Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 15.10.2019
Blatt 2

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

6. Seien k ein endlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathrm{GL}_n(k)$. G operiere auf dem k-Vektorraum $M = \mathsf{Mat}_{n\times n}(k)$ durch Multiplikation von links.
Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $M \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ in $\mathsf{Rep}_k(G)$ existiert, so dass $V_1, \ldots, V_n$ *irreduzible* Darstellungen sind. Beschreiben Sie diese Darstellungen $V_1, \ldots, V_n$ explizit.

7. Seien G eine endliche Gruppe und k ein Körper *beliebiger* Charakteristik und (k^n, ρ) eine Darstellung von G über k.
Zeigen Sie, dass es *irreduzible* Darstellungen $(k^{n_1}, \rho_1), \ldots, (k^{n_t}, \rho_t)$ existieren, sodass sich ρ nach einem eventuellem Basiswechsel in k^n folgendermaßen schreiben lässt:
$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_t(g) \end{pmatrix} \quad \text{für } g \in G.$$

8. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und
(a) $G = \mathbb{Z}_n$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
(b) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
Zerlegen Sie die Gruppenalgebra $k(G)$ in eine direkte Summe von eindimensionalen Darstellungen und geben Sie explizite Vektoren aus $k(G)$ an, die den direkten Summanden entsprechen.

9.* Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper der Charakteristik p, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ und k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Bestimmen Sie die Zahl von nicht-isomorphen eindimensionalen Darstellungen von G über k in den Fällen:
(a) $p > 2$;
(b) $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$.

Hinweis: Im ersten Fall zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$ die Kommutatoruntergruppe von G ist. Benutzen Sie dafür die folgenden Identitäten:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Bitte wenden!

und
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$
für alle $a \in \mathbb{F}^*$. Finden Sie in der Literatur eine Aussage über die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers.

Im zweiten Fall bestimmen Sie die zuerst die Ordnung von G. Benutzen Sie dann eine passende Aussage aus der Klassifikation endlicher Gruppen kleiner Ordnung.

10.* Seien G eine endliche Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{ggT}(\mathsf{char}(k), |G|) = 1$. Seien $(V, \rho), (W, \tau)$ irreduzible Darstellungen von G und $h \in G$. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der ersten Orthogonalitätsformel von Charakteren:
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\tau(hg)\chi_\rho(g^{-1}) = \delta_{\tau\rho} \frac{\chi_\rho(h)}{\chi_\rho(e)},$$
Hinweis: Starten Sie mit der Formel
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\tau_g]_{p\imath}[\rho_{g^{-1}}]_{\jmath q} = \delta_{\tau\rho} \frac{\delta_{pq}\delta_{\imath\jmath}}{\chi_\rho(e)},$$
die im Wesentlichen in der Vorlesung bewiesen wurde. Leiten Sie davon folgende Formel ab:
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\tau_{hg}]_{pp}[\rho_{g^{-1}}]_{qq} = \delta_{\tau\rho} \frac{\delta_{pq}}{\chi_\rho(e)} [\tau_h]_{pq}.$$

Abgabe: Dienstag, 22.10.2019, 9:00 Uhr.