Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 30.10.2018
Blatt 4

Lineare Algebra II

Aufgabe 24.[2+3 Punkte] Seien R und S kommutative Ringe und $R \xrightarrow{\varphi} S$ ein Ringhomomorphismus.

(1) Beweisen Sie, dass $\mathsf{Ker}(\varphi) := \{r \in R \big| \varphi(r) = 0\}$ ein Ideal in R ist.
(2) Ist $\mathsf{Im}(\varphi) \subset S$ auch ein Ideal? Wenn Ihre Antwort „Ja“ ist, beweisen Sie dies, wenn Ihre Antwort „Nein“ ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 25.[4 Punkte] Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Beweisen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn R nullteilerfrei ist.
<u>Hinweis</u>. Für $a \in R \setminus \{0\}$, betrachten wir die Abbildung

$$R \xrightarrow{a\cdot} R, \; r \mapsto a \cdot r.$$

Wann ist diese Abbildung nicht surjektiv?

Aufgabe 26.[4 Punkte] Sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen, $F(K) = \{K \xrightarrow{f} K\}$ die K-Algebra K-wertiger Funktionen auf K. Beweisen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Homomorphismus von K-Algebren

$$K[t] \longrightarrow F(K)$$

surjektiv ist und bestimmen Sie seinen Kern.

Aufgabe 27.[2+3 Punkte] Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Dimension des *reellen* Vektorraums $V := \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq n} \,\big|\, p(\alpha) = 0\}$, wenn

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$
(2) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Aufgabe 28.[3+ 3 + 4 Punkte] Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen folgender rationaler Funktionen:

(1) $\dfrac{x^5 + x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$
(2) $\dfrac{1}{x^4 + 1}$
(3) $\dfrac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$

Aufgabe 29 (Bonus).[2+2+2 Punkte] Berechnen Sie die Stammfunktionen der rationalen Funktionen aus der vorherigen Aufgabe.

Bitte wenden!

Aufgabe 30 (Bonus).[8 Bonuspunkte] Vervollständigen Sie den Beweis des Partielbruchzerlegungsatzes aus der Vorlesung.

Hinweis: Angenommen, $f = c \cdot (t - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t - \alpha_k)^{m_k} \cdot q_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{l_s}$ ist eine Zerlegung des Polynoms $f \in \mathbb{R}[t]$, wobei gilt:

- $c \in \mathbb{R}$;
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ sind paarweise verschieden;
- $q_1, \ldots, q_s$ sind Polynome von Grad 2 mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\rho_i, \overline{\rho_i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Nehmen Sie nun an, dass

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{ij}}{(t - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{\mu_{ij} + t\nu_{ij}}{q_i^j} = 0,$$

für reelle Zahlen $\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}$. Zeigen Sie durch Multiplikation der Gleichung mit geeigneten Potenzen von $(t - \alpha_i)$ und Einsetzen $t = \alpha_i$, dass alle Koeffizienten λ_{ij} $(1 \leq j \leq m_i)$ verschwinden. Zeigen Sie zum Schluss durch Multiplikation der Gleichung mit geeigneten Potenzen von q_i und Einsetzen $t = \rho_i$ bzw. $t = \overline{\rho_i}$, dass die Koeffizienten μ_{ij}, ν_{ij} $(1 \leq j \leq l_i)$ verschwinden.

Abgabe: Dienstag, 06.11.2018, 9:10 Uhr.