Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 09.10.2018
Blatt 1

Lineare Algebra II

Aufgabe 1.[je 1 Punkt] Berechnen Sie $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1}, τ^{-1}, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ und $\mathrm{sgn}(\tau)$, wobei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \in S_7.$$

Aufgabe 2.[2 Punkte] Bestimmen Sie alle $\sigma \in S_5$, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.[je 2 Punkte] Finden Sie jeweils geeignete $i, k \in \{1, \ldots, 9\}$, so dass die Permutation

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix}$ gerade bzw.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & i & 2 & 5 & k & 4 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ ungerade ist.

Aufgabe 4.[5 Punkte] Für $1 \leq i < n$ definieren wir die Permutation

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 & i+1 & i & i+2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Beweisen Sie für $1 \leq i \leq n-2$ die sogenannte *Zopfrelation*:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Aufgabe 5.[2 Punkte] Sei $A \in \mathrm{Mat}_{6\times 6}(K)$ eine Matrix mit Einträgen a_{ij}. Bestimmen Sie das Vorzeichen des Terms $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ in der Formel für die Determinante von A:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_6} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(6),6}$$

Aufgabe 6.[5 Punkte] Beweisen Sie, dass für folgende Determinante gilt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Bitte wenden!

Aufgabe 7.[2+2 Punkte] Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix} \text{ mit } \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2) \begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

Aufgabe 8 (Bonus).[8 Punkte] Das sogenannte Schiebepuzzle besteht aus 15 durchnummerierten Kacheln, die auf einem 4×4-Raster angebracht sind. Da eine Stelle frei bleibt, können diese Kacheln verschoben werden. Beispielsweise könnten wir die Kachel 9 in der folgenden Ausgangsposition nach unten verschieben.

3	9	8	1
13	■	12	4
14	6	11	2
15	10	5	7

$\longrightarrow$

3	■	8	1
13	9	12	4
14	6	11	2
15	10	5	7

Ziel des Spieles ist es, die Kacheln aufsteigend anzuordnen:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	■

(#)

Am Ende des 19. Jahrhunderts sorgte folgende Variante für eine starke Verbreitung dieses Puzzles. Die Aufgabe war, aus der Position (#) zu folgender Position zu gelangen, in der lediglich 14 und 15 vertauscht sind:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	■

Der selbsternannte Erfinder dieses Rätsels, Sam Lloyd, stachelte die Beliebtheit (und damit den Verkauf) dieses Puzzles noch weiter an, indem er ein Preisgeld von \$1000 für die Lösung dieser Aufgabe ausschrieb. Allerdings wurde dieser Betrag an niemanden ausgezahlt. Können Sie beweisen, wieso Sam Lloyd niemals um sein Geld fürchten musste?

Hinweis: Mit der Position (#) beginnend, versuchen Sie Spielzüge als Permutation aufzufassen – für diese mathematische Modellierung ist es sinnvoll, das leere Feld mit der Zahl 16 zu bezeichnen. Wie sieht die Permutation zu einem einzelnen Spielzug aus?
Am Ende des Spiels soll das leere Feld (bzw. die 16) wieder rechts unten sein. Was können Sie über die Gesamtlänge des Weges sagen, der von dem leeren Feld zurückgelegt wurde? Was ist die Signatur der entsprechenden Permutation?

Abgabe: Dienstag, 16.10.2018, 09:10 Uhr.