

Lineare Algebra II

Aufgabe 76.[3 + 4 + 3 + 1 Punkte] Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir

$$J = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

- (1) Für alle $m \in \mathbb{N}$ berechnen Sie die Matrix J^m .
- (2) Berechnen Sie dann die Matrix $\exp(J)$.
- (3) Allgemeiner, für alle $t \in \mathbb{R}$ berechnen Sie die Matrix $\exp(tJ)$.
- (4) Sei $A = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_l) \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{pmatrix},$$

wobei $J_i = J_{n_i}(\lambda_i) \in \mathbf{Mat}_{n_i \times n_i}(\mathbb{R})$ für alle $1 \leq i \leq l$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Matrix $\exp(tA)$.

Aufgabe 77.[2 + 2 + 3 Punkte] Betrachten wir die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{C}).$$

Berechnen Sie dann

- (1) das charakteristische Polynom von A ,
- (2) die Eigenwerte sowie die entsprechenden Eigenräume von A ,
- (3) das Minimalpolynom von A .

Aufgabe 78.[4 Punkte] Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$V = V_{a,n} = \{ \exp(at) p(t) \mid p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) < n \}$$

und $f = \frac{d}{dt} : V \rightarrow V$. Berechnen Sie dann das Minimalpolynom von f .

Bitte wenden!

Aufgabe 79.[2 + 4 Punkte] Betrachten wir die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{5 \times 5}(\mathbb{C}).$$

Berechnen Sie dann

- (1) die Dimension und eine Basis des Eigenraums V_{-2} der Matrix A .
- (2) die Dimension und eine Basis des Hauptraums W_{-2} der Matrix A .

Abgabe: Dienstag, 22.01.2019, 9:10 Uhr.