Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 28.01.2020
Blatt 15

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

64. Sei (V,ρ) eine irreduzible zweidimensionale Darstellung von $G = \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Betrachten wir die Darstellung (W,τ), wobei $W = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ und
$$\tau_g(F) = \rho_g F \rho_g^{-1} \quad \text{für jedes } g \in G.$$
Zerlegen Sie (W,τ) in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

65. Betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, der als Komposition
$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathsf{diag}} \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$$
definiert sei. Dabei sei diag die Diagonaleinbettung $g \mapsto (g,g)$ und π der Homomorphismus aus Aufgabe 60.
Zerlegen Sie diese $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$-Darstellung $(\mathbb{C}^4,\rho)$ in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

66. Sei G eine kompakte Lie Gruppe und $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine stetige Darstellung von G. Betrachten wir die Darstellung $G \xrightarrow{\rho^*} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), g \mapsto \left(\rho_g^{-1}\right)^t$. Beweisen Sie dass
(a) $\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$ für alle $g \in G$ ist.
(b) $(\mathbb{C}^n,\rho) \cong (\mathbb{C}^n,\rho^*)$ genau dann, wenn $\chi_{\rho^*}(g) \in \mathbb{R}$ für alle $g \in G$ ist.

67. Sei G eine kompakte Lie Gruppe, $(\mathbb{C}^n,\rho)$ eine irreduzible stetige Darstellung. Beweisen Sie die folgende Orthogonalitätsrelation für die Matrixelemente
$$\int_G \bar{\mu}_\rho^{ij} \mu_\rho^{pq} = \frac{1}{n}\delta_{ip}\delta_{jq},$$
wobei
$$\mu_\rho^{pq} : G \longrightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \big[\rho(g)\big]_{pq} \quad \text{für} \quad 1 \le p,q \le n$$
ist.

Abgabe: Keine