Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
PROF. DR. I. BURBAN und H. HERR

WiSe 2019/20
Dienstag, 12.11.2019
Blatt 6

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

Auf diesem Übungsblatt sei G eine endliche Gruppe, $\Bbbk$ ein Körper und $\mathbb{1}$ die triviale Darstellung von G über $\Bbbk$. Alle Darstellungen von G sind endlichdimensional.

25. Seien V, V_1, V_2, V_3 und W $\Bbbk$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass es kanonische Isomorphismn gibt:
    (a) $V \otimes W \to W \otimes V,\ v \otimes w \mapsto w \otimes v,$
    (b) $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3),$
    (c) $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \to (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W),$
    (d) $V \otimes \Bbbk \to V \leftarrow \Bbbk \otimes V,\ v \otimes \lambda \mapsto \lambda v.$
    Zeigen Sie außerdem, dass falls dies auch Darstellungen der Gruppe G sind, so sind alle diese Isomorphismen auch Isomorphismen von Darstellungen von G, wobei $\Bbbk = triv$.

26. Sei V ein unendlich dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum. Beweisen Sie, dass die kanonische Abbildung $V^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ nicht surjektiv ist.

27. Sei V ein endlich dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V^* \otimes V \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\mathsf{ev}"'] & & \mathrm{End}_{\Bbbk}(V) \arrow[dl, "\mathsf{tr}"] \\ & \Bbbk & \end{tikzcd}$$

    wobei $\mathsf{ev}(l \otimes v) := l(v)$ für alle $l \in V^*$ und $v \in V$.

28. Sei (V, ρ) eine Darstellung von G, (V^*, ρ^*) die entsprechende duale Darstellung von G. Beweisen Sie, dass
    - die kanonische lineare Abbildung $V^* \otimes V \xrightarrow{\mathsf{ev}} \mathbb{1}$, $\quad l \otimes v \mapsto l(v)$ ein Morphismus von Darstellungen ist.
    - die kanonische lineare Abbildung $V \longrightarrow V^{**}$ ein Isomorphismus von Darstellungen ist.
    - Ist (V, ρ) irreduzibel, dann ist auch (V^*, ρ^*) irreduzibel.

    Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Charakteren χ_ρ und χ_{ρ^*}.

Bitte wenden!

29. Sei $\Bbbk$ algebraisch abgeschlossen und $\mathsf{char}(\Bbbk) \nmid |G|$. Des Weiteren, seien ρ, τ irreduzible Darstellungen von G über $\Bbbk$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{1}$ eine Unterdarstellung von $\rho \otimes \tau$ ist genau dann, wenn gilt: $\tau \cong \rho^*$.

Abgabe: Dienstag, 19.11.2019, 9:00 Uhr.