Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und Dr. S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 22.01.2019
Blatt 14

Lineare Algebra II

Aufgabe 80.[3 Punkte] Lösen Sie das folgende System linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -8x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= -9x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

wobei $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

Aufgabe 81.[8 Punkte] Berechnen Sie die Jordansche Normalform sowie eine Jordansche Normalbasis der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 82.[3 Punkte] Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und A eine Quadratmatrix mit Einträgen aus K. Sei $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ das Spektrum von A, wobei $\lambda_i \neq \lambda_k$ für alle $1 \leq i \neq k \leq r$. Beweisen Sie, dass die Matrix A diagonalisierbar ist, genau dann, wenn

$$\mu(t) := (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_r)$$

das Minimalpolynom von A ist.

Aufgabe 83.[1 + 3 + 2 + 4 Punkte] Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ in der Standardbasis von $\mathbb{C}^5$ ist

$$[f] = A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(1) das Spektrum von f.
(2) die Jordansche Normalform von f.
(3) das Minimalpolynom von f.
(4) eine Jordansche Normalbasis von f.

Bitte wenden!

Aufgabe 84.[3 Punkte] Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ in der Standardbasis von $\mathbb{C}^6$ ist

$$[f] = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jordansche Normalform von f (jedoch keine Jordansche Normalbasis).

Abgabe: Mittwoch, 30.01.2019, 11:00 Uhr.