Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

WiSe 2018/19
Dienstag, 04.12.2018
Blatt 9

Lineare Algebra II

Aufgabe 56.[je 2 Punkte] Im $\mathbb{R}^3$ seien ein Punkt x und ein Unterraum U gegeben durch:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Berechnen Sie

(1) die Projektion von x auf U,
(2) den Abstand von x zur Ebene U,
(3) den Winkel zwischen dem Vektor x und U.

Aufgabe 57.[2 Punkte] Seien K ein Körper und $V_1, \ldots, V_n$ K-Vektorräume. Beweisen Sie, dass

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = \big\{(v_1, \ldots, v_n) \;\big|\; v_j \in V_j \text{ für alle } 1 \leq j \leq n\big\}$$

ein K-Vektorrraum ist, wobei

- $(v_1, \ldots, v_n) + (v_1', \ldots, v_n') = (v_1 + v_1', \ldots, v_n + v_n')$
- $\lambda \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n)$.

Beweisen Sie, dass $\dim_K(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim_K(V_1) + \cdots + \dim_K(V_n)$, unter der Annahme, dass alle Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensional sind.

Aufgabe 58.[2 Punkte] Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $V_1, V_2 \subset V$ zwei Unterräume. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V, \; (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

linear ist und dass ihr Bild $V_1 + V_2 \subseteq V$ ist. Zeigen Sie, dass diese Abbildung genau dann injektiv ist, wenn gilt: $V_1 \cap V_2 = 0$.

Aufgabe 59.[4 + 2 Punkte] Seien U ein unitärer Vektorraum und $v, w \in U$.

(1) Beweisen Sie, dass $\|\langle v, w\rangle\| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (*Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung* für unitäre Vektorräume).
(2) Beweisen Sie die *Polarisierungsformeln*:

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\langle v, w\rangle = \|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \\ 2\,\mathrm{Im}\langle v, w\rangle = \|v + iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2. \end{cases}$$

Aufgabe 60.[5 Punkte] Berechnen Sie das n-te Fourier-Polynom der Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 61.[3 + 3 Punkte] Seien $\big(V, (\,-\,,\,-\,)\big)$ ein endlichdimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ und $A = [f]_{\mathcal{B}}$. Beweisen Sie, dass

(1) $f = f^*$ genau dann, wenn $A = A^t$.

(2) $f \in O(V)$ genau dann, wenn $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Aussage für unitäre Räume.

Aufgabe 62 (Bonus).[5 Punkte] Berechnen Sie den Abstand von $\cos^4(x)$ zu

$$\langle 1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cos(3x), \sin(3x) \rangle$$

bezüglich des Skalarprodukts $(f, g) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$.

Abgabe: Dienstag, 11.12.2018, 9:10 Uhr.