Lineare Algebra II

Aufgabe 70.[4+4 Punkte] Finden Sie orthogonale Transformationen, die folgende quadratische Formen in Hauptachsenform bringen.

- $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3$

Aufgabe 71.[3+3+3 Punkte] Zeichnen Sie die folgenden Kurven in $\mathbb{R}^2$.

- $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0.$
- $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0.$
- $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0.$

Aufgabe 72.[2 Punkte] Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die folgende reelle quadratische Form

$$5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

positiv definit?

Aufgabe 73.[5 Punkte] Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgende symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Beweisen Sie, dass die quadratische Form $q_A(x_1, \dots, x_n)$ positiv definit ist.

Aufgabe 74.[6 Punkte] Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathsf{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Betrachten wir die reelle quadratische Form

$$q : V \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \mathrm{Tr}(X^2).$$

Berechnen Sie die Signatur von q.

Aufgabe 75 (Bonus).[8 Punkte] Beweisen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ Matrizen $T, T' \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, sowie obere Dreiecksmatrizen K, K' existieren, so dass gilt:

$$KT = A = T'K'.$$

Hinweis: Diese Aussage hat etwas mit dem Gram-Schmidt-Verfahren zu tun.

Abgabe: Dienstag, 15.01.2019, 9:10 Uhr.