64. $V \cong \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}[x,y]$, $W = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \hat{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$

Für $F \in W$, $g \in SU_2(\mathbb{C})$: $\quad \tau_g(F) := \rho_g F \rho_g^{-1}$

Es gilt offensichtlich:

$\langle id_V \rangle_{\mathbb{C}}$ ist eine Unterdarstellung von W.

Angenommen, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$ ~~spannt~~ eine 1-dimensionale Unterdarstellung auf.

$\Rightarrow \forall g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$: $\quad g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cdot \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & be^{i2\theta} \\ ce^{-i2\theta} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

θ beliebig

$\Rightarrow \quad b = c = 0$

$\cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad a = d$

$\Rightarrow \langle id_V \rangle_{\mathbb{C}}$ ist die einzige eindimensionale Unterdarstellung

$\Rightarrow W \cong \rho_1 \oplus \rho_3$, wobei ρ_1 die triviale und ρ_3 die 3-dimensionale irreduzible Darstellung, also $\langle x^2, xy, y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x,y]$ von $SU_2(\mathbb{C})$ ist.

65. $$\begin{array}{ccccccc} SU_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & SO_4(\mathbb{R}) & \longleftrightarrow & GL_4(\mathbb{C}), \\ g & \longmapsto & g \times g & \longmapsto & \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}}_{=A} \mapsto g A g^{-1} \Big) & & \end{array}$$

Es ist klar: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt eine eindimensionale Unterdarstellung

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwert	Eigenvektor
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\cos 2\theta + i \sin 2\theta$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$
$\cos 2\theta + i \sin 2\theta$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

erzeugen $SO_3(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & 0 & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwert	Eigenvektor
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\cos 2\theta + i \sin 2\theta$	$\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\cos 2\theta + i \sin 2\theta$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ Es gibt keinen gemeinsamen Eigenvektor außer $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^4$

$\Longrightarrow$ Es gibt keine weitere eindimensionale Unterdarstellung (es hätte auch gereicht zu bemerken, es gibt keinen gemeinsamen Eigenvektor zum Eigenwert 1 für alle θ)

$\Longrightarrow$ Die Darstellung zerfällt in die irreduziblen Komponenten:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

66. a) ρ stetig, G kompakt $\overset{\text{Weyl}}{\Longrightarrow}$ ρ unitarisierbar

Also können wir annehmen: $G \xrightarrow{\rho} U_n(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \ (\rho_g^{-1}) = \overline{\rho_g}^t \quad \Longrightarrow \quad \chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$ für alle $g \in G$

b) $(\mathbb{C}^n, \rho) \cong (\mathbb{C}^n, \rho^*)$

$$\Longrightarrow \exists M \in GL_n(\mathbb{C}) : \forall g \in G : \rho_g = M \rho_g^* M^{-1}$$

$$= M (\rho_g^{-1})^t M^{-1}$$

$$= M (\overline{\rho_g}^t)^t M^{-1}$$

$$= M \overline{\rho_g} M^{-1}$$

$\Longrightarrow \forall g \in G: \ \chi_\rho(g) = \overline{\chi_\rho(g)} \ \left(\overset{a)}{\Longleftrightarrow} \overline{\chi_{\rho^*}(g) = \chi_{\rho^*}(g)} \right)$

$\Longrightarrow \forall g \in G: \ \chi_{\rho^*}(g) \in \mathbb{R}$

$\overset{a)}{\Longrightarrow} \forall g \in G: \ \chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g)$

$\Longrightarrow (\mathbb{C}^n, \rho) \cong (\mathbb{C}^n, \rho^*)$

$\Longrightarrow \quad (\mathbb{C}^n, \rho) \cong (\mathbb{C}^n, \rho^*) \Longleftrightarrow \forall g \in G: \chi_{\rho^*}(g) \in \mathbb{R}$

67. zz: $\int_G \bar{\mu}_\rho^{qj} \mu_\rho^{pi} = \frac{1}{n} \delta_{ip}\delta_{jq}$

Analog zum endlichen Fall:

Betrachte die Abbildung:

(Integraleintragweise)

$$\bar{P}(i,j) = \int_G \rho_g P(i,j) \rho_g^{-1} \quad \text{, wobei } P(i,j) = E_{ij}$$

Behauptung: $\bar{P}(i,j) \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$

$$\rho_h \bar{P}(i,j) = \rho_h \int \rho_g P(i,j) \rho_g^{-1}$$

für alle $h \in G$

$$= \int_G \underbrace{\rho_h \rho_g}_{=\rho_{hg}} P(i,j) \underbrace{\rho_g^{-1} \rho_h^{-1}}_{=\rho_{hg}^{-1}} \rho_h = \bar{P}(i,j) \rho_h$$

$\Longrightarrow \exists \lambda_{ij} \in \mathbb{C}: \bar{P}(i,j) = \lambda_{ij} \mathbb{1}_n$, da $\mathrm{End}_G(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}\, \mathbb{1}_n$

Außerdem gilt:

$$\mathrm{tr}\, \bar{P}(i,j) = \mathrm{tr} \int_G \rho_g P(i,j) \rho_g^{-1} = \int_G \mathrm{tr}\, P(i,j) = \mathrm{tr}\, P(i,j) = \delta_{ij}$$

$\Longrightarrow \lambda_{ij} = \frac{1}{n} \delta_{ij}$

$$\bar{P}(i,j)_{pq} = \int_G \underbrace{[\rho_g]_{pi}}_{=\mu_\rho^{pi}} \underbrace{[\rho_g^{-1}]_{jq}}_{=\overline{[\rho_g]_{qj}} = \bar{\mu}_\rho^{qj}} = \lambda_{ij} \delta_{pq} = \frac{1}{n} \delta_{pq} \delta_{ij}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung