Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 06.11.2018
Blatt 5

Lineare Algebra II

Aufgabe 31.[2+4+4 Punkte] Berechnen Sie das Spektrum sowie die entsprechenden Eigenräume folgender Matrizen aus $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$:

(1) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig

(2) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 32.[3+2+3 Punkte] Sei K ein beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$ sowie V, W zwei endlich dimensionale Vektorräume über K.

(1) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ gilt.

(2) Seien $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, falls $\dim(V) = \dim(W)$ ist, dann gilt $\mathrm{tr}(gf) = \mathrm{tr}(fg)$.

(3) Bleibt die Aussage (2) richtig, wenn $\dim(V) \neq \dim(W)$?

Aufgabe 33.[1 + 2 + 4 Punkte] Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Betrachten wir die folgende Menge

$$\mathfrak{sl}_n(K) := \left\{X \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K) \,\middle|\, \mathrm{tr}(X) = 0\right\}.$$

(1) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{sl}_n(K)$ ein K–Vektorraum ist und berechnen Sie seine Dimension.

(2) Sei $Y \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ eine beliebige Matrix. Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{sl}_n(K) \longrightarrow \mathfrak{sl}_n(K), \quad Z \mapsto \mathrm{ad}_Y(Z) := YZ - ZY$$

eine lineare Abbildung ist.

(3) Betrachten wir den Fall $K = \mathbb{C}$, $n = 2$ und

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Spektrum von ad_Y sowie die entsprechenden Eigenräume.

Aufgabe 34.[3 Punkte] Seien K ein Körper und $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Mengen aller Eigenvektoren von A und A^{-1} gleich sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 35 (Bonus).[8 Bonuspunkte] Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ bezeichnen wir

$$||A|| := n \cdot \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(1) Dann gelten die folgenden Eigenschaften:
- $||A|| = 0$ genau dann wenn $A = 0$.
- Für alle $\lambda \in K$ und $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ gilt $||\lambda \cdot A|| = |\lambda| \cdot ||A||$.
- Für alle $A, B \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ gilt: $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.
- Für alle $A, B \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ gilt: $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

(2) Beweisen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ die Reihe

$$1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^l}{l!} + \ldots$$

konvergent ist. Die Summe dieser Reihe wird $\exp(A)$ bezeichnet. Hinweis: Man muss zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists l_0 \in \mathbb{N} : \forall l \geq l_0$ gilt:

$$\left|\left| \frac{A^l}{l!} + \frac{A^{l+1}}{(l+1)!} + \ldots \right|\right| < \varepsilon.$$

Abgabe: Dienstag, 13.11.2018, 9:00 Uhr.