Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 19.11.2019
Blatt 7

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

Auf diesem Übungsblatt sei $\Bbbk$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null.

30. Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ keine Untergruppe enthält, die zur symmetrischen Gruppe Σ_4 isomorph ist.

31. Sei W eine 5–dimensionale irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe Σ_5. Zerlegen Sie die Darstellungen $S^2(W)$ und $\wedge^2(W)$ in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

32. Beweisen Sie, dass die alternierende Gruppe A_5 aus genau 5 Konjugationsklassen besteht, diese sind
$$e, (12)(34), (123), (12345), (12354).$$
Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in jeder Konjugationsklasse.

33.* [Symmetrische und äußere Algebren eines Vektorraums] Sei V ein endlich dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum, $n = \dim_{\Bbbk}(V)$. Betrachten wir die folgenden $\Bbbk$-Vektorräume:
$$S^\bullet(V) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i(V) \quad \text{und} \quad \wedge^\bullet(V) := \bigoplus_{i=0}^{n} \wedge^i(V)$$
Für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die folgenden bilineare Abbildung:
$$S^i(V) \times S^j(V) \longrightarrow S^i(V) \otimes S^j(V) \longrightarrow T^{i+j}(V) \xrightarrow{S} S^{i+j}(V)$$
bzw. für alle $1 \le i, j \le n$ die bilineare Abbildung:
$$\wedge^i(V) \times \wedge^j(V) \longrightarrow \wedge^i(V) \otimes \wedge^j(V) \longrightarrow T^{i+j}(V) \xrightarrow{A} \wedge^{i+j}(V),$$
wobei S und A die Symmetrisierung- bzw. Antisymmetriesierungs-Abbildungen aus der Vorlesung sind. Beweisen Sie, dass diese Operationen die Struktur einer $\Bbbk$-Algebra auf $S^\bullet(V)$ bzw. $\wedge^\bullet(V)$ definieren. Beweisen Sie außerdem, dass $S^\bullet(V)$ der Algebra der Polynome in n Variablen $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ isomorph ist. Bestimmen Sie die Dimension der Algebra $\wedge^\bullet(V)$.

Bitte wenden!

34.* Bestimmen Sie alle irreduziblen Darstellungen der Gruppe A_5.

Hinweis. Betrachten Sie die Permutationsdarstellung (V, ρ), wobei

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + \cdots + x_5 = 0\}.$$

Beweisen Sie zuerst, dass $S^2(V)$ in eine direkte Summe dreier irreduzibler Darstellungen zerfällt: die Summanden sind die triviale, (V, ρ) selbst und eine 5–dimensionale Darstellung. Beweisen Sie anschließend, dass $\wedge^2(V)$ in eine direkte Summe zweier 3–dimensionaler irreduziblen Darstellungen von A_5 zerfällt.

Abgabe: Dienstag, 26.11.2019, 9:00 Uhr.