Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 22.10.2019
Blatt 3

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

Auf diesem Übungsblatt seien G eine endliche Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Des Weiteren seien alle Darstellungen von G endlichdimensional.

11. Es gibt die folgenden dreidimensionalen komplexen Darstellungen der alternierenden Gruppe A_4:
    - Die Permutationsdarstellung auf dem Vektorraum
    $$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$
    - Die durch $A_4 \cong \mathsf{Dreh}(\mathbb{T}) \subset \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ gegebene Darstellung, wobei $\mathsf{Dreh}(\mathbb{T})$ die Drehgruppe eines regulären Tetraeders $\mathbb{T}$ ist.

    Bestimmen Sie, ob diese Darstellungen isomorph sind.

12. Sei (k^n, ρ) eine Darstellung von G. Wir setzen $\tilde{\rho}_g := (\rho_g^{-1})^t$ für alle $g \in G$.
    - Beweisen Sie, dass $(k^n, \tilde{\rho})$ eine Darstellung von G ist.
    - Beweisen Sie ferner, dass $(k^n, \tilde{\rho})$ isomorph zur dualen Darstellung von (k^n, ρ) ist.
    - Sei nun $k = \mathbb{C}$ und (W, τ) eine Darstellung von G. Beweisen Sie, dass (W, τ) und (W^*, τ^*) genau dann isomorph sind, wenn $\chi_\tau(g) \in \mathbb{R}$ für alle $g \in G$ ist.

13. Seien (V, ρ) und (W, τ) Darstellungen von G. Beweisen Sie die Formel
    $$\mathsf{dim}_k\big(\mathrm{Hom}_G(\rho, \tau)\big) = (\chi_\rho, \chi_\tau).$$

14. Sei $n \geq 2$. Zwei Untergruppen $G, \tilde{G} \subset \mathrm{GL}_n(k)$ heißen konjugiert, wenn es ein $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ existiert so dass $\tilde{G} = gGg^{-1}$.
    - Sei $m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(k)$ bis auf Konjugation nur endlich viele Untergruppen der Ordung m enthält.
    - Bleibt diese Aussage richtig, wenn die Charakteristik von k positiv ist?
    - Bestimmen Sie die Anzahl der Konjugationsklassen endlicher Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(k)$ der Ordnung 6.

Bitte wenden!

15. Sei (V, ρ) eine Darstellung von G und
$$c_{(V,\rho)} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \in k.$$
Beweisen Sie, dass $c_{(V,\rho)}$ in $\mathbb{Z}$ liegt (beachten Sie dabei, dass $\mathbb{Z}$ stets ein Unterring von k ist!). Zeigen Sie darüber hinaus, dass $0 \leq c_{(V,\rho)} \leq \dim_k(V)$ gilt. Bestimmen Sie alle Darstellungen, für welche $c_{(V,\rho)} = \dim_k(V)$ gilt.

Abgabe: Dienstag, 29.10.2019, 9:00 Uhr.