Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 3.12.2019
Blatt 9

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

40. Sei Λ ein Ring und M ein Λ-Modul. Beweisen Sie, dass falls M zerlegbar ist, dann gibt es ein nicht triviales idempotentes Element $e \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$.

41. Sei Λ ein Ring und $e \in \Lambda$ idempotent. Beweisen Sie, dass die Ringe $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e)$ und $e\Lambda^\circ e$ isomorph sind.

42. Sei $\mathbb{k}$ ein Körper, $A = \mathbb{k}[\![x, y]\!]/(xy)$,
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_A(M)$, wobei der A–Modul M durch den Tripel $(\mathbb{k}^3, (X, Y))$ gegeben ist. Ist M unzerlegbar oder sogar irreduzibel?

43. Seien $\mathbb{k}$ ein Körper, $\Lambda = \mathsf{Mat}_{n\times n}(\mathbb{k})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \Lambda$ ein beidseitiges Ideal. Beweisen Sie, dass gilt: $I = 0$ oder $I = \Lambda$ (mit anderen Worten ist Λ eine *einfache* $\mathbb{k}$-Algebra).

44. Bestimmen Sie explizit alle beidseitigen Ideale in der Algebra $\mathbb{C}[\Sigma_3]$. Wie viele beidseitige Ideale gibt es in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[Q]$ der Quaternionengruppe $Q = Q_8$?

45. Seien $\mathbb{k}$ ein Körper von Charakteristik $p > 0$ und G eine endliche Gruppe für die gilt: $p \mid |G|$. Seien $\Lambda := \mathbb{k}(G)$ und $u := \sum_{g\in G} g \in \Lambda$. Betrachten wir $U := \Lambda u \subseteq \Lambda$. Beweisen Sie, dass es keinen Links-Untermodul $V \subseteq \Lambda$ gibt, für den gilt: $\Lambda = U \dotplus V$.

Abgabe: Dienstag, 10.12.2019, 9:00 Uhr.