Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
PROF. DR. I. BURBAN und H. HERR

WiSe 2019/20
Dienstag, 17.12.2019
Blatt 11

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

49. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Tensorprodukte.
    (a) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und l ihr größter gemeinsamer Teiler. Beweisen Sie, dass
    $$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_l.$$
    (b) Berechnen Sie das folgende Tensorprodukt von abelschen Gruppen
    $$\big(\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}_2^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}_3)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \big(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4\big).$$
    (c) Sei $n \in \mathbb{Z}$ und Γ eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass
    $$\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma \cong \Gamma/n\Gamma.$$
    (d) Seien A ein Ring, $I \subset A$ ein beidseitiges Ideal und M ein A-Linksmodul. Dann gilt: $A/I \otimes_A M \cong M/IM$.
    (e) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.
    (f) Sei $\Bbbk$ ein Körper. Beweisen Sie, dass die $\Bbbk$-Algebren $\Bbbk[x] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[x]$ und $\Bbbk[x, y]$ isomorph sind.
    (g) Sei $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die $\mathbb{K}$-Algebren $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} \mathsf{Mat}_n(\Bbbk)$ und $\mathsf{Mat}_n(\mathbb{K})$ isomorph sind.

50. Seien Λ und Γ Ringe, W ein $(\Lambda - \Gamma)$–Bimodul, $X \in \Gamma - \mathsf{Mod}$ und $Y \in \Lambda - \mathsf{Mod}$. Vervollständigen Sie den Beweis der Aussage, dass die in der Vorlesung konstruierte Abbildung
    $$\alpha_{X,Y} : \mathrm{Hom}_\Lambda\big(W \otimes_\Gamma X, Y\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma\big(X, \mathrm{Hom}_\Lambda(W, Y)\big)$$
    ein *natürlicher* Isomorphismus abelscher Gruppen ist.

Wir wünschen erholsame Feiertage!

Abgabe: Dienstag, 07.01.2020, 9:00 Uhr.