Lineare Algebra II

Aufgabe 68.[4 Punkte] Seien K ein Körper, V und U zwei endlichdimensionale K-Vektorräume, $\dim_K(V) = m$ und $\dim_K(U) = n$, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von V und $\mathcal{D} = (d_1, \ldots, d_n)$ eine Basis von U. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Bil}(V \times U, K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(K),$$

die einer bilinearen Abbildung $\phi : V \times U \to K$ die Matrix $(\phi(b_i, d_j))_{i,j}$ zuordnet, ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

Aufgabe 69 (Bonus).[15 Punkte] In dieser Aufgabe geht es um das Spektrum des Operators $\nabla = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$.

(1) Sei $V = \mathbb{R}[x]$ mit $(-,-)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\, dx$$

Zeigen Sie, dass damit V zu einem euklidischen Vektorraum wird. Insbesondere muss gelten, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} h(x)\, dx < \infty$ für alle $h(x) \in \mathbb{R}[x]$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$H_n(x) \coloneqq (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Zeigen Sie, dass $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. $H_n(x)$ heisst das n-te *Hermitesche Polynom*.

(3) Wir definieren $\tilde{H}_n(X) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$. Folgendermaßen lässt sich zeigen, dass $\nabla(\tilde{H}_n(x)) = (2n + 1)\tilde{H}_n(x)$ ist.

(a) Sei $\rho = -\frac{d}{dx} + x$. Rechen Sie nach, dass $\nabla\rho - \rho\nabla = 2\rho$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$e^{\frac{x^2}{2}} \rho\left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\right) = e^{x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} f(x)\right)$$

(c) Sei g eine Eigenfunktion von ∇ zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass damit $\rho(g)$ ebenfalls eine Eigenfunktion von ∇ ist, allerdings zum Eigenwert $\lambda + 2$.

(d) Beweisen Sie, dass $\tilde{H}_n(x) = \rho^n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ ist und damit Eigenfunktion von ∇ zum Eigenwert $2n + 1$ ist.

(4) Zeigen Sie, dass $(H_n(x), H_m(x)) = 0$ gilt für $n \neq m$.

Bitte wenden!

Wir wünschen erholsame Weihnachtsfeiertage
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe: Dienstag, 08.01.2018, 9:10 Uhr.