Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 27.11.2018
Blatt 8

Lineare Algebra II

Aufgabe 48.[2 Punkte] Bestimmen Sie alle Winkel des Dreiecks, das durch folgende Punkte im $\mathbb{R}^5$ gegeben ist:

$$A = (2,4,2,4,2) \quad B = (6,4,4,4,6) \quad C = (5,7,5,7,2)$$

Aufgabe 49.[3 Punkte] Sei $V \subset \mathbb{R}^4$ der folgende $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Basis von V sowie von $V^\perp$.

Aufgabe 50.[3 Punkte] Sei $U \subset \mathbb{C}^3$ der folgende $\mathbb{C}$-Vektorraum:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1+2i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2-i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Basis von U sowie von $U^\perp$.

Aufgabe 51.[5 Punkte] Sei $V \subset \mathbb{R}^5$ gegeben durch

$$V = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_3 + x_4 &=& 0 \\ 4x_2 + x_3 + 4x_5 &=& 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V^\perp$.

Aufgabe 52 (Bonus).[3+4+2 Punkte] Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(1) Sei $f \in C^0([a,b])$ mit der Eigenschaft $f(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeigen Sie

$$\int_a^b f(t)\,dt > 0 \quad \text{falls } f \neq 0 \text{ ist.}$$

(2) Sei $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweisen Sie, dass g Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_{-1}^1 g(t)\,dt = 0.$$

Bitte wenden!

(3) Sei $0 \neq f \in C^0([a,b])$ mit der Eigenschaft $f(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und $V = \mathbb{R}[t]_{<n}$ der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner n, wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass
$$\big(p(t), q(t)\big) = \int_a^b f(t)p(t)q(t)\,dt$$
ein Skalarprodukt auf V ist.

Aufgabe 53.[4 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}[t]_{<4}$ und
$$(\,-\,,\,-\,):\ V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p,q) \mapsto \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$
Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich des Skalarprodukts $(\,-\,,\,-\,)$.

Aufgabe 54.[3+3 Punkte] Seien L_1, L_2 zwei Unterräume eines euklidischen oder unitären Vektorraums V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(1) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$

(2) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$

Aufgabe 55 (Bonus).[5 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}[t]_{<3}$. Berechnen Sie eine orthonormale Basis von V ausgehend von der Basis $(1, t, t^2)$ bezüglich des Skalarprodukts
$$\big(p(t), q(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} p(t)q(t)\,dt$$
Hinweis: Es ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Abgabe: Dienstag, 04.12.2018, 9:10 Uhr.