Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 07.01.2020
Blatt 12

# Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

51. Seien $\Bbbk$ ein Körper, $G$ eine endliche Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $\tau$ eine endlich dimensionale Darstellung von $H$.
    - Bestimmen Sie die Dimension der koinduzierten Darstellung $\mathsf{Koind}_H^G(\tau)$.
    - Nehmen wir ferner an, dass $\Bbbk$ algebraisch abgeschlossen ist und $\mathsf{char}(\Bbbk) \nmid |G|$. Sei $\rho$ eine endlich dimensionale Darstellung von $G$ und $\tau$ eine endlich dimensionale Darstellung von $H$. Beweisen Sie, dass
    $$\big(\chi_{\mathsf{Res}(\rho)}, \chi_\tau\big)_H = \big(\chi_\rho, \chi_{\mathsf{Koind}(\tau)}\big)_G.$$
    - Beweisen Sie, dass in diesem Fall die induzierte und die koinduzierte Darstellungen $\mathsf{Ind}_H^G(\tau)$ und $\mathsf{Koind}_H^G(\tau)$ isomorph sind.

52. Seien $\Bbbk$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null, $G = \Sigma_4$ und $\Sigma_3 \cong H = \mathsf{Perm}\{1,2,3\} \subset G$. Für jede irreduzible Darstellung $\rho$ von $H$, bestimmen Sie die Zerlegung von $\mathsf{Ind}_H^G(\rho)$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

53. Seien $\Bbbk = \mathbb{C}$ und $G = \Sigma_4$. Bestimmen Sie die Zerlegung der induzierten Darstellung $\mathsf{Ind}_H^G(\rho)$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen, wobei
    - $H = \big\langle (1234) \big\rangle \cong \mathbb{Z}_4$ und $\rho$ eine eindimensionale Darstellung von $H$, die durch die Formel $(1234) \circ 1 = i = \sqrt{-1}$ gegeben wird.
    - $H = \big\langle (123) \big\rangle \cong \mathbb{Z}_3$ und $\rho$ eine eindimensionale Darstellung von $H$, die durch die Formel $(123) \circ 1 = \exp\big(\frac{2\pi}{3} i\big)$ gegeben wird.

54. Seien $\Bbbk$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null, $G = \Sigma_5$, $H = A_5$. Betrachten wir die folgende Darstellung von $H$:
    $$V = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\big\}.$$
    Zerlegen Sie die induzierte Darstellung $\mathsf{Ind}_H^G(V)$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

Bitte wenden!

55.* Seien $\Bbbk$, $G$ und $H$ wie in der vorherigen Aufgabe. Unter der Benutzung der Antwort der Aufgabe 34, zerlegen Sie die induzierte Darstellung $\mathsf{Ind}_H^G(U)$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen von $G$ für jede irreduzible Darstellung $U$ von $H$.

**Abgabe:** Dienstag, 14.01.2020, 9:00 Uhr.