Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 14.01.2020
Blatt 13

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

56. Eine endlich dimensionale reelle Darstellung $(\mathbb{R}^n, \rho)$ der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ heißt *glatt*, wenn die Abbildung $\mathbb{R} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine glatte Funktion ist.
    (a) Sei $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist die Abbildung
    $$\tau_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ t \mapsto \exp(tA) := I + tA + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$$
    eine glatte Darstellung von $\mathbb{R}$.
    (b) Beweisen Sie ferner, dass jede glatte Darstellung ρ von $(\mathbb{R}, +)$ zu einer Darstellung τ_A isomorph ist, wobei $A = \rho'(0)$ ist.
    (c) Beweisen Sie, dass die Darstellungen τ_A und τ_B genau dann isomorph sind, wenn die Matrizen A und B ähnlich sind.
    (d) Beschreiben Sie die endlich-dimensionalen reellen glatten Darstellungen von $(\mathbb{R}, +)$, die unzerlegbar und irreduzibel sind.
    (e) Bestimmen Sie, welche der folgenden Darstellungen $t \mapsto X(t)$ von $(\mathbb{R}, +)$ isomorph sind, und geben Sie explizit die entsprechenden Isomorphismen an:
    - $X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$
    - $X(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$
    - $X(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    - $X(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix}$
    - $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    - $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & \exp(t)-1 \\ 0 & \exp(t) \end{pmatrix}$

57. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und
    $$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \supset V = V_{n,m} := \{p \mid p \text{ ist homogen vom Grad } m\}.$$
    Für
    $$g = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in G$$

Bitte wenden!

setzen wir

$\big(\rho_g(p)\big)(x_1,\dots,x_n) := p(a_{11}x_1+\dots+a_{n1}x_n,\dots,a_{1n}x_1+\dots+a_{nn}x_n).$

Beweisen Sie, dass (V,ρ) eine irreduzible Darstellung von G ist.

58. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n = \langle x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}[x,y]$. Betrachten wir die folgende Hermitesche Form

$$V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle p,q\rangle := \int_{\mathbb{C}^2} \overline{p(x,y)}q(x,y)\exp\big(-|x|^2-|y|^2\big)\,d\mu.$$

Beweisen Sie, dass die in der Vorlesung konstruierte Darstellung (V_n,ρ) von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ unitär bezüglich dieser Form ist.

59.* Sei $\mathbb{H} := \{z = x+iy \mid y>0\} \subset \mathbb{C}$ die obere Halbebene und $\mathcal{F}$ die Algebra von glatten reellen Funktionen auf $\mathbb{H}$. Sei

$$\Delta = y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

der sogenannte Laplace-Beltrami Operator. Die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathbb{C}$ vermöge

$$z \xmapsto{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)} \frac{az+b}{cz+d}.$$

Beweisen Sie, dass $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ für alle $g \in G$ gilt. Somit operiert G auf $\mathcal{F}$ vermöge $\big(\rho_g(\varphi)\big)(z) = \varphi(g^{-1}z)$. Beweisen Sie, dass

$$\Delta \circ \rho_g = \rho_g \circ \Delta$$

für alle $g \in G$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie, dass G von Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a,b \in \mathbb{R}$$

erzeugt wird.

Abgabe: Dienstag, 21.01.2020, 9:00 Uhr.