

Lineare Algebra II

Aufgabe 9.[3+3+3+4 Punkte] Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 10.[3 Punkte] Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$ die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A .

Aufgabe 11.[3 Punkte] Sei n eine *ungerade* natürliche Zahl und $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, so dass gilt: $A^t = -A$ (eine solche Matrix A heißt *schiefssymmetrisch*). Beweisen Sie, dass $\text{Det}(A) = 0$. Bleibt die Aussage richtig, wenn n eine gerade Zahl ist?

Aufgabe 12.[3+4+3 Punkte] Seien $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, wobei die Einträge von A und B eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) $b_{ij} = 2^{i-j}a_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.
- (2) $b_{ij} = a_{n+1-i, j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.
- (3) $b_{ij} = a_{n+1-i, n+1-j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen $\text{Det}(A)$ und $\text{Det}(B)$.

Aufgabe 13.[4 Punkte] Sei K ein Körper und $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ zwei beliebige Matrizen. Beweisen Sie die folgende Formel:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \text{Det}(A + B) \cdot \text{Det}(A - B).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 14 (Bonus).[3 Punkte] Sei T das Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ mit Ecken $(0, 0, 0)$, $(2, -1, 0)$, $(-1, 2, 1)$ und $(0, -1, 2)$. Was ist das Volumen von T ?

Aufgabe 15 (Bonus).[5 Punkte] Die Zahlen 58752, 36295, 79169, 68221 und 94435 sind durch 17 teilbar. Zeigen Sie, dass auch folgende Determinante durch 17 teilbar ist:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 9 & 5 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 9 \\ 6 & 8 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 16 (Bonus).[9 Punkte] Sei K ein Körper und m, n beliebige natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass für alle Matrizen $X \in \mathbf{Mat}_{m \times n}(K)$ und $Y \in \mathbf{Mat}_{n \times m}(K)$ gilt:

$$\text{Det}(I_m + XY) = \text{Det}(I_n + YX),$$

wobei I_m und I_n die Einheitsmatrizen der entsprechenden Größe sind.

Abgabe: Dienstag, 23.10.2018, 9:10 Uhr.