, \pi]$ mit $\cos(u) = \cos(s)$; wegen $s < t \leq u$ widerspricht dies der Bijektivität des Kosinus auf $[0, \pi]$.

Die Ausage über die Umkehrfunktion folgt aus Korollar 4.5.2 □

[53] Das lateinische Wort *arcus* bedeutet *Bogen*. Wie später klar wird, ist der Arcus-Kosinus von $x \in [-1, 1]$ die Länge des Bogens auf dem oberen Halbkreis H von 1 zu demjenigen Punkt, dessen Realteil x ist.

4.8.24 (Wie groß ist π?)**.** Die Restgliedabschätzung des Kosinus (mit $N = 1$) aus Aufgabe 3.2.37 zeigt: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 3$ gilt $|1 - \cos(x)| \leq \frac{1}{2}|x|^2$. Für $|x| < \sqrt{2} < 3$ gilt somit $1 - \cos(x) < 1$, also $\cos(x) > 0$. Da $\pi/2$ nach Satz 4.8.23 die kleinste positive Nullstelle des Kosinus ist, folgt $\sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}$, also $2\sqrt{2} \leq \pi$. Somit gilt $2 \in [0, \pi]$. Aus $\cos(2) < 0$ (nach (3.2.9)) folgt $\pi/2 < 2$ nach Satz 4.8.23. Insgesamt ergibt sich $\sqrt{2} \leq \pi/2 < 2$. Dies ist natürlich eine sehr grobe Eingrenzung von $\pi/2$, aber immerhin ein Anfang. Durch Berechnung weiterer Werte des Kosinus wie in Beispiele 3.2.34 kann man dies verbessern. Es gilt $\pi = 3,1415926....$ Historisches zur Berechnung von π und weitere Informationen (etwa zur Transzendenz von π) findet man auf [Wik19, Kreiszahl].

Satz 4.8.25. *Die Einschränkung* $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} \colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *ist bijektiv und streng monoton wachsend (und* 0 *ist die eindeutige Nullstelle). Ihre Umkehrfunktion, der* ***Arcus-Sinus***

$$\arcsin \colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

ist stetig und streng monoton wachsend.

Beweis. Nach Satz 4.8.22 und der Symmetrie des Kosinus gilt $\sin(t) = \cos(t - \pi/2) = \cos(\pi/2 - t)$. Da die Abbildung $[-\pi/2, \pi/2] \to [0, \pi]$, $t \mapsto \pi/2 - t$, bijektiv und streng monoton fallend ist, folgt die erste Behauptung aus Satz 4.8.23. Die Ausage über die Umkehrfunktion folgt aus Korollar 4.5.2 □

Aufgabe 4.8.26. Kosinus hat 2π als „minimale Periode“: Ist $T \in \mathbb{R}$ mit $\cos(t + T) = \cos(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, so folgt $T \in 2\pi\mathbb{Z}$. Analoges gilt für den Sinus.

Definition 4.8.27. Die **Tangensfunktion** ist definiert durch

$$\tan \colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R},$$
$$t \mapsto \tan(t) := \frac{\sin(t)}{\cos(t)}.$$

Der Nenner ist hier niemals Null wegen Satz 4.8.22.

Satz 4.8.28. *Der Tangens* $\tan \colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ *ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend (und* 0 *ist die eindeutige Nullstelle und* $\tan(-t) = -\tan(t)$*). Ihre Umkehrfunktion, der* ***Arcus-Tangens***

$$\arctan \colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

ist stetig und streng monoton wachsend.

Beweis. Die Stetigkeit ist klar, da Sinus und Kosinus stetig sind. Seien $s, t \in [0, \pi/2)$ mit $s < t$. Dann gelten $0 \leq \sin(s) < \sin(t)$ und $\cos(s) > \cos(t) > 0$ nach Satz 4.8.23 und Satz 4.8.25. Daraus folgt

$$0 \leq \tan(s) = \frac{\sin(s)}{\cos(s)} < \frac{\sin(t)}{\cos(s)} < \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t).$$

Also ist tan auf $[0, \pi/2)$ streng monoton wachsend, nimmt nur nicht-negative Werte an, und es gilt $\tan(0) = 0$. Für jedes $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt

$$\tan(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$$

Aus $-\pi/2 < s < t \leq 0$ folgen $0 \leq -t < -s < \pi/2$ und somit $0 \leq -\tan(t) = \tan(-t) < \tan(-s) = -\tan(s)$, also $\tan(s) < \tan(t) \leq 0$. Also ist tan auf $(-\pi/2, 0]$ streng monoton wachsend, nimmt nur nicht-positive Werte an, und es gilt $\tan(0) = 0$. Wir folgern, dass der Tangens streng monoton wachsend und insbesondere injektiv ist.

Zur Surjektivität: Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $(0, \pi/2)$ mit $x_n \to \pi/2$. Die Stetigkeit von Kosinus und Sinus, Satz 4.8.23, Satz 4.8.25 und Proposition 4.8.21 liefern $0 < \cos(x_n) \to \cos(\pi/2) = 0$ und $0 < \sin(x_n) \to \sin(\pi/2) = 1$. Es folgt $0 < \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)} \to 0$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{\cos(x_k)}{\sin(x_k)} < \frac{1}{N}$ oder äquivalent $N < \frac{\sin(x_k)}{\cos(x_k)} = \tan(x_k)$. Es folgt $\tan(-x_k) = -\tan(x_k) < -N \leq N < \tan(x_k)$. Nach dem Zwischenwertsatz 4.4.2 nimmt tan alle Werte in $[-N, N]$ an. Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist der Tangens surjektiv. Die Ausage über die Umkehrfunktion folgt aus Korollar 4.5.2 □

Satz 4.8.29 (Geometrische Bedeutung von π)**.** *Die Zahl π ist die Länge des Halbkreises H mit Radius Eins, wobei die Länge als Supremum geeigneter approximierender Polygonzüge definiert ist,* in Formeln

$$\pi = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |v_k - v_{k-1}| \mid n \in \mathbb{N}, v_0, \dots, v_n \in H, \operatorname{Re}(v_0) < \operatorname{Re}(v_1) < \dots < \operatorname{Re}(v_n)\right\},$$

wobei $H := \{z \in \mathbb{S}^1 \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. (Im Beweis werden wir allgemeiner die Gleichheit (4.8.13) zeigen.)

Insbesondere ist 2π der Umfang eines Kreises mit Radius Eins.

4.8.30. Erkläre mit Bild, warum die rechte Seite ein gutes Maß für die Länge des Halbkreises ist (Approximation durch Streckenzug), und warum die Menge durch 4 nach oben beschränkt ist (nimm Streckenzug mit Strecken parallel zu reeller und imaginärer Achse).

Beweis. Nach Proposition 4.8.19 und Satz 4.8.23 können wir die rechte Seite wie folgt schreiben:

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq \pi\right\}$$

Sei $\varphi \in [0, \pi]$ beliebig. Wir zeigen allgemeiner die Gleichheit

$$\varphi = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq \varphi\right\}. \tag{4.8.10}$$

Anschaulich bedeutet dies, dass φ die Länge des Kreisbogens mit Radius Eins ist, der bei $1 \in \mathbb{C}$ startet und im Gegenuhrzeigersinn entlang von H bis $\gamma(\varphi)$ geht.

Um die Gleichheit zu zeigen, zeigen wir die beiden Ungleichheiten $\leq$ und $\geq$.

Ungleichheit $\leq$: Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|\gamma(t) - 1|^2 &= (\gamma(t) - 1)(\overline{\gamma(t)} - 1) = \gamma(t)\overline{\gamma(t)} - \gamma(t) - \overline{\gamma(t)} + 1 = 2 - 2\operatorname{Re}(\gamma(t)) \\ &= 2 - 2\cos(t) = 2\frac{t^2}{2!} - 2\frac{t^4}{4!} + 2\frac{t^6}{6!} \mp \dots = t^2 - 2\frac{t^4}{4!} + 2\frac{t^6}{6!} \mp \dots \leq t^2\end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus dem Beweis des Leibnizkriteriums 3.2.33 herrührt. Es folgt $|\gamma(t) - 1| \leq |t|$ für alle t mit $|t| \leq 1$. Für alle s, t mit $|s - t| \leq 1$ gilt also

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| = |\gamma(s) - \gamma(t)| \cdot |\gamma(-t)| = |(\gamma(s) - \gamma(t))\gamma(-t)| = |\gamma(s - t) - 1| \leq |s - t|.$$

Dieselbe Gleichung gilt aber auch für alle $s, t \in \mathbb{R}$, wie man leicht[54] aus der Dreiecksungleichung folgert. Damit können wir jede Summe, wie sie in der Menge rechts in (4.8.13) auftaucht, wie folgt abschätzen:

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = t_n - t_0 \leq \varphi - t_0 \leq \varphi.$$

Also ist das Supremum ebenfalls $\leq \varphi$.

Ungleichheit $\geq$: Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\gamma(t) - 1 = \exp(it) - 1 = \frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \dots = it + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} = it - t^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^{k-2}}{k!}. \tag{4.8.11}$$

Für $t \in [0, 1]$ gilt (die erste Abschätzung gilt auf Grund der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe)

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^{k-2}}{k!}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^{k-2}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

und damit erhalten wir aus (4.8.11) mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|\gamma(t) - 1| = \left|it - t^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^{k-2}}{k!}\right| \geq |it| - t^2 \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^{k-2}}{k!}\right| = t - t^2.$$

Zusammengefaßt gilt also

$$|\gamma(t) - 1| \geq t - t^2 \tag{4.8.12}$$

für alle $t \in [0, 1]$. Da $t - t^2 = t(1 - t)$ nur die Nullstellen 0 und 1 hat und außerhalb von $[0, 1]$ negativ ist (nach dem Zwischenwertsatz 4.4.2), gilt (4.8.12) für alle $t \in \mathbb{R}$.

Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachte die äquidistante Unterteilung $0 =: t_0 < t_1 := \frac{1}{n}\varphi < t_2 := \frac{2}{n}\varphi < \dots < t_n = \varphi$ und schätze ab

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \cdot |\gamma(-t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k - t_{k-1}) - 1| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left|\gamma\left(\frac{\varphi}{n}\right) - 1\right| \overset{(4.8.12)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varphi}{n} - \left(\frac{\varphi}{n}\right)^2\right) = \varphi + \frac{\varphi^2}{n}.\end{aligned}$$

[54] Sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$ so groß, dass $\frac{1}{m}|s - t| \leq 1$ gilt; dann gilt

$$\begin{aligned}|\gamma(s) - \gamma(t)| &== \left|\sum_{k=1}^{m} \gamma\left(s + \frac{k-1}{m}(t - s)\right) - \gamma\left(s + \frac{k}{m}(t - s)\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \left|\gamma\left(s + \frac{k-1}{m}(t - s)\right) - \gamma\left(s + \frac{k}{m}(t - s)\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m}|t - s| = |t - s|.\end{aligned}$$

Das Supremum auf der rechten Seite von (4.8.13) ist also $\geq \varphi + \frac{\varphi^2}{n}$, für alle $n \geq 1$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ zeigt, dass das Supremum $\geq \varphi$ ist. $\square$

Ende der 21. Vorlesung am 16.12.2019.

Definition 4.8.31. Seien $u, v \in \mathbb{S}^1$. Dann ist der **orientierte Winkel** $\angle(u, v)$ **von** u **über den Ursprung nach** v definiert als die Länge des Kreisbogens von u nach v (auf dem Kreis $\mathbb{S}^1$) im Gegenuhrzeigersinn. Für $u, v \in \mathbb{C} \setminus 0$ definiert man allgemeiner $\angle(u, v) := \angle\left(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right)$ und faßt dies auch als den Winkel zwischen den Strahlen vom Nullpunkt durch u und v auf.

4.8.32. Hier messen wir Winkel in der Einheit *Radiant*, also im Bogenmaß, siehe [Wik19, Radiant (Einheit)].

4.8.33. Die formale Definition der Länge des Kreisbogens ist wie folgt: Wegen $vu^{-1} \in \mathbb{S}^1$ gibt es nach Satz 4.8.15 genau ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $vu^{-1} = \gamma(\alpha)$ oder äquivalent $v = \gamma(\alpha)u$. Unser Kreisbogen ist dann durch $\sigma\colon [0, \alpha] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)u$, parametrisiert. Seine Länge ist definiert als das Supremum

$$L(u, v) := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})| \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq \alpha\right\} \tag{4.8.13}$$

der Längen von approximierenden Polygonzügen. (Hier könnten wir statt $0 \leq t_0$ auch $0 = t_0$ und statt $t_n \leq \alpha$ auch $t_n = \alpha$ schreiben, ohne das Supremum zu verändern.)

Wir behaupten, dass $L(u, v) = \alpha$ gilt. Um das zu sehen, zeigen wir zuerst $L(u, v) = L(zu, zv)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$: In der Tat, für beliebige $z, w, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|zw| = |z| \cdot |w|$ und somit $|zw_1 - zw_2| = |z| \cdot |w_1 - w_2|$. Für $z \in \mathbb{S}^1$ stimmt also der Abstand $|w_1 - w_2$ mit dem Abstand $|zw_1 - zw_2|$ überein. Insbesondere bleibt die Länge eines Polygonzugs unverändert, wenn man ihn „mit $z \in \mathbb{S}^1$ multipliziert“. Daraus folgt sofort $L(u, v) = L(zu, zv)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$.

Damit können wir ohne Einschränkung $v = 1$ annehmen (nimm $z = v^{-1} \in \mathbb{S}^1$). Falls $\alpha \leq \pi$ gilt, sind wir fertig nach (4.8.13), und insbesondere gilt $L(1, -1) = \pi$. Sonst gilt $L(1, v) = L(1, -1) + L(-1, v) = \pi + L(-1, v)$ (die erste Gleichung ist eine kleine Überlegung) und $\gamma(\alpha - \pi)(-1) = v$, so dass wegen $\alpha - \pi \in (0, \pi)$ nach dem ersten Fall $L(-1, v) = \alpha - \pi$ gilt, insgesamt also $L(1, v) = \alpha$.

Beispiele 4.8.34.

- $\angle(1, -1) = \pi$ nach Satz 4.8.29
  Also entsprechen $\pi = \pi$ rad $= \pi$ Radiant in der im Alltags gebäuchlichen Einheit für Winkel $180°$.
- $\angle(1, e^{i\alpha}) = \alpha$ für alle $\alpha \in [0, 2\pi)$. Für $\alpha \in [0, \pi]$ ist dies die Aussage von (4.8.13), für $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ siehe 4.8.33.
  Insbesondere kann man $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ nun wie folgt interpretieren: Sei ein Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ gegeben. Zeichne einen Strahl, ausgehend vom Nullpunkt, so dass der Winkel von der nichtnegativen reellen Achse zu diesem Strahl α ist. Dann schneidet dieser Strahl den Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ in einem Punkt mit „horizontalem“ Realteil $\cos(\alpha)$ und „vertikalem“ Imaginärteil $\sin(\alpha)$, nämlich dem Punkt $\exp(i\alpha) = e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$. Male Bild.
- Beispielsweise gelten $\angle(1, i) = \angle(1, e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2}\pi$ (alias $90°$), $\angle(1, -i) = \angle(1, e^{i\frac{3}{2}\pi}) = \frac{3}{2}\pi$ (alias $270°$).
- Der orientierte Winkel ist invariant unter Multiplikation mit Elementen von $z \in \mathbb{S}^1$: Gegeben $u, v \in \mathbb{S}^1$ gilt $\angle(u, v) = \angle(zu, zv)$ (dies ist in 4.8.33 erklärt). Beispielsweise gilt $\angle(u, iu) = \frac{1}{2}\pi$ für alle $u \in \mathbb{S}^1$.
  Beispielsweise gelten $\angle(i, -1) = \angle(-1, -i) = \angle(-i, 1) = \frac{1}{2}\pi$ (alias $90°$), $\angle(-1, i) = \frac{3}{2}\pi$ (alias $270°$).
- Gegeben $u, v \in \mathbb{S}^1$ sei $\alpha \in [0, 2\pi)$ das eindeutige Element mit $u^{-1}v = \gamma(\alpha)$ (Satz 4.8.15). Dann gilt nach den vorherigen Punkten $L(u, v) = L(1, u^{-1}v) = L(1, \gamma(\alpha)) = \alpha$.
- Insbesondere gilt $\angle(u, v) \in [0, 2\pi)$.
- $\angle(e^{it}, e^{i(t+\alpha)}) = \alpha$ für alle $\alpha \in [0, 2\pi)$.

4.8.35. Die folgenden Bemerkungen sind sehr schön in den Animationen auf [Wik19, am Ende von Sinus und Kosinus, Definition am Einheitskreis] und [Wik19, Sine, unit circle definition] illustriert. Ich stelle mir die Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ vor als ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ an der Stelle $\gamma(t) = \exp(it) \in \mathbb{S}^1$ des Einheitskreises in $\mathbb{C}$ befindet. Wenn wir unser Teilchen nur im Zeitintervall $[0, \pi]$ betrachten, so besucht es dabei jeden Punkt des oberen Halbkreises genau einmal (Proposition 4.8.19). Zum Zeitpunkt $t \in [0, \pi]$ ist genauer $\gamma(t)$ der Punkt des Halbkreises H, so dass der Kreisbogen von 0 bis $\gamma(t)$ genau die Länge t hat (nach (4.8.13) mit $\varphi = t$). Mit anderen Worten bewegt sich unser Teilchen im Zeitintervall $[0, \pi]$ mit Geschwindigkeit Eins auf dem Halbkreis H von 1 nach -1. Wegen $\gamma(t + \pi) = \gamma(t)\gamma(\pi) = -\gamma(t)$ bewegt sich unser Teilchen im Zeitintervall $[\pi, 2\pi]$ mit Geschwindigkeit Eins auf dem unteren Kreisbogen -1 nach 1. Weil γ 2π-periodisch ist, bewegt sich unser Teilchen insgesamt mit Geschwindigkeit Eins im Gegenuhrzeigersinn auf dem Kreis $\mathbb{S}^1$, wobei es sich genau zu den Zeiten in $2\pi\mathbb{Z}$ bei 1 befindet.

Satz 4.8.36 (Polarkoordinaten)**.**

(a) *(Existenz) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat die Gestalt*

$$z = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi)$$

für ein $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Man nennt r und φ die ***Polarkoordinaten von*** *z. Dabei ist r der* ***Radius*** *oder die* ***Radialkoordinate*** *und φ heißt* ***Winkel*** *oder* ***Winkelkoordinate*** *oder* ***Argument****. Der Winkel wird hier in der Einheit Radiant, also im Bogenmaß, gemessen* [Wik19, Radiant (Einheit)]*; dabei entspricht etwa $\pi/2 = \pi/2\,\mathrm{rad}$ einem rechten Winkel $90°$.*

(b) *(Eindeutigkeit) Gilt $re^{i\varphi} = se^{i\psi}$ für $r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, so folgen*
- *$r = s$ und,*
- *falls $r \neq 0$ gilt, $\varphi - \psi \in 2\pi\mathbb{Z}$.*

(c) *Insbesondere gilt: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eindeutige Zahlen $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit*

$$z = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi).$$

4.8.37. Male Bild!

Beweis. Existenz: Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}^1$. Nach Satz 4.8.7 gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\frac{z}{|z|} = \gamma(t) = \exp(it)$. Setze $r := |z|$. Dann gilt $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = r\exp(it) = re^{it}$.

Eindeutigkeit: Gelte $re^{i\varphi} = se^{i\psi}$. Betragnehmen liefert $r = |re^{i\varphi}| = |se^{i\psi}| = s$. Im Fall $r \neq 0$ folgt $\gamma(\varphi) = e^{i\varphi} = e^{i\psi} = \gamma(\psi)$, also $\gamma(\varphi - \psi) = \gamma(\varphi)\gamma(\psi)^{-1} = 1$ und somit $\varphi - \psi \in 2\pi\mathbb{Z}$ nach Satz 4.8.14.

Die letzte Behauptung ist nun offensichtlich. □

4.8.38. Seien $z = re^{i\varphi}$ und $w = se^{i\psi}$ komplexe Zahlen in Polarkoordinaten. Dann gilt

$$zw = rse^{i\varphi}e^{i\psi} = (rs)e^{i(\varphi+\psi)}.$$

In Polarkoordinaten ist die Multiplikation komplexer Zahlen also durch Multiplikation der Radien und Addition der Winkel gegeben.

4.8.39. Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ hat

$$e^z = e^a \cdot e^{ib}$$

Radius $e^a \in \mathbb{R}_{>0}$ und Winkel b. Man kann sich die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ also wie folgt vorstellen: Sie wickelt jede senkrechte Gerade $a + i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auf einen Kreis mit Radius e^a um den Ursprung. Sie bildet jede horizontale Gerade $\mathbb{R} + ib \subset \mathbb{C}$ bijektiv auf den im Ursprung startenden Strahl durch e^{ib} ab, wobei der Ursprung selbst nicht zu dem Strahl gehört.

Aufgabe 4.8.40 (Umrechnung zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten)**.** Nach Satz 4.8.36 ist hoffentlich klar, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{>0} \times [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ (r, \varphi) &\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \end{aligned}$$

bijektiv ist. Zeige: Die Umkehrabbildung bildet $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ab auf das Paar (r, φ) mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } x > 0, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Satz 4.8.41. *Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Dann hat die Gleichung $X^n = 1$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich*

$$1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1} \qquad \text{für } \zeta := \zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

*Man nennt diese komplexen Zahlen die n-****ten Einheitswurzeln****.*

4.8.42. Die n-ten Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene sind die Ecken desjenigen regelmäßigen, in den Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ einbeschriebenen n-Ecks, das $1 \in \mathbb{C}$ als Ecke hat. Besucht man die Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn und startet bei $1 = e^{0\frac{2\pi i}{n}}$, so besucht man danach $\rho = e^{1\frac{2\pi i}{n}}$, $\rho^2 = e^{2\frac{2\pi i}{n}}$, …, $\rho^{n-1} = e^{(n-1)\frac{2\pi i}{n}}$ und kommt dann wieder beim Ausgangspunkt $1 = e^{n\frac{2\pi i}{n}}$ an.

4.8.43. Die n-ten Einheitswurzeln werden beispielsweise in der schnellen Fourier-Transformation (*Fast Fourier Transformation*, *FFT*) verwendet (siehe [Wik19, Schnelle Fourier Transformation]). Diese hat viele Anwendungen, beispielsweise im Schönhage-Strassen-Algorithmus zur Multiplikation großer Zahlen.

Beweis. Es gilt $\zeta^n = \exp(2\pi i/n)^n = \exp(2\pi) = 1$. Für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ folgt

$$(\zeta^k)^n = \zeta^{kn} = (\zeta^n)^k = 1^k = 1.$$

Also sind die angegebenen Zahlen Lösungen der Gleichung $X^n - 1$. Sie sind paarweise verschieden wegen $\zeta^k = \exp(2\pi ki/n) = \gamma(2\pi k/n)$ und Satz 4.8.15.

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung, gelte also $z^n = 1$. Betragnehmen liefert $1 = |1| = |z^n| = |z|^n$, also $|z| = 1$ und $z \in \mathbb{S}^1$. Also gibt es nach Satz 4.8.15 genau ein $t \in [0, 2\pi)$ mit $z = \gamma(t)$. Aus $1 = z^n = \gamma(t)^n = \gamma(nt)$ folgt $nt \in 2\pi\mathbb{Z}$ nach Satz 4.8.14. Wegen $nt \in [0, 2n\pi)$ gibt es genau ein $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit $nt = 2\pi k$. Es folgt $z = \gamma(t) = \gamma(2\pi k/n) = \zeta^k$. □

Beispiel 4.8.44. Wir berechnen die sechsten Einheitswurzeln. Sei $\zeta := \zeta_6 := e^{2\pi i/6} = e^{\pi i/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$. Seien $a = \cos(\pi/3)$ und $b = \sin(\pi/3)$ Real- und Imaginärteil von ζ, also $\zeta = a + ib$. Wegen $\zeta^3 = (e^{\pi i/3})^3 = e^{\pi i} = -1$ erhalten wir per Rechnung oder binomischer Formel

$$-1 = (a + ib)^3 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3.$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -1 &= a(a^2 - 3b^2), \\ 0 &= (3a^2 - b^2)b. \end{aligned}$$

Es gelten $b = \sin(\pi/3) > 0$ und $a = \cos(\pi/3) > 0$ nach Satz 4.8.17 und Satz 4.8.23. Wegen $b \neq 0$ liefert die zweite Gleichung $b^2 = 3a^2$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir $-1 = -8a^3$, also $a^3 = \frac{1}{8}$ und daraus $a = \frac{1}{2}$ wegen $a > 0$. (Wer mag, kann statt der ersten Gleichung auch $1 = |\zeta|^2 = a^2 + b^2$ verwenden.) Wir folgern $b^2 = 1 - a^2 = \frac{3}{4}$ und erhalten $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ wegen $b > 0$. Dies zeigt

$$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$\zeta = \zeta_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

gelten. Die fünf sechsten Einheitswurzeln sind also $\zeta^0 = 1$, $\zeta = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\zeta^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\zeta^3 = -1$, $\zeta^4 = \zeta^3\zeta = -\zeta = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\zeta^5 = \zeta^{-1} = \overline{\zeta} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Realteile und Imaginärteile dieser Einheitswurzeln sind nach der Eulerformel die Werte des Kosinus und Sinus an den Stellen 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4/3\pi$, $5/3\pi$.

4.8.45. Wir listen einige Werte von Kosinus und Sinus auf (die oberen drei Wertepaare haben wir bereits berechnet; die unteren drei Wertepaare kann der Leser mit den bisherigen Mitteln überprüfen).

	cos	sin
π	-1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Man mag nun erwarten, dass es stets Formeln dieser Bauart gibt. Dies ist aber falsch: Beispielsweise gibt es für $\cos(\pi/7)$, $\cos(\pi/9)$, $\cos(\pi/11)$ keine solchen Formeln, wie man mit Galois-Theorie, einem Teilgebiet der Algebra, zeigen kann.

4.9. **Einige Grenzwerte.**

Definition 4.9.1 (Divergenz gegen $\pm\infty$)**.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir sagen, dass sie **gegen** $\infty = +\infty$ **divergiert** und schreiben dafür $x_n \to \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, falls gilt:

$$\forall K \in \mathbb{R}\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon x_n > K.$$

Wir sagen, dass sie **gegen** $-\infty$ **divergiert**, geschrieben $x_n \to -\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, falls gilt:

$$\forall K \in \mathbb{R}\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon x_n < K.$$

4.9.2. Jede gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergierende reelle Folge ist unbeschränkt und damit divergent (= nicht konvergent), was die Terminologie rechtfertigt.

4.9.3. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert genau dann gegen $+\infty$, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n > 0$ für alle $n \geq m$ gilt und die Folge $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq m}$ positiver reeller Zahlen gegen 0 konvergiert.

Definition 4.9.4 (Grenzwerte bei Funktionen)**.** Sei $f\colon I \to J$ eine Funktion, wobei $I, J \subset \mathbb{R}$ Teilmengen sind (meist ist I ein Intervall und $J = \mathbb{R}$). Seien $p, a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.[55] Wir schreiben

$$\lim_{x\to p} f(x) = a \qquad \text{oder genauer} \qquad \lim_{\substack{x\to p\\ x\in I}} f(x) = a \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to a \text{ für } x \to p,$$

falls die beiden folgenden Bedingungen gelten:

- Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $x_n \to p$.[56]
- Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $x_n \to p$ gilt $f(x_n) \to a$.

Wir verwenden die analoge Definition für komplexwertige Funktionen $f\colon I \to \mathbb{C}$ auf einer Teilmenge $I \subset \mathbb{C}$ und $p, a \in \mathbb{C}$.

4.9.5. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, mit $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann (folgen)stetig in $p \in I$, wenn $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in I}} f(x) = f(p)$ gilt. Dies ist schlicht eine Umformulierung der Definition 4.1.1.

4.9.6. Die zweite Bedingung in Definition 4.9.4 ist im Fall $p, a \in \mathbb{R}$ äquivalent zu: $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in I\colon |x - p| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$. Dies wird genau wie Satz 4.1.6 bewiesen. In den Fällen $p \in \{\pm\infty\}$ oder $a \in \{\pm\infty\}$ gibt es naheliegende Varianten (statt mit ε bzw. δ arbeite mit $K \in \mathbb{R}$, vgl. 4.9.1).

4.9.7. Die obige Definition erweitert den vorherigen Begriff der Konvergenz (bzw. Divergenz gegen $\pm\infty$) einer Folge (betrachte $I = \mathbb{N}$ und $p = \infty$). Jedoch erlauben wir jetzt auch in gewissen Fällen der Divergenz die Schreibweise lim.

4.9.8 (Lokalität des Grenzwerts)**.** Der Grenzwert einer Funktion für $x \to p$ hängt nur von ihrem Verhalten nahe bei p ab: Gilt $p \in (c, d)$ für reelle Zahlen $c < d$, so existiert $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in I}} f(x)$ genau dann, wenn $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in I\cap(c,d)}} f(x)$ existiert, und in diesem Fall stimmen die beiden Grenzwerte überein.

4.9.9. Proposition 3.1.11 und Lemma 3.1.20 liefern sofort analoge Aussagen in diesem Kontext: Seien $f, g\colon I \to J$ Funktionen und $p \in I$ und gelten $f(x) \to a \boxed{\in \mathbb{R}}$ und $g(x) \to b \boxed{\in \mathbb{R}}$ für $x \to p$. Dann gelten $f(x) + g(x) \to a + b$ und $f(x)g(x) \to ab$ für $x \to p$. Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$ gilt, so folgt $a \leq b$. Falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $a \neq 0$ gelten, so folgt $1/f(x) \to 1/a$ für $x \to p$.

Proposition 4.9.10. *Es gelten*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \tag{4.9.1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty \tag{4.9.2}$$

Für jede positive reelle Zahl $a > 0$ gelten

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^a = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} x^a = \infty. \tag{4.9.3}$$

[55] Wir verlangen nicht, dass p ein Element von I ist. Meist ist dies gerade der interessante Fall.

[56] Dies ist im Fall $p \in I$ trivial.

4.9.11. Male Graphen für x^3 und $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Beweis. Sowohl (4.9.1) als auch (4.9.2) folgen aus Satz 4.7.2. Wir erklären beispielhaft $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Sei $x_n \to \infty$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ surjektiv ist, gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $\exp(C) > K$. Wegen $x_n \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $x_n > C$. Auf Grund des streng monotonen Wachstums von exp folgt $\exp(x_n) > \exp(C) > K$ für alle $n \geq N$. Dies zeigt $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Zur ersten Gleichung in (4.9.3): Per Definition gilt $x^a = \exp(a \log(x))$.

Kurzfassung: Aus $0 < x \to 0$ folgt $\log(x) \to -\infty$ nach (4.9.2), also $a \log(x) \to -\infty$ wegen $a > 0$, also $x^a = \exp(a \log(x)) \to 0$ nach (4.9.1).

Langversion: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge positiver reeller Zahlen mit $x_n \to 0$. Dann folgt $\log(x_n) \to -\infty$ nach (4.9.2), also $a \log(x_n) \to -\infty$ wegen $a > 0$, also $x_n^a = \exp(a \log(x_n)) \to 0$ nach (4.9.1).

Der Beweis der zweiten Gleichung in (4.9.3) geht analog. □

4.9.12. Die Gleichungen (4.9.3) bedeuten, dass für $a > 0$ die stetige Funktion $x^a\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ (vgl. Lemma 4.7.13) durch $0 \mapsto 0$ zu einer stetigen Funktion $x^a\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ausgedehnt werden kann. Für $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ erhält man so insbesondere die Stetigkeit der Funktionen $(-)^m\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $(-)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{-}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche wir schon in Satz 4.6.1 bewiesen haben.

Proposition 4.9.13. *Für jede positive reelle Zahl $a > 0$ gelten*[57]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0.$$

In Worten wächst e^x schneller als jede positive Potenz x^a und $\log(x)$ wächst langsamer als jede positive Potenz x^a. (Die linke Gleichheit gilt sogar für alle $a \in \mathbb{R}$.)

Beweis. Wir zeigen zuerst die linke Gleichheit. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $a < N$. Dann gilt $a \log(x) < N \log(x)$ für jedes reelle $x > 1$ (wegen $\log(x) > \log(1) = 0$, siehe Satz 4.7.2) und $0 < x^a = \exp(a \log(x)) < \exp(N \log(x)) = x^N$ wegen des streng monotonen Wachstums von exp. Es folgt $\frac{e^x}{x^a} > \frac{e^x}{x^N}$ und es genügt zu zeigen, dass der rechte Ausdruck für $x \to \infty$ gegen ∞ geht. Für jedes $x > 0$ gilt aber

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^N}{N!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} + \cdots > \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

und somit

$$\frac{e^x}{x^N} > \frac{x}{(N+1)!}$$

Der rechte Ausdruck geht für $x \to \infty$ sicherlich gegen ∞, was dann natürlich auch für den linken Ausdruck der Fall ist. (Bis hier galt alles für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.)

Zur rechten Gleichheit: Gelte nun $x_n \to \infty$ für eine beliebige Folge positiver reeller Zahlen. Nach (4.9.2) gilt $\log(x_n) \to \infty$, also $y_n := a \log(x_n) \to \infty$ wegen $a > 0$. Die schon bewiesene linke Gleichheit (für $a = 1$) zeigt $\frac{e^{y_n}}{y_n} \to \infty$, also $\frac{y_n}{e^{y_n}} \to 0$. Wir erhalten

$$\frac{\log(x_n)}{(x_n)^a} = \frac{\frac{y_n}{a}}{\exp(a \log(x_n))} = \frac{1}{a} \cdot \frac{y_n}{\exp(y_n)} \to 0.$$ □

Aufgabe 4.9.14. Für $n \to \infty$ gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Ende der 22. Vorlesung am 19.12.2019.

5. Differentiation in einer Variablen

5.1. Differenzierbare Funktionen.

Definition 5.1.1. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Teilmengen (meist ist I ein Intervall und $J = \mathbb{R}$) und $f\colon I \to J$ eine Funktion. Sei $p \in I$. Dann heißt f

[57] Hier ist x implizit als positiv vorausgesetzt, so dass alle Ausdrücke definiert sind.

(a) **in p differenzierbar**, falls es ein $b \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in I \setminus \{p\}}} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = b$$

gibt.[58] Man nennt dann b die[59] **Ableitung von f an der Stelle** p und schreibt $f'(p) = b$. Gebräuchlich sind auch die Schreibweisen $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(p) = b$ oder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big|_{x=p} f(x) = b$.

(b) **differenzierbar**, wenn f in jedem Punkt $p \in I$ differenzierbar ist. Dann heißt die Funktion $f' \colon I \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f'(p)$, **Ableitung** von f.

Statt *differenzierbar* sagt man auch **ableitbar**, statt *Ableitung* auch **Differenzial**. Dieselben Definitionen verwenden wir für Funktionen $I \to J$ für Teilmengen $I, J \subset \mathbb{C}$.

5.1.2. Der Quotient $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ von Differenzen heißt **Differenzenquotient** und ist geometrisch die Steigung der Geraden durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(p, f(p))$ in $\mathbb{R}^2$ (wobei $x \neq p$). Differenzierbarkeit von f in p mit Ableitung $b = f'(p)$ bedeutet, dass die Steigungen solcher Geraden beliebig wenig von b abweichen, wenn x hinreichend nahe bei p liegt. Im Fall der Differenzierbarkeit ist es deshalb sinnvoll, die Gerade durch $(p, f(p))$ mit Steigung $b = f'(p)$ als **Tangente im Punkt** $(p, f(p))$ **an den Graphen von** f zu definieren.

Diese Tangente ist der Graph der Funktion

$$\begin{aligned} &I \to \mathbb{R}, \\ &x \mapsto f(p) + (x - p) f'(p). \end{aligned}$$

Diese Funktion ist die „beste Approximation von f in der Nähe von p durch eine affine-lineare Funktion“. Eine affin-lineare Funktion ist eine Funktion der Gestalt $x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, also eine Funktion, deren Graph eine Gerade ist.

5.1.3. Man kann den Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ auch als $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ schreiben für $0 \neq h \in \mathbb{R}$ mit $p + h \in I$. Dann ist Differenzierbarkeit in p die Frage nach der Existenz des Grenzwerts $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ für $h \to 0$.

5.1.4. Mögliche Interpretationen der Ableitung (teils f', teils Ableitung $f'(p)$ in einem Punkt p; übernommen aus [Thu94]):

- Infinitesimal: Das Verhältnis der infinitesimalen Veränderung des Funktionswertes zur infinitesimalen Veränderung des Arguments.
- Symbolisch: Die Ableitung von x^n ist nx^{n-1}, die von $\sin(x)$ ist $\cos(x)$, etc. (wie wir sehen werden).
- Logisch: Genau dann gilt $f'(p) = b$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $0 < h < \delta$ gilt
$$\left| \frac{f(p+h) - f(p)}{h} - b \right| < \varepsilon.$$
Dies ist nur eine alternative Formulierung unserer Definition (vgl. 4.9.6).
- Geometrisch: Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(p, f(p))$.
- Physikalisch: Die Ableitung $f'(p)$ ist die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Zeitpunkt p, das zur Zeit t an der Stelle $f(t)$ ist. In diesem Kontext schreibt man oft $\dot{f}(p)$ statt $f'(p)$.
- Approximation: Beste affin-lineare Approximation bei p (siehe oben).
- Mikroskopisch: Zoomt man immer näher an den Graphen von f bei $(p, f(p))$ heran, so erhält man im Grenzwert eine Gerade, deren Steigung die Ableitung ist.

Beispiele 5.1.5. (a) Betrachte die Funktion $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Sei $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p} = \frac{p - x}{(x - p)xp} = \frac{-1}{xp}$$

[58] Man beachte: Nach Definition 4.9.4 muss es in diesem Fall mindestens eine Folge in $I \setminus \{p\}$ geben, die gegen p konvergiert.
[59] Der bestimmte Artikel ist gerechtfertigt, da b als Grenzwert eindeutig ist.

strebt für $0 \neq x \to p \neq 0$ gegen $\frac{-1}{p^2}$. Also ist f differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f' \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}, \\ p &\mapsto \frac{-1}{p^2}. \end{aligned}$$

Kurzschreibweise: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$. Sei $p \in \mathbb{R}$. Dann ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \frac{ax + b - (ap + b)}{x - p} = a.$$

unabhängig von x (und auch von p) und somit ist f differenzierbar in p mit Ableitung $f'(p) = a$. Die Ableitung $f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f'(p) = a$, ist die konstante Funktion mit Wert a. Man schreibt kurz $(ax + b)' = a$.

Insbesondere gelten (gegeben $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir c für die konstante Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ mit Wert c):

- $a = 1$, $b = 0$: Die Identität $\mathrm{id} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\mathrm{id}' = 1$ oder kurz $x' = 1$.
- $a = 0$, b beliebig: Die konstante Funktion $b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $b' = 0$.

(c) Betrachte die dritte Potenz $f = (-)^3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto= x^3$. Der Differenzenquotient bei $p \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{(p + h)^3 - p^3}{h} = \frac{3p^2h + 3ph^2 + h^3}{h} = 3p^2 + 3ph + h^2$$

für $h \neq 0$. Für $h \to 0$ strebt dieser Ausdruck gegen $3p^2$ (beispielsweise weil er als polynomiale Funktion in h auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist und bei 0 den Wert $3p^2$ hat). Also ist $f = (-)^3$ stetig mit Ableitung $f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto 3p^2$. Die Ableitung von $x \mapsto x^3$ ist also $p \mapsto 3p^2$ (oder $x \mapsto 3x^2$).

In der üblichen Schreibweise für Funktionen schreibt man x^3 statt f und dann analog $3p^2$ (oder $3x^2$) statt f', so dass man $(x^3)' = 3p^2$ (oder $(x^3)' = 3x^2$) erhält.

Die Schreibweise $(x^3)' = 3x^2$ ist sehr verbreitet. Der Leser sollte sich aber im Klaren sein, was damit gemeint ist: Die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^3$ ist die Funktion $x \mapsto 3x^2$.

(d) Dasselbe Argument zeigt $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (verwende die binomische Formel). Wir geben in Proposition 5.1.11 einen Alternativbeweis.

(e) Die Betragsfunktion $|-| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in jedem Punkt $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung

$$f'(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p > 0, \\ -1 & \text{falls } p < 0, \end{cases}$$

sie ist aber nicht differenzierbar in 0 (Übung).

5.1.6. Genau dann ist $f \colon I \to J$ in $p \in I$ differenzierbar mit Ableitung b, wenn $f \colon I \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar ist mit Ableitung b.

Lemma 5.1.7 (Lokalität von Differenzierbarkeit)**.** *Seien $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a < b$ reelle Zahlen und $p \in (a, b) \cap I$. Dann ist die Einschränkung $f|_{(a,b)\cap I} \colon (a, b) \cap I \to \mathbb{R}$ genau dann in p differenzierbar, wenn f in p differenzierbar ist.*

Beweis. Klar, da für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $x_n \to p$ ein geeignetes Endstück $(x_n)_{n\geq N}$ in $(a, b) \cap I$ liegt. □

Satz 5.1.8. *Jede differenzierbare Funktion ist stetig.*

Genauer: Ist $f \colon I \to J$ differenzierbar in $p \in I$, so ist f stetig in p.

Beweis. Laut Annahme gilt $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \to f'(p)$ für $x \to p$ mit $x \neq p$. Wegen $x - p \to 0$ für $x \to p$ folgt

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \to f'(p) \cdot 0 = 0 \quad \text{für } x \to p \text{ mit } x \neq p.$$

nach 4.9.9. Also gilt $f(x) \to f(p)$ für $x \to p$, d. h. f ist stetig in p. □

5.1.9. Weiterführende Links:

- [Wik19, Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen]
- Für eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion siehe [Wik19, Weierstraß-Funktion].
- Für eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung nicht stetig ist, siehe [Wik19, Stetige Differenzierbarkeit].

Satz 5.1.10 (Summen- und Produktregel/Leibnizregel)**.** *Summen und Produkte differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar: Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ in $p \in I$ differenzierbare Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen*

$$f + g, fg := f \cdot g, \lambda f\colon I \to \mathbb{R}$$

ebenfalls in p differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned}(f+g)'(p) &= f'(p) + g'(p)\\ (fg)'(p) &= f'(p)g(p) + f(p)g'(p)\\ (\lambda f)'(p) &= \lambda f'(p).\end{aligned}$$

Sind insbesondere f und g differenzierbar, so sind $f + g$, fg und λ differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f' + g'\\ (f \cdot g)' &= f'g + fg'\\ (\lambda f)' &= \lambda f'.\end{aligned}$$

Beweis. Nach 4.9.9 gilt

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(p)}{x-p} = \frac{f(x) - f(p)}{x-p} + \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \to f'(p) + g'(p) \qquad \text{für } x \to p.$$

Also ist $f + g$ in p differenzierbar mit Ableitung $f'(p) + g'(p)$.

Aus 4.9.9 und der Stetigkeit von f und g in p (siehe Satz 5.1.8, vgl. 4.9.5) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - (fg)(p)}{x-p} &= \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x-p} = \frac{f(x)g(x) - f(p)g(x) + f(p)g(x) - f(p)g(p)}{x-p}\\ &= \frac{f(x) - f(p)}{x-p} \cdot g(x) + f(p) \cdot \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \to f'(p)g(p) + f(p)g'(p) \qquad \text{für } x \to p.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Produktregel. Der Spezialfall $g = \lambda$ (oder der naheliegende Beweis) liefert die Behauptung zu λf. □

Proposition 5.1.11 (Ableitung ganzzahliger Potenzen)**.** *Sei $n \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $x \mapsto x^n$ ist differenzierbar mit Ableitung $x \mapsto nx^{n-1}$, in Kurzschreibweise $(x^n)' = nx^{n-1}$.*

Damit ist gemeint:

- *Fall $n > 0$: Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, ist differenzierbar mit Ableitung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^{n-1}$.*
- *Fall $n = 0$: Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, ist differenzierbar mit Ableitung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$.*
- *Fall $n < 0$: Die Funktion $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x \mapsto x^n$, ist differenzierbar mit Ableitung $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x \mapsto nx^{n-1}$.*

Beweis. Die Aussagen für $n = -1, 0, 1$, also $(x^{-1})' = (1/x)' = -1/x^2 = -x^{-2} = (-1)x^{-2}$, $1' = 0$ und $x' = 1 = 1x^0$, sind bereits bekannt, siehe Beispiele 5.1.5. Die anderen Aussagen folgern wir mit vollständiger Induktion unter Verwendeung der Produktregel aus Satz 5.1.10:

Fall $n > 0$: Ist $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n > 0$ bekannt, so folgt $(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)'x + x^n x' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n$, die Aussage stimmt also auch für $n + 1$.

Fall $n < 0$: Ist $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n < 0$ bekannt, so folgt $(x^{n-1})' = (x^n x^{-1})' = (x^n)'x^{-1} + x^n(x^{-1})' = nx^{n-1}x^{-1} + x^n(-x^{-2}) = (n-1)x^{n-2}$, die Aussage stimmt also auch für $n - 1$. □

Satz 5.1.12 (Kettenregel - Ableitung einer Verknüpfung)**.** *Seien $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K$ Funktionen zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Sei f in $p \in I$ differenzierbar und sei g in $f(p)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in p differenzierbar mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p).$$

Sind g und g differenzierbar, so ist $g \circ f$ differenzierbar mit

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Ende der 23. Vorlesung am 06.06.2020.

Beweis. Setze $q := f(p)$ und definiere

$$\begin{aligned} \widetilde{g} \colon J &\to \mathbb{R}, \\ y &\mapsto \widetilde{g}(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(q)}{y-q} & \text{falls } y \neq q, \\ g'(q) & \text{falls } y = q. \end{cases} \end{aligned}$$

Da g in q differenzierbar ist, ist $\widetilde{g}$ stetig in q. Für alle $y \in J$ gilt $g(y) - g(q) = \widetilde{g}(y) \cdot (y - q)$. Damit erhalten wir

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(p)}{x - p} = \frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x - p} = \widetilde{g}(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Wir analysieren das Verhalten der beiden Faktoren des Produkts rechts für $x \to p$. Da f in p stetig ist (Satz 5.1.8), gilt $f(x) \to f(p)$. Da $\widetilde{g}$ in $q = f(p)$ stetig ist, folgt $\widetilde{g}(f(x)) \to \widetilde{g}(f(p)) = g'(f(p))$. Da f in p differenzierbar ist, gilt $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \to f'(p)$. Mit 4.9.9 folgern wir

$$\widetilde{g}(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \to g'(f(p)) \cdot f'(p) \qquad \text{für } x \to p.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 5.1.13 (Quotientenregel)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, und $p \in I$ ein Punkt.*

(a) Ist f in p differenzierbar, so ist $\frac{1}{f} \colon I \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(p) = -\frac{f'(p)}{f(p)^2}.$$

Ist f differenzierbar, so gilt

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

(b) Ist f in p differenzierbar und $g \colon I \to \mathbb{R}$ eine weitere, bei p differenzierbare Funktion, so ist $\frac{g}{f} \colon I \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}.$$

Sind f und g differenzierbar, so gilt

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}.$$

Beweis. Setze $g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-1}$. Dann gilt $g' = (x^{-1})' = -x^{-2}$ nach Proposition 5.1.11. Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist die Verknüpfung

$$\frac{1}{f} = g \circ f \colon I \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

Aus der Kettenregel folgt die Differenzierbarkeit bei p mit Ableitung

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(p) = g'(f(p))f'(p) = -\frac{1}{f(p)^2}f'(p) = -\frac{f'(p)}{f(p)^2}.$$

Aus der Produktregel (Satz 5.1.10) folgt dann

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \left(g\frac{1}{f}\right)'(p) = g'(p)\left(\frac{1}{f}\right)(p) + g(p)\left(\frac{1}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)}{f(p)} - g(p)\frac{f'(p)}{f(p)^2} = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}. \quad \square$$

Aufgabe 5.1.14. Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $n \in \mathbb{Z}$. Sei $f^n\colon I \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto f(x)^n$ defininert (wobei wir im Fall $n < 0$ annehmen, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ gilt; im Fall $n = -1$ ist die Notation f^{-1} etwas gefährlich, da die Umkehrfunktion, falls sie existiert, ebenfalls mit f^{-1} bezeichnet wird.) Dann gilt $(f^n)' = nf^{n-1}f'$. (Im Fall $n = 0$ ist dies als Null zu interpretieren.)

Satz 5.1.15. *Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion, also* $\exp, \sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *sind differenzierbar mit Ableitungen*

$$\exp' = \exp, \qquad \sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Differenzierbarkeit von exp in $p = 0$ mit Ableitung 1. Die Restgliedabschätzung der Exponentialfunktion 3.2.25 (mit $N = 2$) liefert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \frac{3}{2}$

$$|\exp(x) - (1 + x)| \leq 2\frac{|x|^2}{2!} = |x|^2,$$

also unter der Zusatzannahme $x \neq 0$

$$\left|\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} - 1\right| = \left|\frac{\exp(x) - 1 - x}{x}\right| \leq |x|.$$

Die rechte Seite geht gegen Null für $x \to 0$. Dies zeigt, dass der Differenzenquotient gegen 1 strebt. Also ist exp bei 0 differenzierbar mit Ableitung $\exp'(0) = 1$.

Für beliebiges $p \in \mathbb{R}$ gilt nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\frac{\exp(p + h) - \exp(p)}{h} = \exp(p)\frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} \to \exp(p)\exp'(0) = \exp(p) \qquad \text{für } 0 \neq h \to 0.$$

Also ist exp differenzierbar mit $\exp' = \exp$.

Wir geben zwei Beweise für die Differenzierbarkeit von Sinus und Kosinus.

Erster Beweis: Unser Argument für $\exp' = \exp$ zeigt auch, dass $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $\exp' = \exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist. Da $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(ix)$ mit der Verknüpfung

$$\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto ix} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}$$

übereinstimmt und die Kettenregel auch für Funktionen zwischen Teilmengen von $\mathbb{C}$ gilt (mit dem analogen Beweis), folgt[60]

$$\gamma'(p) = (\exp(ix))'(p) = \exp'(ip)(ix)'(p) = \exp(ip)i(p) = \exp(ip)i.$$

Wir folgern

$$(\exp(-ix))'(p) = -\exp(-ip)i.$$

Aus (4.8.4) und (4.8.5) folgt somit nach der Summenregel 5.1.10 die Differenzierbarkeit von Kosinus und Sinus mit Ableitungen

$$\begin{aligned}
\cos'(p) &\overset{(4.8.4)}{=} (\cos(x))'(p) = \frac{1}{2}\Big((\exp(ix))'(p) + (\exp(-ix))'(p)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\exp(ip)i - \exp(-ip)i\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\Big(-\exp(ip) + \exp(-ip)\Big) \overset{(4.8.5)}{=} -\sin(p), \\
\sin'(p) = (\sin(x))'(p) &\overset{(4.8.5)}{=} = \frac{1}{2i}\Big((\exp(ix))'(p) - (\exp(-ix))'(p)\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\exp(ip))i + \exp(-ip)i\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\exp(ip)) + \exp(-ip)\Big) \overset{(4.8.4)}{=} \cos(p).
\end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Wir zeigen zuerst $\sin'(0) = 1 = \cos(0)$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachte den Differenzenquotienten

$$\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x) - 0}{x - 0} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}$$

Wegen absoluter Konvergenz (Beweis durch Quotientenkriterium 3.2.17 wie in Lemma 3.2.21) gilt für $|x| \leq 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n-2}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e.$$

Es folgt $x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} \to 0$ für $x \to 0$. Also strebt unser Differenzenquotient für $x \to 0$ gegen 1, d. h. der Sinus ist bei Null differenzierbar mit Ableitung $\sin'(0) = 1$.

[60] Hier steht $\exp(ix)$ für die Funktion $x \mapsto \exp(ix)$. Ebenso steht ix für die Funktion $x \mapsto ix$, deren Ableitung die konstante Funktion i ist, deren Auswertung $i(p)$ natürlich i ist.

Ähnlich strebt der Differenzenquotient

$$\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \frac{\cos(x)-1}{x-0} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

für $x \to 0$ gegen 0, es gilt also $\cos'(0) = 0 = \sin(0)$.

Sei $p \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Additionstheoreme (4.8.7) liefern die Gleichheiten

$$\cos(p+x) = \cos(p)\cos(x) - \sin(p)\sin(x),$$
$$\sin(p+x) = \sin(p)\cos(x) + \cos(p)\sin(x),$$

die wir als Gleichheiten zwischen Funktionen in $x \in \mathbb{R}$ auffassen. Die rechte Seite ist jeweils differenzierbar im Punkt 0 (nach Satz 5.1.10) und wir erhalten

$$\cos'(p) = (\cos(p+x))'(0) = \cos(p)\cos'(0) - \sin(p)\sin'(0) = -\sin(p),$$
$$\sin'(p) = (\sin(p+x))'(0) = \sin(p)\cos'(0) + \cos(p)\sin'(0) = \cos(p),$$

wobei die erste Gleichung formal aus der Kettenregel 5.1.12 oder auch direkt aus der Definition folgt. □

Beispiel 5.1.16 (Ableitung des Tangens)**.** Nach der Quotientenregel und den gerade berechneten Ableitungen von Sinus und Kosinus ist der Tangens $\tan = \frac{\sin}{\cos} \colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$\tan' = \frac{\sin' \cdot \cos - \sin \cdot \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos \cdot \cos + \sin \cdot \sin}{\cos^2} = 1 + \tan^2 .$$

Wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$ kann man auch den vorletzten Ausdruck umformen und erhält $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$.

Satz 5.1.17 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f \colon I \to J$ eine bijektive, streng monotone*[61]*, stetige Abbildung zwischen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$.*[62] *Ist f in $p \in I$ differenzierbar mit $f'(p) \neq 0$, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} \colon J \to I$ (stetig und) in $q := f(p)$ differenzierbar mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))} = \frac{1}{f'(p)}. \tag{5.1.1}$$

Ist f differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so gilt

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

5.1.18. Merkregel (wenn man schon weiß, dass f^{-1} in q differenzierbar ist): Ableiten von $(f \circ f^{-1})(x) = x$ bei q liefert nach der Kettenregel $f'(f^{-1}(q))(f^{-1})'(q) = 1$. Im Fall $f'(f^{-1}(q))$ folgt daraus sofort (5.1.1).

Beweis. Nach Aufgabe 4.4.5 ist f streng monoton. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist stetig (und streng monoton) nach Korollar 4.5.2.

Weil f in p differenzierbar ist, gibt es eine Folge in $I \setminus \{p\}$, die gegen p konvergiert. Ihr Bild unter der stetigen, bijektiven Abbildung f ist dann eine Folge in J, die gegen q konvergiert. (Die Existenz einer solchen Folge ist eine der Bedingungen für Differenzierbarkeit in q.)

Da f in p differenzierbar ist, gilt

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \to f'(p) \qquad \text{für } x \to p \text{ (wobei } x \in I \setminus \{p\}).$$

Da Zähler und Nenner in diesem Differenzenquotienten nicht Null sind, da f injektiv ist, und da nach Annahme $f'(p) \neq 0$ gilt, folgt

$$\frac{x-p}{f(x)-f(p)} \to \frac{1}{f'(p)} \qquad \text{für } x \to p \text{ (wobei } x \in I \setminus \{p\})$$

nach 4.9.9.

[61] Diese Voraussetzung ist automatisch, siehe Anfang des Beweises.

[62] Dass J ein Intervall ist, ist ebenfalls automatisch, denn Bilder von Intervallen unter stetigen Abbildungen sind Intervalle nach Korollar 4.4.3.

Für $J \setminus \{q\} \ni y \to q$ gilt auf Grund der Stetigkeit von f^{-1} sicherlich $I \setminus \{p\} \ni f^{-1}(y) \to f^{-1}(q) = p$ und damit nach dem zuvor Erklärten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{y - q} = \frac{f^{-1}(y) - p}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \to \frac{1}{f'(p)}.$$

Also ist f^{-1} in q differenzierbar mit Ableitung $1/f'(p)$. □

Ende der 24. Vorlesung am 09.01.2020.

Beispiel 5.1.19 (Ableitung des natürlichen Logarithmus und allgemeiner Potenzen)**.** Satz 5.1.17 ist auf $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ anwendbar (nach den Sätzen 4.7.2 und 5.1.15 und weil $\exp' = \exp$ keine Nullstelle hat). Also ist $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung bei $q \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp'(\log(q)} = \frac{1}{\exp(\log(q)} = \frac{1}{q}$$

oder kurz $\log' = \frac{1}{x}$.

Damit können wir die Ableitung allgemeiner Potenzen bestimmen. Für $r \in \mathbb{R}$ ist die r-te Potenz $(-)^r\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ durch $x \mapsto x^r = \exp(r\log(x))$ definiert. Die Ableitung bei $p > 0$ ist also nach der Kettenregel

$$\exp'(r\log(p))(r\log(-))'(p) = \exp(r\log(p))r\frac{1}{p} = rp^r p^{-1} = rp^{r-1}.$$

In Kurzschreibweise gilt also

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Dies erweitert die frühere Aleitungsregel $(x^n)' = nx^{n-1}$ für ganzzahlige Potenzen. Für $r = \frac{1}{n}$ erhält man die Ableitung der n-ten Wurzelfunktion, für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Der Spezialfall $r = \frac{1}{2}$ liefert $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Beispiel 5.1.20. Es gilt $1 = \frac{1}{1} = \log'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\log(1+h)-\log(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h}$. Es folgt $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (hier muss n so groß sein, dass der Logarithmus definiert ist). Die Stetigkeit der Exponentialfunktion liefert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\log\left(1+\tfrac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(x\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = \exp(x) = e^x$$

für $x \neq 0$ (und für $x = 0$ ist der Grenzwert links offensichtlich $1 = e^0$). Insbesondere gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, vgl. Lemma 3.1.27.

Dies zeigt, dass stetige Verzinsung mit Zinssatz x jährlich einen Wachstumsfaktor von e^x ergibt. Nun mag man die Funktionalgleichung $e^x e^y = e^{x+y} = e^{\frac{x+y}{2}}e^{\frac{x+y}{2}}$ in diesem Kontext interpretieren.

Beispiel 5.1.21 (Ableitungen von Tangens, Arcus-Kosinus, -Sinus und -Tangens)**.** Satz 5.1.17 ist auf $\cos\colon (0,\pi) \to (-1,1)$, $\sin\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to (-1,1)$ und $\tan\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ anwendbar (Sätze 4.8.23, 4.8.25, 4.8.28; die Ableitungen dieser drei Funktionen haben auf den angegebenen Definitionsbereichen keine Nullstelle). Wir erhalten somit

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für alle } x \in (-1,1),$$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos(x)))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für alle } x \in (-1,1),$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei haben wir nicht nur die Formel $\sin^2 + \cos^2 = 1$ verwendet, sondern auch, dass der Kosinus auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ und der Sinus auf $(0,\pi)$ positiv sind. Diese Formeln sind manchmal beim Integrieren hilfreich.

5.2. **Folgerungen aus den Eigenschaften der Ableitung.**

Definition 5.2.1. Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in I$. Dann **hat f in p ein Maximum** oder **nimmt in p ein Maximum an**, wenn $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in I$. Gilt dabei Gleichheit nur für $x = p$, so sagt man, dass f **in p ein striktes Maximum hat**. Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f|_{(p-\varepsilon,p+\varepsilon)\cap I}$ in p ein Maximum bzw. striktes Maximum hat, so sagt man, dass f **in p ein lokales Maximum bzw. ein isoliertes lokales Maximum hat**.
Ersetzt man $f(p) \geq f(x)$ durch $f(p) \leq f(x)$, so erhält man die analogen Definitionen für Minima.

Satz 5.2.2 (Notwendige Bedingung für ein Extremum)**.** *Seien $a < b$ Elemente von $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an einem Punkt $p \in (a,b)$ ihr Maximum oder Minimum annimmt. Ist f in p differenzierbar, so gilt $f'(p) = 0$.*

Beweis. Nehme f bei p ein Maximum an. Da der Zähler des Differenzenquotienten stets ≤ 0 ist, gilt

$$\sigma(h) := \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } h < 0, \\ \leq 0 & \text{falls } h > 0. \end{cases}$$

Da Ungleichungen im Grenzwert erhalten bleiben (siehe 4.9.9), folgt

$$0 \leq \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \sigma(h) = \lim_{h\to 0} \sigma(h) = f'(p) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sigma(h) \leq 0,$$

also $f'(p) = 0$. □

5.2.3. Der folgende Satz ist ein wichtiger Nachtrag zu stetigen Funktionen (und benötigt nicht den Begriff der Differenzierbarkeit).

Satz 5.2.4 (Satz vom Minimum und Maximum)**.** *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall nimmt Maximum und Minimum an.*

In Formeln: Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es Elemente $m, M \in [a,b]$ mit

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Beweis. Falls das (nichtleere) Bild $f([a,b])$ von f nach oben beschränkt ist, setze $A := \sup f([a,b])$ und sonst $A := +\infty$. Sicherlich gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ mit $f(x_n) \to A$ für $n \to \infty$. Diese Folge ist beschränkt, da sie in dem beschränkten Intervall $[a,b]$ liegt. Nach Bolzano-Weierstraß 3.1.42 hat sie eine konvergente Teilfolge, sagen wir $x_{n_k} \to M$ für $k \to \infty$ und ein geeignetes $M \in \mathbb{R}$. Da alle Folgeglieder in $[a,b]$ liegen, folgt $M \in [a,b]$ (nach Lemma 3.1.19). Da f in M (folgen)stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) \to f(M) \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist die Folge $(f(x_{n_k}))_k$ beschränkt und somit gilt $A \neq \infty$. Auf Grund der Eindeutigkeit des Grenzwerts (Lemma 3.1.10) folgt $A = f(M) \in \mathbb{R}$. Dies zeigt $f(x) \leq f(M)$ für alle $x \in [a,b]$. Analog zeigt man die Existenz eines $m \in [a,b]$ mit $f(m) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. In Worten nimmt die Funktion f ihr Minimum bei m und ihr Maximum bei M an. □

Beispiel 5.2.5. Die Funktion $(0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ist stetig, aber nicht beschränkt (obwohl $(0,1]$ beschränkt ist). Dies ist kompatibel mit dem Satz vom Minimum und Maximum 5.2.4, da das Intervall $(0,1]$ nicht abgeschlossen ist.

Satz 5.2.6 (Satz von Rolle)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $p \in (a,b)$ mit $f'(p) = 0$.*

Beweis. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum 5.2.4 gibt es $m, M \in [a,b]$, so dass f bei m sein Minimum und bei M sein Maximum annimmt. Liegt einer der beiden Punkte m und M in (a,b), so verschwindet f' an diesem Punkt nach der notwendigen Bedingung für ein Extremum 5.2.2, und wir sind fertig. Sonst ist $f(a) = f(b)$ sowohl Maximum als auch Minimum von f, d. h. f ist konstant, und dann verschwindet f' an jedem Punkt von $(a,b) \neq \emptyset$. □

Korollar 5.2.7 (Mittelwertsatz)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $p \in (a,b)$ mit*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Insbesondere gilt: Gibt es $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Beweis. Betrachte die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := f(x) - \Big[f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big].$$

(Der Teil in eckigen Klammern ist die Gerade (oder Sekante mit dem Graphen graph(f)) durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.) Die Funktion g ist stetig, in (a,b) differenzierbar und erfüllt $g(a) = 0 = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle 5.2.6 gibt es ein $p \in (a,b)$ mit $0 = g'(p) = f'(p) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Definition 5.2.8. Wir nennen ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ **mehrpunktig**[63], wenn es mindestens zwei verschiedene Elemente enthält. (Dann enthält es automatisch unendlich viele Elemente.)

5.2.9. Ist I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so ist I automatisch mehrpunktig. Trotzdem werden wir in dieser Situation oft die Bedingung aufschreiben, dass das betrachtete Intervall mehrpunktig ist.

Satz 5.2.10 (Erste Ableitung und Monotonie)**.** *Sei I ein mehrpunktiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten:*

$$\begin{aligned}
f' > 0 &\implies f \text{ wächst streng monoton}\\
f' \geq 0 &\iff f \text{ wächst monoton}\\
f' < 0 &\implies f \text{ fällt streng monoton}\\
f' \leq 0 &\iff f \text{ fällt monoton}\\
f' = 0 &\iff f \text{ ist konstant}
\end{aligned}$$

Hierbei meint $f' > 0$, dass $f'(p) > 0$ für alle $p \in I$ gilt, und analog in den anderen Fällen.

Beweis. Seien $a < b$ Elemente von I. Nach dem Mittelwertsatz 5.2.7 gibt es ein $p \in (a,b)$ mit $f'(p) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Da der Nenner positiv ist, ist der Zähler genau dann positiv/null/negativ, wenn $f'(p)$ diese Eigenschaft hat. Dies zeigt alle Implikationen $\implies$.

Nehmen wir nun an, dass f monoton wächst. Sei $p \in I$. Dann ist jeder Differenzenquotient ≥ 0, und dies überträgt sich auf den Grenzwert (siehe 4.9.9)), d. h. $f'(p) \geq 0$. Wenn f monoton fällt, können wir analog argumentieren. Ist f konstant, so gilt offensichtlich $f' = 0$. □

Beispiel 5.2.11. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, wächst streng monoton, erfüllt aber nicht $f' > 0$.

Ende der 25. Vorlesung am 13.01.2020.

Korollar 5.2.12. *Seien I ein mehrpunktiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann sind äquivalent:*

- $f' = f$
- $\exists c \in \mathbb{R}\colon f(x) = c\exp(x) = ce^x$

In Worten sind also die Lösungen der Differentialgleichung $f' = f$ auf einem Intervall genau die Vielfachen der Exponentialfunktion.

Beweis. Sicherlich erfüllt jedes Vielfache $c\exp$ die angegebene Differentialgleichung. Sei f differenzierbar mit $f' = f$. Setze $g(x) := f(x)e^{-x}$. Dann gilt $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$. Somit ist g eine konstante Funktion (Satz 5.2.10). Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $g = c$. Dann gilt $f(x) = f(x)e^{-x}e^x = g(x)e^x = ce^x$ für alle $x \in I$. □

Aufgabe 5.2.13. Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle differenzierbaren Lösungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $f' = af$.

Satz 5.2.14 (Hinreichende Bedingung für ein isoliertes lokales Extremum)**.** *Seien I ein mehrpunktiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $p \in I$ mit $f'(p) = 0$. Sei f' differenzierbar in p.*

- *Gilt $f''(p) > 0$, so hat f ein **isoliertes lokales Minimum bei** p, d. h. es gibt ein $r > 0$ mit $f(p) < f(q)$ für alle $q \in I$ mit $0 < |p-q| < r$.*

[63] Dies ist keine Standardterminologie.

- *Gilt $f''(p) < 0$, so hat f ein* ***isoliertes lokales Maximum bei*** *p.*

Beweis. Da f' bei p differenzierbar ist (und $f'(p) = 0$ gilt), ist

$$\begin{aligned} g\colon I &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{f'(x)-f'(p)}{x-p} = \frac{f'(x)}{x-p} & \text{falls } x \neq p, \\ f''(p) & \text{falls } x = p, \end{cases} \end{aligned}$$

stetig bei p und erfüllt

$$f'(x) = g(x)(x-p) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Gelte $0 < f''(p) = g(p)$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $g > 0$ auf $(p-r, p+r) \cap I$ nach Lemma 4.4.1. Für alle $x \in (p-r, p) \cap I$ gilt dann $f'(x) < 0$. Für alle $x \in (p, p+r) \cap I$ gilt $f'(x) > 0$. Beachte, dass die beiden Schnitte $(p-r, p) \cap I$ und $(p, p+r) \cap I$ Intervalle sind, und mindestens eines davon ist nicht leer, da I mehrpunktig ist. Nach Satz 5.2.10 fällt f streng monoton auf $(p-r, p) \cap I$ und wächst streng monoton auf $(p, p+r) \cap I$; weiter fällt f monoton auf $(p-r, p] \cap I$ und wächst monoton auf $[p, p+r) \cap I$. Daraus folgt leicht, dass $f(p)$ ein isoliertes Minimum ist.

Der Fall $f''(p) < 0$ geht analog. □

Beispiel 5.2.15. Die Funktion $f(x) = x^2$ hat bei $p = 0$ ein isoliertes lokales Minimum (Satz 5.2.14). Dies gilt auch für die Funktion $f(x) = x^4$, jedoch folgt dies nicht aus Satz 5.2.14. Also ist die dort angegebene hinreichende Bedingung keine notwendige Bedingung für ein isoliertes lokales Minimum.

5.3. **Regeln von de l'Hospital.**

Satz 5.3.1 (Regeln von de l'Hospital - abgeschwächte Version)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $p \in I$. Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen $f', g'\colon I \to \mathbb{R}$ stetig sind*[64]*. Gelte $f(p) = 0$ und $g(p) = 0$ und $g'(p) \neq 0$. Haben g und g' keine Nullstelle auf $I \setminus \{p\}$, so gilt*

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \neq p}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.3.2. Male Bild, das die Aussage plausibel macht.

Beweis. Die Voraussetzung, dass I neben p einen weiteren Punkt enthält, sorgt dafür, dass es eine Folge in $I \setminus \{p\}$ gibt, die gegen p konvergiert.

Da f' und g' stetig sind, gelten $f'(x) \to f'(p)$ und $g'(x) \to g'(p)$ für $x \to p$ (hier und im Folgenden werden natürlich nur $x \in I$ betrachtet). Da g' auf I nirgends Null ist, folgt

$$\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} \in \mathbb{R}.$$

Nach Definition der Ableitung gelten $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \to f'(p)$ und $\frac{g(x)-g(p)}{x-p} \to g'(p)$, jeweils für $x \to p$ mit $x \neq p$.

Es gilt $g(x) \neq g(p)$ für alle $x \neq p$, denn sonst hätte g' nach dem Satz von Rolle 5.2.6 eine Nullstelle auf $I \setminus \{p\}$. Somit gilt $\frac{g(x)-g(p)}{x-p} \neq 0$ für alle $x \neq p$; zusammen mit $g'(p) \neq 0$ liefert dies

$$\frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} \to \frac{f'(p)}{g'(p)} \qquad \text{für } x \to p \text{ mit } x \neq p,$$

Der Ausdruck links stimmt aber wegen $f(p) = 0 = g(p)$ mit $\frac{f(x)}{g(x)}$ überein. Also gilt

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \neq p}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

□

Beispiel 5.3.3. Betrachte $\frac{\sin(x)}{x}$ für $x \to 0$. Nach Satz 5.3.1 konvergiert dies gegen $\frac{\cos(0)}{1} = 1$. (Dies wissen wir schon, denn $1 = \cos(0) = \sin'(0) = \lim \frac{\sin(x)}{x}$.)

[64] Eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist, heißt **stetig differenzierbar**. Wir verlangen also, dass f und g stetig differenzierbar sind.

Lemma 5.3.4 (Allgemeiner Mittelwertsatz/Cauchys Mittelwertsatz)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen und seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die im offenen Intervall (a,b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $p \in (a,b)$ mit*

$$f'(p)\Big(g(b) - g(a)\Big) = g'(p)\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

5.3.5. Verschwindet g' nicht auf (a,b), so gilt $g(a) \neq g(b)$ nach dem Satz von Rolle 5.2.6, und wir erhalten

$$\frac{f'(p)}{g'(p)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Für $g(x) = x$ liefert dies den früheren Mittelwertsatz 5.2.7. Die geometrische Anschauung im Allgemeinen ist auf [Wik19, Cauchy's mean value theorem] erklärt.

Beweis. Betrachte die Funktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := f(x)\Big(g(b) - g(a)\Big) - g(x)\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

Sie ist stetig, in (a,b) differenzierbar und erfüllt $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$. Nach dem Satz von Rolle 5.2.6 gibt es ein $p \in (a,b)$ mit $0 = h'(p) = f'(p)\Big(g(b) - g(a)\Big) - g'(p)\Big(f(b) - f(a)\Big)$. □

Satz 5.3.6 (Regeln von de l'Hospital)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein Punkt, so dass es eine Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{p\}$ mit $x_n \to p$ gibt. Seien $f, g\colon I \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to p} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to p} |g(x)| = \infty$.

Haben g und g' keine Nullstelle auf $I \setminus \{p\}$ und existiert $\lim\limits_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und diese beiden Werte stimmen überein, in Formeln

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $p \notin I$ annehmen (sonst zerschneide I an der Stelle p in zwei Teile und betrachte den „linksseitigen" und den „rechtsseitigen" Grenzwert separat). Das Intervall liegt somit entweder komplett „links" oder „rechts" von p.

Setze $Q := \lim\limits_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(a) **Fall $Q \in \mathbb{R}$:** Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass für alle $y \in (p-\delta, p+\delta) \cap I$ gilt $\frac{f'(y)}{g'(y)} \in (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon)$.

Für beliebige $a, b \in (p-\delta, p+\delta) \cap I$ mit $a \neq b$ (und solche Elemente gibt es auch) gilt $g(a) \neq g(b)$, da g' keine Nullstelle auf $I \setminus \{p\}$ hat (nach dem Satz von Rolle 5.2.6). Somit liefert der allgemeine Mittelwertsatz 5.3.4 (und Obiges) ein $y = y_{a,b} \in (p-\delta, p+\delta) \cap I$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \in (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon). \tag{5.3.1}$$

Wir unterscheiden die beiden Fälle.

(i) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to p} g(x)$**:** Lassen wir a fixiert und b gegen p streben, so folgt mit (4.9.9)

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \xrightarrow{b\to p} \frac{0 - f(a)}{0 - g(a)} = \frac{f(a)}{g(a)} \in [Q-\varepsilon, Q+\varepsilon].$$

Dies zeigt, dass für beliebiges $a \in I$ mit $|a - p| < \delta$ bereits $\left|\frac{f(a)}{g(a)} - Q\right| \leq \varepsilon$ gilt, also die gewünschte Gleichheit der Grenzwerte.

(ii) $\lim\limits_{x\to p} |g(x)| = \infty$**:** Wegen

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f(a)}{g(b)}}{1 - \frac{g(a)}{g(b)}}$$

folgt aus (5.3.1)

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(a)}{g(b)} + \frac{f'(y_{a,b})}{g'(y_{a,b})}\left(1 - \frac{g(a)}{g(b)}\right) \in \frac{f(a)}{g(b)} + \Big(1 - \frac{g(a)}{g(b)}\Big) \cdot (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon).$$

für alle $a, b \in (p-\delta, p+\delta) \cap I$ mit $a \neq b$.

Sei nun $a \in (p-\delta, p+\delta) \cap I$ fest gewählt (diese Menge ist nicht leer). Sei $1 > \varepsilon' > 0$ beliebig. Wegen $\lim\limits_{x\to p} |g(x)| = \infty$ gilt $\lim\limits_{x\to p} \frac{1}{g(x)} = 0$. Somit gibt es ein $\delta' > 0$, so dass für alle $b \in (p-\delta', p+\delta') \cap I$ gelten $|\frac{f(a)}{g(b)}| < \varepsilon'$ und $|\frac{g(a)}{g(b)}| < \varepsilon'$; für solche b gilt dann

$$\frac{f(b)}{g(b)} \in (-\varepsilon', \varepsilon') + (1-\varepsilon', 1+\varepsilon') \cdot (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon).$$

Sei nun $\varepsilon'' > 0$ beliebig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $1 > \varepsilon' > 0$ mit [65]

$$(-\varepsilon', \varepsilon') + (1-\varepsilon', 1+\varepsilon') \cdot (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon) \subset (Q-\varepsilon'', Q+\varepsilon'').$$

Wie oben erhalten wir ein $\delta > 0$ (das von ε abhängt), fixieren dann ein $a \in (p-\delta, p+\delta) \cap I$, und erhalten dann ein δ' wie oben. Für alle $b \in (p-\delta', p+\delta') \cap I$ gilt dann nach der Wahl von ε' und ε'' und dem Obigen $\frac{f(b)}{g(b)} \in (Q-\varepsilon'', Q+\varepsilon'')$. Dies zeigt die Behauptung.

(b) **Fall $Q \in \pm\infty$:** Durch eventuelles Ersetzen von g mit $-g$ können wir ohne Einschränkung $Q = +\infty$ annehmen.
Der Beweis geht nun im Wesentlichen genauso wie der obige Beweis, jedoch betrachtet man statt eines $\varepsilon > 0$ samt offenen Intervalls $(Q-\varepsilon, Q+\varepsilon)$ ein beliebiges $K \in \mathbb{R}$ samt offenen Intervalls (K, ∞). Wir überlassen die Details dem Leser.

□

Beispiel 5.3.7. Betrachte $\frac{\exp(x)}{x^{10}}$ für $x \to \infty$ (wir kennen den Grenzwert schon nach Proposition 4.9.13). Nach Satz 5.3.6 hat dies dasselbe Grenzwertverhalten wie $\frac{\exp(x)}{10x^9}$ (im Sinne, das der erste Grenzwert existiert und mit dem zweiten übereinstimmt, falls dieser existiert), was wiederum dasselbe Grenzwertverhalten wie $\frac{\exp(x)}{10 \cdot 9x^8}$ hat, ..., was wiederum dasselbe Grenzwertverhalten wie $\frac{\exp(x)}{10!}$ hat. Dies geht aber gegen ∞ nach Proposition 4.9.10.

Aufgabe 5.3.8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, d. h. f ist differenzierbar mit stetiger Ableitung f' und f' ist ebenfalls differenzierbar mit stetiger Ableitung f''. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}$

$$f''(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p-h) - 2f(p) + f(p+h)}{h^2}.$$

Hinweis: Regeln von de l'Hospital 5.3.6.

6. Integration in einer Variablen

6.1. Gleichmäßige Stetigkeit.

6.1.1. Wir beginnen mit einem Nachtrag zur Stetigkeit, den wir bald benötigen.

Definition 6.1.2. Eine Abbildung $f\colon I \to J$ zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x, y \in I\colon |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y))| < \varepsilon.$$

6.1.3. Im Gegensatz zur ε-δ-Stetigkeit von f, also der Forderung der Stetigkeit in allen Punkten $y \in I$, in Formeln

$$\forall y \in I\colon \forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in I\colon |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y))| < \varepsilon,$$

wird bei der gleichmäßigen Stetigkeit verlangt, dass $\delta > 0$ unabhängig von y existiert.

6.1.4. Illustriere mit „δ-ε-Rechtecken".

6.1.5. Jede gleichmäßig stetige Abbildung ist offensichtlich stetig. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel 6.1.6 zeigt.

Ende der 26. Vorlesung am 16.01.2020.

Beispiel 6.1.6. Die Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$, ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

---

[65] Setze etwa $\varepsilon := \frac{1}{4}\varepsilon''$. Da $x \mapsto (1-x)(Q-\varepsilon)$ und $x \mapsto (1-x)(Q+\varepsilon)$ stetig sind, insbesondere bei Null, gibt es („für Epsilon=ε") ein („Delta", das wir hier aber ε' nennen) $0 < \varepsilon' < 1$, so dass für jedes $x \in (-\varepsilon', \varepsilon')$ gelten

$$(1-x)(Q-\varepsilon) \in (Q - \frac{1}{2}\varepsilon'', Q),$$
$$(1-x)(Q+\varepsilon) \in (Q, Q + \frac{1}{2}\varepsilon'').$$

Da für fixiertes x wie eben die Funktion $y \mapsto (1-x)y$ streng monoton wachsend ist (wegen $1-x > 0$), folgt aus $y \in (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon)$

$$Q - \frac{1}{2}\varepsilon'' < (1-x)(Q-\varepsilon) < (1-x)y < (1-x)(Q+\varepsilon) < Q + \frac{1}{2}\varepsilon'',$$

also $(1-\varepsilon', 1+\varepsilon') \cdot (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon) \subset (Q - \frac{1}{2}\varepsilon'', Q + \frac{1}{2}\varepsilon'')$. Wir können ohne Einschränkung zusätzlich $\varepsilon' \leq \frac{1}{2}\varepsilon''$ annehmen. Damit gilt dann

$$(-\varepsilon', \varepsilon') + (1-\varepsilon', 1+\varepsilon') \cdot (Q-\varepsilon, Q+\varepsilon) \subset (-\frac{1}{2}\varepsilon'', \frac{1}{2}\varepsilon'') + (Q - \frac{1}{2}\varepsilon'', Q + \frac{1}{2}\varepsilon'') \subset (Q-\varepsilon'', Q+\varepsilon'')$$

wie gewünscht.

Beweis. Stetigkeit ist klar nach Proposition 4.2.1. Falls f gleichmäßig stetig ist, gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\forall x, y \in I\colon |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y))| < \varepsilon$. Sei $n \geq 1$ so groß, dass $\frac{1}{n} < \delta$ gilt, und setze $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{2n}$. Wegen $|x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{n} < \delta$ muss $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n})| < \varepsilon = 1$ gelten. Dies widerspricht aber $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n})| = |n - 2n| = n \geq 1$. Also ist f nicht gleichmäßig stetig. □

Satz 6.1.7. *Jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig: Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Falls f nicht gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $n \geq 1$ reelle Zahlen $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ gibt. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset [a, b]$ ist beschränkt und hat nach Bolzano-Weierstraß 3.1.38 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Sei $p = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ folgt $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = p$. Da f (folgen)stetig ist, folgt $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(p) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Es gibt also ein $K \in \mathbb{N}$ mit $|f(y_{n_K}) - f(p)| < \varepsilon/2$ und $|f(x_{n_K}) - f(p)| < \varepsilon/2$. Wir erhalten den Widerspruch

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_K}) - f(y_{n_K})| \leq |f(x_{n_K}) - f(p)| + |f(p) - f(y_{n_K})| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$ □

Aufgabe 6.1.8. Die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Aufgabe 6.1.9. Die Verknüpfung gleichmäßig stetiger Funktionen ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 6.1.10. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls gilt:

$$\exists L > 0\colon \forall x, y \in I\colon |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Zeige, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Bonus: Die Umkehrung ist nicht richtig. Beispielsweise ist $\sqrt{-}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und nach Satz 6.1.7 gleichmäßig stetig, jedoch nicht Lipschitz-stetig (warum?).

6.2. **Integration stetiger Funktionen.**

Definition 6.2.1. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion. Sei

$$I(f) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i - a_{i-1}) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\colon \forall i\colon \forall x \in [a_{i-1}, a_i]\colon f(x) \geq c_i \right\}$$

die Menge aller „naiven Integrale zu Treppen, die unter f liegen“. Der Satz vom Minimum und Maximum 5.2.4 zeigt, dass es $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ gibt. Daraus folgt, dass $m(b - a) \in I(f)$ gilt und dass $M(b - a)$ eine obere Schranke von $I(f)$ ist. Somit ist $I(f)$ nicht leer und nach oben beschränkt, hat also nach der Supremumseigenschaft der reellen Zahlen ein Supremum in $\mathbb{R}$. Definiere

$$\int_{[a,b]} f := \int_a^b f := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup I(f) \in \mathbb{R}$$

und nenne dies das **Integral von f über das Intervall** $[a, b]$. Man nennt f in diesem Kontext den **Integranden** (= den zu Integrierenden).

6.2.2. Gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt aus den obigen Erklärungen

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a). \tag{6.2.1}$$

6.2.3. Illustriere durch Bild als Flächeninhalt. Anschaulich misst $\int_a^b f$ die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, wobei Flächenstücke unterhalb der x-Aches negativ genommen werden. Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes S wie „Summe“. Das Symbol $\mathrm{d}x$ steht für „Differenz im x-Wert“.

Satz 6.2.4 (Integrationsregeln)**.** *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen.*

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Für die konstante Funktion $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit Wert c gilt $\int_a^b c = c \cdot (b - a)$.

(b) Für alle stetigen Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und alle $p \in [a, b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^p f + \int_p^b f$.

(c) Für alle stetigen Funktionen $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(d) Für alle stetigen Funktionen $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(e) *Für alle stetigen Funktionen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt* $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Beweis. (a) Da $m = c$ das Minimum und $M = c$ das Maximum der konstanten Funktion $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind, folgt $c(b-a) = m(b-a) \leq \int_a^b c \leq M(b-a) = c(b-a)$ nach (6.2.1) und somit die Behauptung.

(b) Sind $J, K \subset \mathbb{R}$ Teilmengen, so definiere $J + K := \{j + k \mid j \in J, k \in K\}$. Offensichtlich gilt

$$I(f) = I(f|_{[a,p]}) + I(f|_{[p,b]})$$

durch „Aufspalten eine Treppe“ bzw. „Zusammenfügen zweier Treppen“. Für beliebige nichtleere, beschränkte Teilmengen $J, K \subset \mathbb{R}$ gilt stets $\sup(J+K) = \sup(J) + \sup(K)$:

- Ungleichung $\leq$: Für alle $j \in J$ und $k \in K$ gilt $j \leq \sup(J)$ und $k \leq \sup(K)$, somit $j + k \leq \sup(J) + \sup(K)$, d. h. $\sup(J) + \sup(K)$ ist eine obere Schranke für $J + K$. Die Ungleichung $\leq$ folgt.
- Ungleichung $\geq$: Es gibt Folgen $(j_n)_n \subset J$ und $(k_n)_n \subset K$ mit $j_n \to \sup(J)$ und $k_n \to \sup(K)$ und somit $j_n + k_n \to \sup(J) + \sup(K)$. Wegen $j_n + k_n \leq \sup(J+K)$ folgt $\sup(J) + \sup(K) \leq \sup(J+K)$ aus Lemma 3.1.19.

Wir folgern

$$\int_a^b f = \sup I(f) = \sup\Big(I(f|_{[a,p]}) + I(f|_{[p,b]})\Big) = \sup I(f|_{[a,p]}) + \sup I(f|_{[p,b]}) = \int_a^p f + \int_p^b f.$$

(c) Aus $f \leq g$ folgt $I(f) \subset I(g)$. In Worten ist jede Treppe unter f auch eine Treppe unter g. Jede obere Schranke von $I(g)$ ist somit eine obere Schranke von $I(f)$. Insbesondere ist $\int_a^b g$ eine obere Schranke von $I(f)$ und es gilt $\int_a^b g \geq \int_a^b f$.

(d) und (e): Nach dem Beweis der Proposition 6.2.6. □

Definition 6.2.5. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachte die *äquidistante* Unterteilung (= „Unterteilung mit gleichen Abständen“)

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_r = b \tag{6.2.2}$$

des Intervalls $[a,b]$ durch $t_i := a + i\frac{b-a}{r}$. Definiere die **$r$-te Riemann-Summe**

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \left(\sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)\right) \frac{b-a}{r} \in \mathbb{R}.$$

Weiter definieren wir die **r-te Untersumme**

$$\underline{S}^r(f) := \left(\sum_{i=0}^{r-1} \inf(f([t_i, t_{i+1}]))\right) \cdot \frac{b-a}{r} \in \mathbb{R}$$

und die **r-te Obersumme**

$$\overline{S}^r(f) := \left(\sum_{i=0}^{r-1} \sup(f([t_i, t_{i+1}]))\right) \cdot \frac{b-a}{r} \in \mathbb{R}.$$

Beachte, dass die Infima und Suprema nach Satz 5.2.4 angenommen werden und somit reelle Zahlen sind.

Proposition 6.2.6. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{r\to\infty} S^r(f).$$

Beweis. Für jedes $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ behaupten wir die beiden Ungleichungen

$$\underline{S}^r(f) \leq S^r(f) \leq \overline{S}^r(f),$$

$$\underline{S}^r(f) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}^r(f). \tag{6.2.3}$$

Die Ungleichungen in der ersten Zeile sind offensichtlich.

Wir verwenden die äquidistante Unterteilung (6.2.2). Für jedes $i \in \{0, r-1\}$ gilt wegen

$$\inf(f([t_i, t_{i+1}])) \leq f(x) \leq \sup(f([t_i, t_{i+1}]))$$

für alle $x \in [t_i, t_{i+1}]$ nach den bereits bewiesenen Punkten (a) und (c) aus Satz 6.2.4

$$\inf(f([t_i,t_{i+1}]))\cdot\frac{b-a}{r} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \inf(f([t_i,t_{i+1}])) \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} f \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sup(f([t_i,t_{i+1}])) = \sup(f([t_i,t_{i+1}]))\cdot\frac{b-a}{r}.$$

Summieren wir diese Ungleichungen für alle $i \in \{0, r-1\}$, so erhalten wir mit Punkt (b) aus Satz 6.2.4 die Ungleichungen in (6.2.3).

Ende der 27. Vorlesung am 20.01.2020.

Nach Satz 6.1.7 ist f gleichmäßig stetig. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a,b]$ aus $|x-y| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ mit $\frac{b-a}{N} < \delta$. Dann gilt für alle $r \ge N$, dass f auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ höchstens um ε schwankt, und es folgt

$$0 \le \overline{S}^r(f) - \underline{S}^r(f) \le \varepsilon(b-a)$$

und auf Grund der zuvor bewiesenen Ungleichungen folgt

$$|S^r(f) - \int_a^b f| \le \varepsilon(b-a).$$

Die behauptete Konvergenz folgt. □

Rest des Beweises von Satz 6.2.4. (d): Aus Proposition 6.2.6 und der offensichtlichen Additivität $S^r(f+g) = S^r(f) + S^r(g)$ der r-ten Riemann-Summen erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g) &= \lim_{r\to\infty} S^r(f+g)\\ &= \lim_{r\to\infty}\Big(S^r(f) + S^r(g)\Big)\\ &= \lim_{r\to\infty} S^r(f) + \lim_{r\to\infty} S^r(g)\\ &= \int_a^b f + \int_a^b g.\end{aligned}$$

(e): Analog. □

Beispiel 6.2.7. Mit Proposition 6.2.6 und der Gaußschen Summenformel 1.1.2 berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_0^b x\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty}\Big(\frac{0}{r} + \frac{b}{r} + \frac{2b}{r} + \cdots + \frac{(r-1)b}{r}\Big)\frac{b}{r}\\ &= \lim_{r\to\infty}(0+1+2+\cdots+(r-1))\cdot\frac{b^2}{r^2}\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{r(r-1)}{2}\cdot\frac{b^2}{r^2}\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{r})b^2}{2}\\ &= \frac{b^2}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2.8. Berechne $\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x$ (Fläche unter der Parabel).

Lemma 6.2.9 (Standardabschätzung für Integrale)**.** *Seien $a \le b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bezeichne $|f|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die (stetige) Funktion $x \mapsto |f(x)|$. Dann gilt*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \le \int_a^b |f|.$$

Beweis. Aus $-|f| \le f \le |f|$ folgt $-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$ aus den Punkten (c) und (e) aus Satz 6.2.4 und daraus die Behauptung. □

Definition 6.2.10 (Integrale mit vertauschten Grenzen)**.** Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $a, b \in I$ mit $a > b$ definieren wir

$$\int_a^b f := -\int_b^a f.$$

6.2.11. Mit dieser Konvention gilt für alle $a, b, c \in I$ die (vom Leser zu prüfende) Formel

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

6.3. **Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung.**

Satz 6.3.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$ ein Punkt. Dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} F\colon I &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

differenzierbar mit Ableitung $F' = f$ und $F(a) = 0$. Diese beiden Eigenschaften charakterisieren F eindeutig: Ist $G\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $G' = f$ und $G(a) = 0$, so gilt $G = F$.

6.3.2. Illustriere durch ein Bild.

Beweis. Sei $p \in I$. Betrachte für $h \neq 0$ (wobei hier und im Folgenden stets auch $p + h \in I$ gelte) den Differenzenquotienten

$$\frac{F(p+h) - F(p)}{h} = \frac{\int_a^{p+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = \frac{1}{h}\int_p^{p+h} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei wir eventuell Definition 6.2.10 verwenden. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f bei p stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in (p - \delta, p + \delta) \cap I$ gilt $f(p) - \varepsilon < f(t) < f(p) + \varepsilon$.

Für jedes h mit $0 \leq h < \delta$ gilt also $f(p) - \varepsilon < f|_{[p,p+h]} < f(p) + \varepsilon$. Durch Integration $\int_p^{p+h}$ erhalten wir daraus (mit Satz 6.2.4.(c))

$$h(f(p) - \varepsilon) \leq \int_p^{p+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leq h(f(p) + \varepsilon)$$

und im Fall $h \neq 0$ per Division durch $h > 0$ die folgende Abschätzung des Differenzenquotienten.

$$f(p) - \varepsilon \leq \frac{1}{h}\int_p^{p+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(p) + \varepsilon$$

Für jedes h mit $-\delta < h \leq 0$ gilt analog $f(p) - \varepsilon < f|_{[p+h,p]} < f(p) + \varepsilon$. Durch Integration $\int_{p+h}^p$ erhalten wir daraus (mit Satz 6.2.4.(c))

$$(-h)(f(p) - \varepsilon) \leq \int_{p+h}^p f(t)\,\mathrm{d}t \leq (-h)(f(p) + \varepsilon)$$

und im Fall $h \neq 0$ per Division durch $-h > 0$

$$f(p) - \varepsilon \leq -\frac{1}{h}\int_{p+h}^p f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_p^{p+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(p) + \varepsilon.$$

Insgesamt zeigt dies, dass unser Differenzenquotient für jedes $0 \neq h \in (-\delta, \delta)$ in $(f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ liegt. Also konvergiert er gegen $f(p)$ für $h \to 0$.

Eindeutigkeit: Sei $G\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $G' = f$ und $G(a) = 0$. Dann ist $F - G$ differenzierbar mit $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Nach Satz 5.2.10 ist $F - G$ konstant und wegen $(F-G)(a) = F(a) - G(a) = 0$ folgt $F - G = 0$. $\square$

Definition 6.3.3. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt jede differenzierbare Funktion $G\colon I \to \mathbb{R}$ mit $G' = f$ eine **Stammfunktion von** f.

6.3.4. Der Hauptsatz 6.3.1 zeigt, dass jede stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem mehrpunktiven Intervall eine Stammfunktion besitzt. Nach Satz 5.2.10 unterscheiden sich je zwei Stammfuntionen von f um eine Konstante.

Korollar 6.3.5 (Integrieren mit Stammfunktion)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist G eine Stammfunktion von f, so gilt für alle $a, b \in I$ die Formel*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a). \tag{6.3.1}$$

Beweis. Die Funktion $H\colon I \to \mathbb{R}$ mit $H(x) := G(x) - G(a)$ ist differenzierbar und erfüllt $H' = G' = f$ und $H(a) = 0$. Nach der Eindeutigkeitsaussage im Hauptsatz 6.3.1 gilt $H(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in I$ und speziell $G(b) - G(a) = H(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ wie gewünscht. □

6.3.6. Insbesondere, wenn G ein komplizierter Ausdruck ist, schreibt man statt $G(b) - G(a)$ oft $G(x)\big|_a^b$ oder $G\big|_a^b$ und sagt dazu „G, ausgewertet an den Grenzen a und b“.

Mit dieser Konvention schreibt sich (6.3.1) als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\big|_a^b$$

(ob wir links $f(t)\,\mathrm{d}t$ oder $f(x)\,\mathrm{d}x$ schreiben, macht keinen Unterschied). Manchmal läßt man hier auch die Integrationsgrenzen weg und schreibt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(x) \tag{6.3.2}$$

und meint damit nur, dass G eine Stammfunktion von f ist. Beachte, dass dann für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch $G + c$ eine Stammfunktion ist, dass also $\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + c$ gilt; das Gleichheitszeichen wird hier also etwas nachlässig verwendet: Aus $\int f = G$ und $\int f = G + c$ folgt keineswegs $G = G + c$ und $c = 0$.

Beispiel 6.3.7. Für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} = \log(x)\big|_a^b = \log(b) - \log(a).$$

Insbesondere gilt $\log(y) = \int_1^y \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Beispiel 6.3.8. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n+1} x^{n+1}\big|_a^b = \tfrac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Die Kenntnis einer Stammfunktion macht die Berechnung eines Integrals im Vergleich zur Berechnung mit Riemannsummen (vgl. Beispiel 6.2.8 und Aufgabe 6.2.8) zu einem Kinderspiel.

6.4. **Integrationsregeln.**

Definition 6.4.1. Seien I und J Teilmengen von $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon I \to J$ heißt **stetig differenzierbar**, falls f differenzierbar ist und die Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Satz 6.4.2 (Integration durch Substitution/Substitutionsregel)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f\colon g([a, b]) \to \mathbb{R}$ stetig.*[66] *Dann gilt*[67]

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{6.4.1}$$

[66] Nach Korollar 4.4.3 ist $g([a, b])$ ein Intervall.

[67] Das linke Integral ist definiert, da der Integrand $(f \circ g) \cdot g'$ laut Annahme stetig ist.

6.4.3. Von rechts nach links gelesen wird also y durch $g(x)$ und $\mathrm{d}y$ durch $g'(x)\,\mathrm{d}x$ substituiert (= ersetzt). Oft schreibt man diese Ersetzungen etwas ungenau[68] als Gleichheiten $y = g(x)$ und $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$[69].

Wie wir sehen werden, führt in (6.4.1) manchmal der Übergang von links nach rechts (Beispiele 6.4.4, 6.4.5), manchmal der von rechts nach links (Beispiele 6.4.7 und 6.4.8) zu einer Vereinfachung.

Beweis. Besteht $g([a,b])$ nur aus einem Punkt, so ist g konstant, und beide Seiten der behaupteten Gleichung sind Null (wegen $g' = 0$ und $g(a) = g(b)$). Sonst ist $g([a,b])$ ein mehrpunktiges Intervall (nach Korollar 4.4.3 ist es ein Intervall), und der Hauptsatz 6.3.1 zeigt, dass f eine Stammfunktion F hat. Dann ist $F \circ g$ differenzierbar mit Ableitung $(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$, also eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$. Zweimaliges Integrieren per Stammfunktion 6.3.5 liefert

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F \circ g\,\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F\,\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y. \qquad \square$$

Beispiel 6.4.4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a < b$ reelle Zahlen. Seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s \neq 0$. Dann gilt[70]

$$\int_a^b f(sx+t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\int_a^b f(sx+t)s\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\int_{sa+t}^{sb+t} f(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.4.2}$$

mit Integration durch Substitution $y = g(x) = sx + t$ und $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x = s\,\mathrm{d}x$ (von rechts nach links gelesen). (Wir verwenden also die stetig differenzierbare (injektive) Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto sx + t$.) Beispielsweise erhalten wir

$$\int_a^b \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} \cos(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sin\Big|_{2a}^{2b} = \frac{1}{2}\big(\sin(2b) - \sin(2a)\big). \tag{6.4.3}$$

Beispiel 6.4.5. Integration durch Substitution 6.4.2 mit $y = g(x) = 1 + x^2$ und $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$ (und Rücksubstitution in der letzten Gleichung) liefert

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{y}\Big|_{1+a^2}^{1+b^2} = \sqrt{1+x^2}\Big|_a^b$$

Faßt man hier b als variabel auf, so zeigt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 6.3.1, dass $\sqrt{1+x^2}$ eine Stammfunktion von $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ist, was man auch sofort überprüft. Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, so kann man in der obigen Rechnung alle Integrationsgrenzen weglassen, vgl. (6.3.2).

6.4.6. Will man ein Integral $\int_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y$ mit Integration durch Substitution 6.4.2 per Übergang von rechts nach links berechnen, so besteht die Kunst darin, geeignete relle Zahlen $a < b$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zu finden mit $g(a) = \alpha$ und $g(b) = \beta$, so dass die rechte Seite von

$$\int_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y \overset{(6.4.1))}{=} \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

einfacher zu berechnen ist. In Anwendungen ist g oft injektiv (und damit bijektiv auf sein Bild). Wir illustrieren dies in den Beispielen 6.4.7 und 6.4.8.

Beispiel 6.4.7. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $f(y) = y\sqrt{1-y}$ durch die (durch $x = \sqrt{1-y}$ motivierte) Substitution $y = 1 - x^2$, $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$ (und Rücksubstitution) zu

$$\begin{aligned}\int y\sqrt{1-y}\,\mathrm{d}y &= \int (1-x^2)x(-2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int 2x^4 - 2x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{2}{5}x^5 - \tfrac{2}{3}x^3\end{aligned}$$

[68] Da wir $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$ als Symbole (und nicht als Differentialformen) eingeführt haben.

[69] Verwendet man die Notation $g'(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$ für die Ableitung, so mag man sich die zweite Gleichheit durch die mutige (und formal unerlaubte) Rechnung $g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{dg}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ merken.

[70] Dies folgt auch direkt aus Integrieren per Stammfunktion 6.3.5, denn ist F eine Stammfunktion von f, so ist $\frac{1}{s}F(sx+t)$ eine Stammfunktion von $f(sx+t)$.

$$= \tfrac{2}{5}(1-y)^2\sqrt{1-y} - \tfrac{2}{3}(1-y)\sqrt{1-y}.$$

Dies verwendet die in (6.3.2) eingeführte Schreibweise; implizit sind die Annahmen $y \leq -1$ und $x \geq 0$. Der Leser prüfe, dass dies eine Stammfunktion ist und überlege sich auch, wie genau Integration durch Substitution 6.4.2 angewendet wird.

Beispiel 6.4.8. Wir wollen das Integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen, was anschaulich der Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius 1 ist. Die Substitution $x = \sin(t)$ und $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ (also $g = \sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, vgl. Satz 4.8.25) liefert die erste Gleichung in[71]

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

die zweite Gleichung folgt aus $\cos^2 + \sin^2 = 1$ und daraus, dass der Kosinus auf $[-\pi/2, \pi/2]$ nichtnegativ ist. Das Additionstheorem für den Kosinus (4.8.7) zusammen mit $\cos^2 + \sin^2 = 1$ liefert

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1,$$

also $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$. Damit berechnen wir das obige Integral zu

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \cos(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(6.4.3)}{=} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\sin(\pi) - \sin(-\pi)) \\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

da der Sinus auf allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet. Zusammengefaßt ist die Fläche des halben Kreises mit Radius Eins also $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \pi/2$.

Aufgabe 6.4.9. Berechne den Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius $r > 0$.

Ende der 28. Vorlesung am 23.01.2020.

Satz 6.4.10 (Partielle Integration)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b fg' = fg\big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Beweis. Nach der Produktregel (Satz 5.1.10) gilt $(fg)' = f'g + fg'$. Nach Annahme sind hier beide Summanden und damit die Summe stetig. Integration liefert $fg\big|_a^b = \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$. □

Beispiele 6.4.11. Mit der in (6.3.2) eingeführten Schreibweise gelten

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x &= x^2 e^x - \int 2xe^x\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int \log(x)\,\mathrm{d}x &= x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x\log(x) - x\end{aligned}$$

[71] Wie allgemein üblich steht $\cos^2(t)$ für $(\cos(t))^2$, und analog für den Sinus.

6.5. **Integralvergleichskriterium für Reihen.**

Proposition 6.5.1 (Integralkriterium)**.** *Sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige, monoton fallende Funktion. Dann sind äquivalent:*

(a) die Reihe $((f(n)))_{n\geq 1}$ konvergiert, in Formeln $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$;

(b) der Ausdruck $\int\limits_1^b f$ konvergiert für $b \to \infty$ gegen eine reelle Zahl, in Formeln $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b f < \infty$.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt $f(n) \leq f|_{[n-1,n]} \leq f(n-1)$, da f monoton fällt. Per Integration erhalten wir $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f \leq f(n-1)$. Für jedes $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ folgt per Summation

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f \leq \sum_{n=2}^{N} f(n-1).$$

Die Folgen $(\sum_{n=2}^{N} f(n))_{N\geq 2}$, $(\sum_{n=2}^{N} f(n-1))_{N\geq 2}$ und $(\int_1^N f)_{N\geq 2}$ reeller Zahlen sind monoton wachsend und somit genau dann konvergent, wenn sie beschränkt sind (Propositionen 3.1.10 und 3.1.26).

Also konvergiert die Reihe $((f(n)))_{n\geq 1}$ genau dann, wenn die Folge $(\int_1^N f)_{N\geq 2}$ konvergiert. Letzteres ist aber offensichtlich äquivalent zur Konvergenz von $\int_1^b f$ für $b \to \infty$. □

Beispiel 6.5.2. Die Reihe $((\frac{1}{n^s}))_{n\geq 1}$ konvergiert für alle $s > 1$. Sie divergiert gegen ∞ für alle $s \leq 1$.

Bereits bekannt sind die Fälle $s = 1$ (harmonische Reihe, Beispiel 3.2.5.(c)) und $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (Beispiel 3.2.8). Wir beweisen diese hier noch einmal.

Beweis. Wir übersetzen die Behauptung mit Proposition 6.5.1 und $f(x) = \frac{1}{x^s} = x^{-s} = \exp(-s\log(x)) > 0$ in eine Aussage über das Verhalten des Integrals $\int_1^b \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ für $b \to \infty$.

Sei zunächst $s \neq 1$. Dann gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-s}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-s}}{1-s}\bigg|_1^b = \frac{1}{1-s}\left(b^{1-s} - 1\right).$$

Im Fall $s > 1$, also $1 - s < 0$, gilt $b^{1-s} = \exp((1-s)\log(b)) \to 0$ für $b \to \infty$. Also konvergiert das obige Integral. Im Fall $s < 1$, also $1 - s > 0$, gilt $b^{1-s} = \exp((1-s)\log(b)) \to \infty$ für $b \to \infty$. Also divergiert das obige Integral.

Gelte nun $s = 1$. Dann divergiert $\int_1^b \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log\big|_1^b = \log(b)$ bestimmt gegen ∞ für $b \to \infty$. □

7. Potenzreihen und höhere Ableitungen

7.1. **Funktionenfolgen und Potenzreihen.**

7.1.1. Wir verwenden im Folgenden für eine Reihe $((b_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ die weit verbreitete Schreibweise $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ (auch wenn sie nicht konvergiert).

Satz 7.1.2. *Seien $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $z \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ absolut für alle rellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |z|$.*

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage trivial, gelte also $z \neq 0$. Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ konvergiert, ist $(a_\nu z^\nu)$ eine Nullfolge (Korollar 3.2.4) und insbesondere beschränkt. Es gibt also ein $B \in \mathbb{R}$ mit $|a_\nu z^\nu| \leq B$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |z|$ und alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_\nu x^\nu| = |a_\nu z^\nu| \cdot \left|\tfrac{x}{z}\right|^\nu \leq B\left|\tfrac{x}{z}\right|^\nu.$$

Wegen $\left|\frac{x}{z}\right| < 1$ folgt die gewünschte absolute Konvergenz aus der Konvergenz der geometrischen Reihe (Beispiel 3.2.5.(a)) und dem Majorantenkriterium (Proposition 3.2.13). □

Definition 7.1.3. Eine Ausdruck der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$ mit $a_\nu \in \mathbb{R}$ heißt **Potenzreihe** mit reellen **Koeffizienten** a_ν (hier stellt man sich X als Variable vor). Man nennt

$$r := \sup\left\{|z| \,\middle|\, z \in \mathbb{R}, \text{ so dass die Reihe } \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \text{ konvergiert}\right\} \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

den **Konvergenzradius** der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$; hier verwenden wir die Konvention, dass das Supremum $\infty = +\infty$ ist, falls die Menge nicht nach oben beschränkt ist. Man nennt $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu$ die **n-te Partialsumme** der Potenzreihe, für $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 7.1.4. Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu$ hat Konvergenzradius ∞, denn die Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (siehe Lemma 3.2.21). Analoges gilt für die Potenzreihen des Sinus und Kosinus.

7.1.5. Satz 7.1.2 besagt, dass eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$ mit Konvergenzradius r eine Funktion

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu \colon (-r, r) \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

definiert, für die wir dasselbe Symbol wie für die Potenzreihe verwenden. Wir werden zeigen, dass diese Funktion differenzierbar und insbesondere stetig ist und dass ihre Ableitung durch die „durch summandenweises Ableiten entstandene“ Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu X^{\nu-1}$ gegeben ist (Sätze 7.1.10 und 7.1.13).

Definition 7.1.6. Seien I eine Menge (bei uns meist ein Intervall in $\mathbb{R}$), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Die Folge $(f_n)_n$

- **konvergiert punktweise gegen** f, wenn für alle $x \in I$ gilt $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$;
- **konvergiert gleichmäßig gegen** f, notiert $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ und alle $x \in I$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Im ersten Fall nennt man dann f den **punktweisen Grenzwert** der Folge $(f_n)_n$, im zweiten Fall den **gleichmäßigen Grenzwert**.

7.1.7. Illustriere gleichmäßige Konvergenz durch „ε-Schlauch“ um den Graphen von f.

7.1.8. Gleichmäßige Konvergenz impliziert offensichtlich punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt: Die durch $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, definierte Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

Satz 7.1.9 (Stetigkeit bleibt unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n \colon I \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f \colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f ebenfalls stetig.*

Beweis. Sei $p \in I$. Wir zeigen die Stetigkeit von f bei p. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Da f_n in p stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f_n(x) - f_n(p)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{für alle } x \in (p-\delta, p+\delta) \cap I.$$

Dann gilt für alle $x \in (p-\delta, p+\delta) \cap I$

$$|f(x) - f(p)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(p)| + |f_n(p) - f(p)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Satz 7.1.10. *Sei $s = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r und sei $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu$ ihre n-te Partialsumme, für $n \in \mathbb{N}$. Sei $\rho \in [0, r)$. Fassen wir die Potenzreihe s als auch jede Partialsumme s_n als Funktion $[-\rho, \rho] \to \mathbb{R}$ auf, so konvergiert die Folge $(s_n)_n$ auf $[-\rho, \rho]$ gleichmäßig gegen s.*

Insbesondere ist $s \colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ stetig.

7.1.11. Es ist im Allgemeinen nicht richtig, dass (s_n) auf ganz $(-r, r)$ gleichmäßig gegen s konvergiert. Wir geben zwei Beispiele:

(a) Geometrische Reihe: Der Konvergenzradius der Potenzreihe $s = \sum_{\nu=0}^{\infty} X^\nu$ ist $r = 1$ (denn nach Beispiel 3.2.5.(a) konvergiert diese Potenzreihe für jedes $x \in (-1,1)$ gegen $\frac{1}{1-x}$, aber für kein x mit $|x| \geq 1$, denn sonst würde sie nach Satz 7.1.2 auch für $x = 1$ konvergieren, was offensichtlich nicht der Fall ist).

Nehmen wir an, wir hätten gleichmäßige Konvergenz der Folge der Partialsummen s_n gegen s. Dann gibt es insbesondere für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_N(x) - s(x)| < \frac{1}{2}$ für alle $x \in (-1,1)$. Nach dem zitierten Beispiel gilt $s_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$, also $\left|\frac{1-x^{N+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| < \frac{1}{2}$ für alle $x \in (-1,1)$ bzw. äquivalent $|x^{N+1}| < \frac{1}{2}|1-x|$ für alle $x \in (-1,1)$. Für $x \to 1$ geht aber die linke Seite gegen 1, die rechte gegen 0; Widerspruch.

(b) Exponentialreihe: Der Konvergenzradius der Potenzreihe $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu$ ist $r = \infty$, denn die Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (siehe Lemma 3.2.21).

Ist $f_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} X^\nu$ die n-te Partialsumme, so gilt für jedes $n \geq 1$, dass $|f_n(x)| \to \infty$ für $x \to -\infty$, denn der „Leitterm $\frac{x^n}{n!}$ dominiert“. Andererseits gilt $f(x) = \exp(x) \to 0$ für $x \to -\infty$. Also kann (f_n) nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen $f = \exp$ konvergieren.

Beweis. Für alle $x \in [-\rho, \rho]$ gilt $|a_\nu x^\nu| \leq |a_\nu \rho^\nu|$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und somit auf Grund der absoluten Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ (Satz 7.1.2)

$$|s_n(x) - s(x)| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu x^\nu\right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu x^\nu| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Die absolute Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ liefert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu| < \varepsilon.$$

Für alle $n \geq N$ und alle $x \in [-\rho, \rho]$ folgt aus diesen Erkenntnissen $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$. Dies zeigt, dass s_n auf $[-\rho, \rho]$ gleichmäßig gegen s konvergiert. Da alle s_n als polynomiale Funktionen stetig sind, ist nach Satz 7.1.9 auch s auf $[-\rho, \rho]$ stetig.

Da $\rho \in [0, r)$ beliebig war, folgt leicht die Stetigkeit von s auf $(-r, r)$ (dies stimmt auch im Fall $r = 0$, denn dann gilt $(-r, r) = \emptyset$). □

Satz 7.1.12 (Vertauschen von Integral und Grenzübergang bei gleichmäßiger Konvergenz)**.** *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetiger Funktionen. Dann konvergiert die Folge $(\int_a^b f_n)_n$ gegen $\int_a^b f$, in Formeln*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a,b]$. Wir folgern (mit Satz 6.2.4.(d) und Lemma 6.2.9)

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f - f_n)\right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \int_a^b \varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Die behauptete Konvergenz folgt. □

Ende der 29. Vorlesung am 27.01.2020.

Satz 7.1.13 (Integrieren und Ableiten von Potenzreihen)**.**

(a) (Integrieren von Potenzreihen) Sei $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann hat auch die „durch summandenweises Integrieren entstandene“ Potenzreihe

$$g := \sum_{\nu=0}^{\infty} \tfrac{1}{\nu+1} a_\nu X^{\nu+1}$$

Konvergenzradius r und definiert eine Stammfunktion von f auf $(-r,r)$, in Formeln $g' = f$ als Funktionen $(-r,r) \to \mathbb{R}$.

(b) *(Ableiten von Potenzreihen) Sei $g = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu X^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann hat auch die „durch summandenweises Ableiten entstandene" Potenzreihe*

$$f := \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu X^{\nu-1}$$

Konvergenzradius r und ist die Ableitung von g auf $(-r,r)$, in Formeln $g' = f$ als Funktionen $(-r,r) \to \mathbb{R}$. (Insbesondere ist $g\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.)

Beweis. (a) Sei $f_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu$ die n-te Partialsumme unserer Potenzreihe. Sei $\rho \in [0,r)$. Dann konvergiert f_n auf $[-\rho,\rho]$ gleichmäßig gegen f (Satz 7.1.10). Satz 7.1.12 und Integrieren mit Stammfunktion 6.3.5 liefern

$$\int_0^x f \xleftarrow{n\to\infty} \int_0^x f_n = \int_0^x \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu \,\mathrm{d}t = \sum_{\nu=0}^{n} \tfrac{1}{\nu+1} a_\nu t^{\nu+1}\Big|_0^x = \sum_{\nu=0}^{n} \tfrac{1}{\nu+1} a_\nu x^{\nu+1}$$

für jedes $x \in [-\rho,\rho]$. Also konvergiert die Reihe g für jedes $x \in [-\rho,\rho]$ gegen $\int_0^x f$. Nach dem Hauptsatz 6.3.1 definiert also g auf $[-\rho,\rho]$ eine Stammfunktion von f. Da $\rho \in [0,r)$ beliebig war, zeigt dies alle Behauptungen in (a) mit einer Ausnahme: Bisher wissen wir nur, dass der Konvergenzradius von g mindestens r ist.

(b) Zunächst konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^{\nu-1}$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < 1$ nach dem Quotientenkriterium 3.2.17, denn für jedes c mit $|z| < c < 1$ ist $\frac{|(\nu+1)z^\nu|}{|\nu z^{\nu-1}|} = (1+\frac{1}{\nu}) \cdot |z|$ für alle genügend großen ν kleiner als c (der Fall $z = 0$ ist trivial).

Wir zeigen nun, dass die Potenzreihe f auf $(-r,r)$ konvergiert. Sei $x \in (-r,r)$. Wähle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho < r$. Da laut Annahme $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \rho^\nu$ absolut konvergiert (Satz 7.1.2), gibt es ein B' mit $|b_\nu \rho^\nu| \le B'$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ (Korollar 3.2.4). Es folgt $|b_\nu \rho^{\nu-1}| \le B := \frac{B'}{\rho}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Setze $z := \left|\frac{x}{\rho}\right| < 1$ und betrachte die Abschätzung

$$|\nu b_\nu x^{\nu-1}| = \left|\nu b_\nu \rho^{\nu-1} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{\nu-1}\right| \le B\nu z^{\nu-1}$$

für jedes $\nu \in \mathbb{N}$. Wir wissen bereits, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^{\nu-1}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium (Proposition 3.2.13) konvergiert also $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$ (absolut).

Also ist der Konvergenzradius von $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu X^{\nu-1}$ mindestens r. Nach dem schon bewiesenen Teil (a) ist die aus f „durch summandenweises Integrieren entstandene" Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \cdot \nu b_\nu X^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu X^\nu$ eine Stammfunktion von f auf $(-r,r)$. Da diese sich von g nur um b_0 unterscheidet, ist auch g eine Stammfunktion von f und es gilt $g' = f$ auf $(-r,r)$. Dies zeigt alle Behauptungen in (b) mit einer Ausnahme: Bisher wissen wir nur, dass der Konvergenzradius von f mindestens r ist.

Da wir nun aber wissen, dass der Potenzradius sowohl beim summandenweisen Integrieren als auch beim summandenweisen Ableiten nicht kleiner wird und diese beiden Operationen bis auf Addition einer Konstanten invers zueinander sind, bleibt er unter beiden Operationen unverändert. □

Beispiel 7.1.14. Die Formeln $\exp' = \exp$ und $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ folgen aus Satz 7.1.13.

Definition 7.1.15. Seien $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Setze $f^{(0)} := f$. Ist f differenzierbar, so setze $f^{(1)} := f'$. Ist dann $f^{(1)} = f'$ differenzierbar, so setze $f^{(2)} := (f^{(1)})' = f''$. Undsoweiter. Ist dann $f^{(n)}$ differenzierbar, so setze $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Man sagt, dass f **m-fach differenzierbar** ist, falls die **m-te Ableitung $f^{(m)}$ von** f definiert ist. Man sagt, dass f **beliebig oft differenzierbar** oder **glatt** ist, falls alle $f^{(m)}$, für $m \in \mathbb{N}$, definiert sind.

Man sagt, dass f **m-fach stetig differenzierbar** ist, falls f m-fach differenzierbar ist und $f^{(m)}$ stetig ist.

7.1.16. Jede $(m+1)$-fach differenzierbare Funktion ist m-fach differenzierbar, ja sogar m-fach stetig differenzierbar, da $f^{(m)}$ als differenzierbare Funktion stetig ist (Satz 5.1.8).

Jede Funktion f ist 0-fach differenzierbar. Steitgkeit ist dasselbe wie 0-fach stetige Differenzierbarkeit.

Korollar 7.1.17. *Sei $r \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$. Sei $f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die durch eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$ dargestellt wird, d. h. $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für alle $x \in (-r,r)$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar und für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt*

$$f^{(\nu)}(0) = \nu! a_\nu.$$

7.1.18. Dieses Korollar zeigt auch, dass eine Funktion nicht durch zwei verschiedene Potenzreihen dargestellt werden kann.

Beweis. Das folgt per Induktion sofort aus Punkt (b) von Satz 7.1.13. □

7.1.19. Ist $f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $r \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$, so stellt sich die natürliche Frage, ob f durch eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$ dargestellt werden kann. Ist dies der Fall, so muss f nach Korollar 7.1.17 beliebig oft differenzierbar sein und die Koeffizienten der Potenzreihe müssen durch

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$$

gegeben sein, für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Dies motiviert die folgende Definition 7.2.1.

7.2. **Taylorentwicklung.**

Definition 7.2.1. Sei $f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, wobei $r \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$. Dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} X^\nu = f(0) + f'(0)X + \frac{1}{2} f''(0)X^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)X^3 + \cdots$$

Taylorreihe von f (am Nullpunkt).

7.2.2. Die Taylorreihe von $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu$ und sie stellt exp dar (das war schlicht unsere Definition von exp). Analoges gilt für den Sinus und den Kosinus.

Warnung 7.2.3. Im Allgemeinen kann die Taylorreihe einer Funktion Konvergenzradius Null haben (hier ohne Beispiel), und selbst wenn ihr Konvergenzradius positiv ist, wird die Funktion im Allgemeinen nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt, wie das folgende Beispiel 7.2.4 zeigt.

Beispiel 7.2.4. Die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

ist beliebig oft differenzierbar mit Ableitung $f^{(\nu)}(0) = 0$ am Nullpunkt für alle $\nu \in \mathbb{N}$ (dem Leser als Übung überlassen). Ihre Taylorreihe ist also die Nullreihe $0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} 0X^\nu$ mit Konvergenzradius ∞, die die Nullfunktion $0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Diese ist offensichtlich verschieden von f.

Satz 7.2.5 (Integraldarstellung des Restglieds)**.** *Sei I ein mehrpunktiges Intervall mit $0 \in I$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Ist f $(n+1)$-fach stetig differenzierbar, so gilt für alle $x \in I$ die Formel*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Die Funktion $Q\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$Q(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

ist beliebig oft differenzierbar und erfüllt $Q^{(m)}(0) = f^{(m)}(0)$ für alle $m = 0, \ldots, n$ und $Q^{(n+1)}(0) = 0$. (Nachrechnen oder per Overkill Korollar 7.1.17).

Definiere das „Restglied“ $r\colon I \to \mathbb{R}$ durch $r(x) = f(x) - Q(x)$. Dann ist r $(n+1)$-fach stetig differenzierbar und erfüllt $r^{(m)}(0) = 0$ für alle $m = 0, \dots, n$ und $r^{(n+1)}(0) = f^{(n+1)}(0)$. Durch Integrieren mit Stammfunktion 6.3.5 und wiederholte partielle Integration 6.4.10 erhalten wir für jedes $x \in I$

$$\begin{aligned}
r(x) = r(x) - r(0) &= \int_0^x r'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x r'(t) \cdot 1\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{-r'(t) \cdot (x-t)\Big|_0^x}_{=0} + \int_0^x r''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{-r''(t) \cdot \frac{1}{2}(x-t)^2\Big|_0^x}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^x r'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \dots \\
&= \underbrace{-r^{(n)}(t) \cdot \frac{1}{n!}(x-t)^n\Big|_0^x}_{=0} + \frac{1}{n!}\int_0^x \underbrace{r^{(n+1)}(t)}_{=f^{(n+1)}(t)}(x-t)^n\,\mathrm{d}t. \qquad \square
\end{aligned}$$

Korollar 7.2.6. *Sei I ein mehrpunktiges Intervall mit $0 \in I$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Ist f $(n+1)$-fach stetig differenzierbar mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, so gilt*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

für alle $x \in I$. In Worten ist f eine polynomiale Funktion vom Grad $\leq n$.

7.2.7. Man kann dies auch leicht aus Satz 5.2.10 folgern.

Beweis. Das folgt sofort aus Satz 7.2.5, denn der Integrand dort ist Null. $\square$

Ende der 30. Vorlesung am 30.01.2020 (letzte Vorlesung).

7.2.8. Wir haben bisher in Abschnitt 7 reellwertige Funktionen auf einem mehrpunktige Intervall, das den Ursprung 0 enthält, betrachtet. Ist $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall I und $p \in I$ ein beliebiger Punkt, so kann man alle Resultate auf diesen Fall übertragen, indem man statt g die „um p verschobene“ Funktion f mit $f(x) := g(x+p)$ betrachtet (es gelten dann $g(x) = f(x-p)$ und allgemeiner $g^{(m)}(x) = f^{(m)}(x-p)$, falls diese Ableitungen existieren, also insbesondere $g^{(m)}(p) = f^{(m)}(0)$.) Statt „Potenzreihen bei Null“ $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$ betrachtet man dann „Potenzreihen bei p“ $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (X-p)^\nu$. Beispielsweise ist die Taylorreihe von g bei p durch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g^{(\nu)}(p)}{\nu!}(X-p)^\nu = g(p) + g'(p)(X-p) + \frac{1}{2}g''(p)(X-p)^2 + \frac{1}{3!}g'''(p)(X-p)^3 + \cdots$$

definiert.

Definition 7.2.9. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\nu \in \mathbb{N}$ definiere

$$\binom{\alpha}{\nu} := \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!} & \text{falls } \nu \geq 1, \\ 1 & \text{falls } \nu = 0. \end{cases}$$

Die so definierten Zahlen heißen **verallgemeinerte Binomialkoeffizienten**, denn sie verallgemeinern offensichtlich die Binomialkoeffizienten.

Proposition 7.2.10 (Binomische Reihe)**.** *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2 \cdot 1}x^2 + \dots.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{\alpha}{\nu} = 0$ für alle $\nu > \alpha$ und unsere Formel spezialisiert zu einem Spezialfall der binomischen Formel 1.2.13 (und gilt sogar für alle $x \in \mathbb{R}$).

Sei nun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt $\binom{\alpha}{\nu} \neq 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$ konvergiert dann nach dem Quotientenkriterium 3.2.17, denn

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{\nu+1} x^{\nu+1}}{\binom{\alpha}{\nu} x^\nu} \right| = \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu)}{(\nu+1)\cdot\nu!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}} x \right| = \left| \frac{\alpha-\nu}{\nu+1} \right| \cdot |x| = \left| \frac{\frac{\alpha}{\nu}-1}{1+\frac{1}{\nu}} \right| \cdot |x|$$

konvergiert für $\nu \to \infty$ gegen $|x| < 1$ (als Konstante c im Quotientenkriterium können wir also jedes c mit $|x| < c < 1$ wählen).

Sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ die somit durch die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} X^\nu$ definierte Funktion. Zu zeigen bleibt $f(x) = (1+x)^\alpha$ für alle $x \in (-1,1)$.

Nach Satz 7.1.13 gilt $f'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \nu X^{\nu-1}$. Eine einfache Rechnung (analog zum Beweis von (1.2.3)) zeigt

$$\binom{\alpha-1}{\nu} + \binom{\alpha-1}{\nu-1} = \binom{\alpha}{\nu}.$$

Mit diesen Erkenntnissen berechnen wir

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \nu x^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \nu x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu+1} (\nu+1) x^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \nu x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha \left(\binom{\alpha-1}{\nu} + \binom{\alpha-1}{\nu-1} \right) x^\nu \\
&= \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu \\
&= \alpha f(x).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass f die Differentialgleichung $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ erfüllt.

Setze $\varphi(x) := \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$. Diese Funktion ist differenzierbar auf $(-1,1)$ und erfüllt auf Grund der Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.$$

Also ist φ konstant (Satz 5.2.10) mit Wert $\varphi(0) = \frac{f(0)}{1^\alpha} = 1$. Es folgt $f(x) = \varphi(x)(1+x)^\alpha = (1+x)^\alpha$ für alle $x \in (-1,1)$ wie gewünscht. □

Beispiel 7.2.11. Satz 7.2.10 mit $\alpha = -1$ zeigt

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots$$

für alle $x \in (-1,1)$. Nach Satz 7.1.13 ist

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x}$. Da auch $\log(1+x)$ eine Stammfunktion ist und beide Stammfunktionen bei 0 den Wert 0 annehmen, sind sie gleich, d. h.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

für alle $x \in (-1,1)$. Der Leser rechnet leicht nach, dass dies die Taylorreihe von $f(x) = \log(1+x)$ ist.

Beispiel 7.2.12. Nach Beispiel 5.1.21 gilt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. Satz 7.2.10 mit $\alpha = -1/2$ zeigt

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-1/2} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (-x^2)^\nu = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot 1}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}}{3\cdot 2\cdot 1}x^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots\end{aligned}$$

für alle $x \in (-1,1)$ (denn dann gilt $x^2 \in [0,1)$). Mit Satz 7.1.13 erhalten wir ähnlich wie im vorigen Beispiel

$$\arcsin(x) = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots$$

für alle $x \in (-1,1)$.

Literatur

[Can95] G. Cantor. Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Art. I. Math. Ann., 46:481–512, 1895.

[For11] Otto Forster. Analysis. 1. Grundkurs Mathematik. [Foundational Course in Mathematics]. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, expanded edition, 2011. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. [Differential and integral calculus of one variable].

[Hal76] Paul R. Halmos. Naive Mengenlehre. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1976. Vierte Auflage, Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, No. 6.

[Sch19] Oliver Schnürer. Analysis I. 2019. www.math.uni-konstanz.de/ schnuere/skripte/skripte.html.

[Soe19] Wolfgang Soergel. Skripte: Einstimmung, Mengen und Verknüpfungen, Analysis 1. 2019. home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel.

[Thu94] William P. Thurston. On proof and progress in mathematics. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 30(2):161–177, 1994.

[Wik19] Contributors Wikipedia. Wikipedia, 2019. www.wikipedia.org.

Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Strasse 100, 33098 Paderborn, Germany
Email address: olaf.schnuerer@math.uni-paderborn.de