Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 5.11.2019
Blatt 5

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

20. Seien $\mathbb{k}$ ein Körper und A, B zwei $\mathbb{k}$-Algebren. Beweisen Sie, dass $A \otimes_{\mathbb{k}} B$ wieder eine $\mathbb{k}$-Algebra ist, wobei für $a', a'' \in A$ und $b', b'' \in B$ das Produkt der entsprechenden einfachen Tensoren durch die Formel

$$(a' \otimes b') \cdot (a'' \otimes b'') = (a'a'') \otimes (b'b'')$$

gegeben wird.

21. Sei k ein Körper und $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(\mathbb{k}), B \in \mathsf{Mat}_{m\times m}(\mathbb{k})$ zwei quadratische Matrizen. Beweisen Sie, dass

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^m \cdot \det(B)^n.$$

Hinweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist. Reduzieren Sie die Aussage auf den Fall, wo A eine obere Dreiecksmatrix ist.

22. Sei $\mathbb{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null,

$$V := \big\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\big\} \subset \mathbb{k}^3$$

und (V, ρ) die entsprechende Darstellung von Sym_3. Zerlegen Sie die Darstellung $\rho \otimes \rho$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Bestimmen Sie *explizit* die Basen der Unterräume von $V \otimes V$, die den irreduziblen Summanden von $\rho \otimes \rho$ entsprechen.

23. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null,

$$V := \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\big\} \subset \mathbb{k}^4$$

und (V, ρ) die entsprechende Darstellung von Sym_4. Zerlegen Sie die Darstellung $\rho \otimes \rho$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

Bitte wenden!

24.* Sei G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. In dieser Aufgabe wird der sogenannte *McKay Graph* von G eingeführt. Sei

$$\mathsf{IrrRep}_{\mathbb{C}}(G) = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n\},$$

wobei ρ_0 die triviale Darstellung ist. Die Einbettung $G \subset \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ liefert die sogenannte *fundamentale Darstellung* $(\mathbb{C}^2, \rho)$. Für alle $1 \leq \imath \leq n$ haben wir eine Zerlegung

$$\rho \otimes \rho_\imath \cong \bigoplus_{\jmath=0}^{n} \rho_\jmath^{\oplus a_{\imath\jmath}}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $a_{\imath\jmath} = a_{\jmath\imath}$ für alle $0 \leq \imath, \jmath \leq n$ ist.
Damit kann der McKay Graph von G folgendermaßen definiert werden:
- Seine Knoten sind $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Die Knoten $\imath$ und $\jmath$ verbinden $a_{\imath\jmath}$ Kanten.

(b) Für $n \geq 1$ sei $\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right)$ und

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_{(n+1)}.$$

Bestimmen Sie den McKay Graph von G.

(c) Sei $\zeta = \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)$ für $n \geq 1$,

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $G = \langle A, B \rangle \subset \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ die durch A und B erzeugte Untergruppe. Bestimmen Sie den McKay Graph von G.

Hinweis. Die Gruppe G ist isomorph zu der sogenannten *binären Diedergruppe*

$$\mathbb{D}_n = \langle a, b | a^n = b^2, b^4 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Sie hat die folgenden Eigenschaften:
- $|\mathbb{D}_n| = 4n$.
- $\mathbb{D}_n$ hat genau vier eindimensionale Darstellungen.
- Die übrigen irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{D}_n$ sind zweidimensional. Für $1 \leq l \leq n-1$ sind sie durch die Formel

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \zeta^l & 0 \\ 0 & \zeta^{-l} \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^l & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Abgabe: Dienstag, 12.11.2019, 9:00 Uhr.