Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 11.12.2018
Blatt 10

Lineare Algebra II

Aufgabe 63.[4 Punkte] Sei $\big(V, (-\,,\,-)\big)$ ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum, (e_1, e_2) eine orthonormale Basis von V und $\mathcal{B} = (e_1, e_1 + e_2)$ eine weitere Basis. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, so dass $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Matrix $[f^*]_{\mathcal{B}}$, wobei f^* der zu f adjungierte Operator ist.

Aufgabe 64.[4 Punkte] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Matrix $S \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, so dass $J = S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie die Matrix J.

In den folgenden beiden Aufgaben sei $(U, \langle -, - \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Darüber hinaus bezeichnen wir mit $\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U) \mid f = f^*\}$ die Menge aller selbstadjungierten Operatoren von U.

Aufgabe 65.[2+2+3+4 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Beweisen Sie diese oder widerlegen Sie diese durch ein Gegenbeispiel.

(1) $\mathcal{F}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
(2) $\mathcal{F}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
(3) Sind $f, g \in \mathcal{F}$, dann auch $f \circ g \in \mathcal{F}$.
(4) Sei $f \in \mathcal{F}$, dann ist $h = \exp(if) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$ unitär.

Aufgabe 66.[5 Punkte] Seien $f, g \in \mathcal{F}$ mit $fg = gf$. Zeigen Sie, dass es dann eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von U gibt, bezüglich derer $[f]_{\mathcal{B}}$ und $[g]_{\mathcal{B}}$ Diagonalmatrizen sind.
Hinweis: Sei V ein Eigenraum von f. Was können Sie über $g(V)$ und $g(V^{\perp})$ sagen?
Bemerkung: Diese Aussage steht im Zusammenhang mit der Heisenbergschen Unschärferelation aus der Quantenmechanik.

Aufgabe 67.[4+7 Punkte] Seien $A, B \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ gegeben durch:

A Drehung um $\frac{\pi}{4}$ im Uhrzeigersinn um die y-Achse
B Drehung um $\frac{\pi}{4}$ entgegen dem Uhrzeigersinn um die z-Achse

(1) Bestimmen Sie die Drehachse der Drehung BA.
(2) **(Bonus)** Bestimmen Sie den Drehwinkel von BA.
Hinweis: Verfolgen Sie eine *Spur*.

Abgabe: Dienstag, 18.12.2018, 9:10 Uhr.