Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 26.11.2019
Blatt 8

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

35. Seien Λ ein Ring und M ein Λ-Rechtsmodul.
   (a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ ein Ring ist.
   (b) Darüber hinaus gilt: $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_\Lambda) \cong \Lambda$.
   (c) Gelten die vorherigen Aussagen für Linksmoduln?
   (d) Sei N ein Λ-Rechtsmodul. Beweisen Sie, dass die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ ein $\mathrm{End}_\Lambda(M)$-Rechtsmodul ist, wobei

   $$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \times \mathrm{End}_\Lambda(M) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N), \quad (g, f) \mapsto g \circ f$$

   die Verkettung von Abbildungen ist.
   (e) Sind N_1, N_2 zwei Λ-Rechtsmoduln und $N_1 \xrightarrow{h} N_2$ ein Morphismus von Λ-Rechtsmoduln. Beweisen Sie, dass die Abbildung

   $$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N_1) \xrightarrow{h_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N_2), \quad f \mapsto h \circ f$$

   ein Homomorphismus von $\mathrm{End}_\Lambda(M)$-Rechtsmoduln ist.

36. Sei k ein Körper und $A = k[x]$. Für $\lambda \in k$ und $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den A–Modul $M_{\lambda,m} := A/(x-\lambda)^m$. Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums

$$\mathrm{Hom}_A\big(M_{\lambda_1,m_1}, M_{\lambda_2,m_2}\big)$$

in Abhängigkeit von den Parametern λ_1, λ_2, m_1 und m_2.

37. Sei $\Bbbk$ ein Körper und $A = \Bbbk[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ die $\Bbbk$-Algebra der formalen Potenzreihen. Damit ist die Menge aller Ausdrücke $\displaystyle\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(i_1,\ldots,i_n)}\, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ mit $a_{(i_1,\ldots,i_n)} \in \Bbbk$ gemeint, die mit den naheliegenden Ringoperationen $+$ und $*$ sowie der Multiplikation $\cdot$ mit Elementen aus $\Bbbk$ versehen ist.
Zeigen Sie, daß folgende Bijektion existiert:

$$\Big\{M \in A-\mathrm{Mod} \ : \ \dim_\Bbbk M < \infty\Big\} \leftrightarrow \left\{ (V; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \ : \ \begin{array}{l} V \text{ endl. dim. } \Bbbk\text{-VR}, \\ \varphi_i \in \mathrm{End}_\Bbbk(V), \\ \varphi_i \text{ nilpotent und} \\ \varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i \end{array} \right\}$$

Hinweis: Zur Vereinfachung kann zunächst $n = 1$ angenommen werden, die allgemeine Situation lässt sich anschließend leicht daraus ableiten. Beachten Sie, dass $1 - x$ in $\Bbbk[\![x]\!]$ invertierbar ist (Stichwort: geometrische Reihe).

Bitte wenden!

38. Sei Λ ein Ring und M ein Λ–Linksmodul.
   (a) Für $m \in M$ sei $(m) = \{\lambda \circ m \mid \lambda \in \Lambda\} \subset M$ der durch m erzeugte Untermodul von M. Sei
   $$J := \{\mu \in \Lambda \mid \mu \circ m = 0\} \subset \Lambda$$
   der *Annihilator* von m. Beweisen Sie, dass J ein Linksideal in Λ ist und ferner, dass die Λ–Linksmoduln Λ/J und (m) isomorph sind.
   (b) Sei I ein Linksideal in Λ und
   $$N := \{n \in M \mid \lambda \circ n = 0 \text{ für alle } \lambda \in I\} \subseteq M.$$
   Beweisen Sie, dass die abelschen Gruppen $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/I, M)$ und N isomorph sind.

39.* Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die so-genannte Weyl–Algebra
$$W = W_n := \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n\rangle/I$$
wobei $I = \big(x_\imath x_\jmath - x_\jmath x_\imath, \partial_\imath\partial_\jmath - \partial_\jmath\partial_\imath, \partial_\imath x_\jmath - x_\jmath\partial_\imath - \delta_{\imath\jmath}\mathbb{1} \big| 1 \le \imath, \jmath \le n\big)$.

- Sei $A = A_n = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Beweisen Sie, dass A vermöge
  - $x_\imath \circ p(x_1, \dots, x_n) := x_\imath \cdot p(x_1, \dots, x_n)$ und
  - $\partial_\imath \circ p(x_1, \dots, x_n) := \dfrac{\partial p}{\partial x_\imath}(x_1, \dots, x_n)$ für alle $1 \le \imath \le n$

  die Struktur eines W–Linksmoduls bekommt.
- Für jedes $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ betrachten wir die folgenden Elemente von W:
  $$x^{\underline{\alpha}} = \overline{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}} \quad \text{and} \quad \partial_{\underline{\alpha}} = \overline{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}}.$$
  Beweisen Sie, dass $\{x^{\underline{\alpha}}\partial_{\underline{\beta}}\}_{\underline{\alpha},\underline{\beta} \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}}$ eine Basis vom $\mathbb{C}$–Vektorraum W ist. Somit kann man W als die Algebra von *Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten* in $x_1, \dots, x_n$ verstehen.
- Seien $\Delta_1, \dots, \Delta_m \in W$ Differentialoperatoren und
  $$J := \{a_1\Delta_1 + \dots + a_m\Delta_m \mid a_1, \dots, a_m \in W\} \subseteq W$$
  dadurch erzeugtes Linksideal. Ferner, sei
  $$\mathsf{Sol}(\Delta_1, \dots, \Delta_m) := \{p \in A \mid \Delta_1(p) = \dots = \Delta_m(p) = 0\} \subseteq A.$$
  Beweisen Sie, dass man einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$–Vektorräumen hat:
  $$\mathrm{Hom}_W(W/J, A) \cong \mathsf{Sol}(\Delta_1, \dots, \Delta_m).$$

Abgabe: Dienstag, 3.12.2019, 9:00 Uhr.