Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 13.11.2018
Blatt 6

Lineare Algebra II

Aufgabe 36.[3+4+4 Punkte] Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & 8 \\ 6 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

(1) Berechnen Sie das Spektrum von A sowie die entsprechenden Eigenräume.

(2) Berechnen Sie die Matrix $\exp(A)$.

(3) Finden Sie eine Matrix $X \in \mathsf{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C})$, für welche gilt: $X^2 = A$.

(∗) Wie viele solche Matrizen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 37.[4 Punkte] Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich dimensionaler K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Was ist der Zusammenhang zwischen den Spektren $\sigma(f)$ und $\sigma(f^2)$?

Aufgabe 38.[4 Punkte] Lösen Sie folgendes System linearer Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 4x_1(t) - 3x_2(t) \qquad x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) \qquad x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 39.[5+6 Punkte] Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender Systeme linearer Differenialgleichungen:

$$(1) \begin{cases} x'(t) &= -3x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y'(t) &= x(t) + z(t) \\ z'(t) &= 6x(t) - 6y(t) + 5z(t) \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= -2x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$$

Aufgabe 40 (Bonus).[3+3+3 Punkte] Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(1) Beweisen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ und $S \in \mathsf{GL}_n(K)$ gilt:

$$\exp\bigl(S^{-1}AS\bigr) = S^{-1}\exp(A)S.$$

(2) Seien $A, B \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$ zwei Matrizen, für die gilt: $AB = BA$. Beweisen Sie die Formel

$$\exp(A + B) = \exp(A)\cdot\exp(B).$$

(3) Bleibt die vorherige Aussage richtig für beliebige Matrizen $A, B \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(K)$? Wenn die Antwort „Ja“ ist, beweisen Sie es, wenn „Nein“ geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Bitte wenden!

Aufgabe 41 (Bonus).[6 Punkte] Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}).$$

Beweisen Sie, dass die Matrix A diagonalisierbar ist und berechnen Sie ihr Spektrum sowie die entsprechenden Eigenvektoren.
Hinweis: Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}).$$

Dann gilt: $A = a_1 I_n + a_2 B + \dots + a_n B^{n-1}$.

Aufgabe 42 (Bonus).[4+4 Punkte] Seien V, W zwei endlich dimensionale Vektorräume sowie $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ linear.

(1) Beweisen Sie, dass $\chi_{gf} = \chi_{fg}$ gilt, falls $\dim(V) = \dim(W)$.
(2) Was ist der Zusammenhang zwischen χ_{gf} und χ_{fg} wenn $\dim(V) \neq \dim(W)$?
Hinweis: Folgende Identität kann hilfreich sein:

$$\begin{pmatrix} I + AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I + BA \end{pmatrix}$$

Abgabe: Dienstag, 20.11.2018, 9:10 Uhr.