Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 29.10.2019
Blatt 4

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

Auf diesem Übungsblatt sei G eine endliche Gruppe und $\Bbbk$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Des Weiteren seien alle Darstellungen von G endlichdimensional.

16. Beschreiben Sie alle irreduziblen Darstellungen der Diedergruppe
$$D_n := \big\langle s, d \,\big|\, s^2 = e = d^n, (sd)^2 = e \big\rangle,$$
wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

    Hinweis: Die Antwort hängt davon ab, ob n gerade oder ungerade ist. Beschreiben Sie zuerst alle Gruppenhomomorphismen $D_n \to \Bbbk^*$. Was sind mögliche Bilder von s bzw. d unter einem solchen Homomorphismus?

    Untersuchen Sie dann zweidimensionale Darstellungen von D_n der Gestalt
$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d \mapsto \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$$
auf Irreduzibilität. Was sind die Konjugationsklassen der Elemente in D_n?

17. Sei X eine endliche Menge, $G \times X \to X$ eine Gruppen-Operation und $\big(\Bbbk(X), \rho\big)$ die entsprechende Darstellung der Gruppe G. Zerlegen Sie diese Darstellung in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen in den folgenden Fällen:
    (a) $G = A_4 \cong \mathsf{Dreh}(\mathbb{T})$, wobei $\mathbb{T}$ ein regulärer Tetraeder in $\mathbb{R}^3$ und X die Menge der Kanten von $\mathbb{T}$ ist.
    (b) $G = \Sigma_4 \cong \mathsf{Dreh}(\mathbb{W})$, wobei $\mathbb{W}$ ein regulärer Würfel in $\mathbb{R}^3$ und X die Menge der Knoten von $\mathbb{W}$ ist.

18. Sei (k^2, ρ) eine Darstellung von G sowie G' die Kommutatoruntergruppe von G. Zeigen Sie, falls es ein $g \in G'$ mit $\chi_\rho(g) \neq 2$ gibt, dann ist (k^2, ρ) irreduzibel.

Bitte wenden!

19. Beweisen Sie, dass die Isomorphie-Klassen der eindimensionalen Darstellungen von G selbst eine endliche abelsche Gruppe $\widehat{G}$ bilden, wobei man für zwei Gruppenhomomorphismen $\varrho_1, \varrho_2 : G \to \Bbbk^*$ setzt:

$$(\varrho_1 \cdot \varrho_2)(g) := \varrho_1(g) \cdot \varrho_2(g).$$

Bestimmen Sie die Gruppe $\widehat{G}$ explizit für $G = \Sigma_n,\ A_4,\ Q_8$ und D_n.

Abgabe: Dienstag, 5.11.2019, 9:00 Uhr.