Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 8.10.2019
Blatt 1

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

1. Seien $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ und A eine *zyklische* Matrix, das heißt von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}).$$

   Zeigen Sie, dass für die Determinante von A folgende Gleichung gilt:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \left(a_1 + a_2\zeta^j + a_3\zeta^{2j} + \cdots + a_n\zeta^{(n-1)j} \right).$$

   Hinweis: Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine n-te Einheitswurzel, das heißt, $\zeta^n = 1$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$$

   ein Eigenvektor von A.

2. Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine endliche Gruppe mit n Elementen. Im Fall $\mathrm{char}(k) \neq 0$ sei außerdem $n = |G| < \mathrm{char}(k)$. Sei $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_m(k)$ eine Darstellung der Gruppe.
   Zeigen Sie für alle $g \in G$, dass die Matrix $\rho(g)$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix folgender Form ist:

$$\rho(g) \sim \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_m \end{pmatrix} \quad \text{mit } \xi_i^n = 1.$$

   Gilt diese Aussage auch für $|G| = \mathrm{char}(k)$, falls die $\mathrm{char}(k)$ positiv ist?

Bitte wenden!

3. Seien $G = \mathbb{Z}$ und k ein beliebiger Körper.
   Bestimmen Sie alle irreduziblen und alle unzerlegbaren Darstellungen von G über k.

4. Seien G eine endliche Gruppe und (V, ρ), (W, τ), (U, σ) drei Darstellungen von G über einem Körper k. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Seien T_1, $T_2 \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, λ_1, $\lambda_2 \in k$. Dann gilt:
   $$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in \mathrm{Hom}_G(V, W).$$
   (b) Seien $T \in \mathrm{Hom}_G(V, U)$, $S \in \mathrm{Hom}_G(U, W)$. Dann gilt:
   $$S \circ T \in \mathrm{Hom}_G(V, W).$$
   (c) $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ ist eine k-Algebra.
   (Sie wird auch *Endomorphismenalgebra* von (V, ρ) genannt.)
   (d) Sei $T \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ und die Abbildung $V \xrightarrow{T} W$ ein Isomophismus von k-Vektorräumen. Dann gilt:
   $$T^{-1} \in \mathrm{Hom}_G(W, V).$$

5. Seien $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ die Kleinsche Vierergruppe und $k = \bar{\mathbb{F}}_2$. Des Weiteren sei $\rho_\lambda^{(n)} \colon G \to \mathrm{GL}_{2n}(k)$ eine Darstellung von G gegeben durch
   $$(\bar{1}, 0) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (0, \bar{1}) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{J} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$
   wobei $\mathbb{I} = \mathbb{I}_n$ die Einheitsmatrix der Größe n und $\mathbb{J} = \mathbb{J}_n(\lambda)$ der Jordan Block
   $$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$
   der Größe n mit Eigenwert $\lambda \in k$ ist.
   Bestimmen Sie die Endomorphismenalgebra von $\left(k^2, \rho_\lambda^{(1)}\right)$ im Fall $n = 1$ und zeigen Sie:
   (a) Die Darstellung $\left(k^2, \rho_\lambda^{(1)}\right)$ ist unzerlegbar.
   (b) Es gilt:
   $$\left(k^2, \rho_{\lambda_1}^{(1)}\right) \cong \left(k^2, \rho_{\lambda_2}^{(1)}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2.$$
   (c) Gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in k$, sodass $\left(k^{2n}, \rho_\lambda^{(n)}\right)$ irreduzibel ist?

Abgabe: Dienstag, 15.10.2019, 9:00 Uhr.