Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
PROF. I. BURBAN UND S. OPPER

WiSe 2018/19
Dienstag, 23.10.2018
Blatt 3

Lineare Algebra II

Aufgabe 17.[je 1 Punkt] Lösen Sie mit Hilfe der *Cramerschen Regel* die folgenden Gleichungssysteme:

$$(1)\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad (2)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 18.[4 Punkte] Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & \pi & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -7 & \ln(2) & e & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 21 & \sqrt[3]{3} & 6 & i & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 19.[3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Determinante der folgenden Matrix unabhängig von der Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 8 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & \lambda & 9 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 20.[2 Punkte] Wir bezeichnen mit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ die Menge aller Matrizen $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ mit $\det(X) = 1$. Zeigen Sie, dass es zu jeder Matrix $X \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ eine Matrix $Y \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ mit $XY = \mathrm{Id}_n$ gibt.

Aufgabe 21.[3+3 Punkte] Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ derart, dass $\alpha_i \neq \alpha_j$ für alle $1 \leq i \neq j \leq n$.

(1) Beweisen Sie, dass es genau ein Polynom $p(t) \in K[t]$ vom Grad $\deg(p) \leq n-1$ gibt, welches $p(\alpha_i) = \beta_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ erfüllt.

(2) Für alle $1 \leq i \leq n$ setzen wir

$$p_i(t) = \frac{(t-\alpha_1)\dots\widehat{(t-\alpha_i)}\dots(t-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_1)\dots\widehat{(\alpha_i-\alpha_i)}\dots(\alpha_i-\alpha_n)} \in K[t],$$

Bitte wenden!

wobei der $\widehat{\text{Hut}}$ bedeutet, dass der entsprechende Faktor fehlt. Beweisen Sie, dass

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i(t)$$

das gesuchte Polynom ist (*Lagrangesche Interpolationsformel*).

Aufgabe 22.[je 3 Punkte] Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_{10\times 10}(\mathbb{R})$:

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 & \cdots & 10 \\ 10 & 2 & 10 & \cdots & 10 \\ 10 & 10 & 3 & \cdots & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 10 & 10 & 10 & \dots & 10 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 10 \\ \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23 (Bonus).[11 Bonuspunkte] Sei $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A(k) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(k+1)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{k!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{1}{2!} \end{pmatrix}.$$

Hinweis:

(1) Leiten Sie mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes eine rekursive Formel für $D_k := \mathrm{Det}(A(k))$ her, d.h. drücken Sie D_k mit Hilfe der Zahlen D_i, $1 \leq i < k$, aus.

(2) Zeigen Sie, dass $D_k = (-1)^n \cdot b_k$, wobei b_k die k-te Bernoulli-Zahl ist, d.h. b_k ist der k-te Koeffizient der Taylorentwicklung der Funktion $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ um den Punkt 0. Nutzen Sie hierfür die Cauchy-Produkt-Formel zweier Reihen.

(3) Zeigen Sie, dass $b_1 = -\frac{1}{2}$ und $b_m = 0$ für alle ungeraden Zahlen $m \geq 3$. Zeigen Sie hierfür, dass die Funktion $g(x) := \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$ eine gerade Funktion ist, d.h. $g(x) = g(-x)$ gilt. Vergleichen Sie im Anschluss die Taylorentwicklungen um 0 von g und $\frac{x}{e^x-1}$.

Abgabe: Dienstag, 30.10.2018, 9:10 Uhr.