Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 20.11.2018
Blatt 7

Lineare Algebra II

Aufgabe 43.[5 Punkte] Für $n \in \mathbb{N}$ seien $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch die Regel $T(A) = A^t$. Was ist das Spektrum von T? Bestimmen Sie, ob T diagonalisierbar ist.

Aufgabe 44.[2+3+3 Punkte] Sei K ein Körper und $A_i, B_i \in \mathrm{Mat}_{m_i\times m_i}(K)$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq t$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(1) Falls $A_i \sim B_i$ für alle $1 \leq i \leq t$ ist, dann gilt auch für die Blockdiagonalmatrizen:
$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t \end{pmatrix}$$

(2) Für jede Permutation σ von $\{1, \ldots, t\}$ gilt:
$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{\sigma(t)} \end{pmatrix}$$

(3) Für $a, b, c, d \in K$ sind die Matrizen
$$X = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$
einander ähnlich. Bestimmen Sie explizit ein $S \in \mathrm{GL}_5(K)$ mit $X = SYS^{-1}$.

Aufgabe 45.[5 Punkte] Gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $\exp(A) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$? Finden Sie eine solche Matrix, oder beweisen Sie, dass es keine solche Matrix geben kann.

Aufgabe 46.[je 2 Punkte] Sei $(U, \langle -, - \rangle)$ ein Hermitescher $\mathbb{C}$-Vektorraum. Beweisen Sie für beliebige $f, g \in U$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften von adjungierten Operatoren:

(1) $(\mathrm{Id}_U)^* = \mathrm{Id}_U$

(2) $(f^*)^* = f$

(3) $(fg)^* = g^* f^*$

(4) $(\alpha f + \beta g)^* = \bar{\alpha} f^* + \bar{\beta} g^*$

Bitte wenden!

Aufgabe 47 (Bonus).[2+6 Punkte]

(1) Sei K ein Körper und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass $f^\vee\colon W^* \to V^*, g \mapsto g \circ f$ ebenfalls linear ist.

(2) Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein Hermitescher $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\gamma\colon V \to V^*, v \mapsto (-, v)$. Zeigen Sie, dass $f^\vee$ und der adjungierte Operator f^* in dem Sinne verträglich sind, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f^*"'] & V^* \arrow[d, "f^\vee"] \\ V \arrow[r, "\gamma"'] & V^* \end{tikzcd}$$

Das heißt, für $f^* = \gamma^{-1} f^\vee \gamma$ gilt $\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$.

Abgabe: Dienstag, 27.11.2018, 9:10 Uhr.