Proseminar p-adische Zahlen

Version vom 10. März 2022

Einführung

Zahlen sind die erste Objekte mit denen Grundschüler (oder Kindergartenkinder) in der Mathematikausbildung in Kontakt kommen. Beginnend von den natürlichen Zahlen kann der Zahlenbegriff nach und nach erweitert werden: negative Zahlen ($\mathbb{Z}$), Brüche ($\mathbb{Q}$), Wurzeln und transzedente Zahlen, wie die Kreiszahl π ($\mathbb{R}$) und schließlich – meist erst an der Hochschule – die komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$). Für fast alle Hochschulabsolventen in technisch-naturwissenschaftlichen Fächern und auch für viele Absolventen von Mathematik Studiengängen sind die komplexen Zahlen die allgemeinsten Zahlen, die im Laufe des Studiums behandelt werden.

In der reinen Mathematik und insbesondere der Zahlentheorie gibt es jedoch eine enorme Vielfalt anderer Zahlen. Eine für die Zahlentheorie besonders wichtige Art solcher Zahlen sind die p-adischen Zahlen, die wir in diesem Proseminar kennen lernen wollen. Diese haben die schöne Eigenschaft, dass sie genau wie die reellen Zahlen einen metrischen Raum, der vollständig ist, bilden. Zahlreiche Konzepte der Analysis, wie Konvergenz von Folgen, Reihen und Potenzreihen lassen sich daher auch auf den p-adischen Zahlen definieren und studieren.

Ziel des Proseminars soll es sein, zu verstehen, wie die p-adischen Zahlen sich natürlich aus einer Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ergeben und welche grundlegenden arithmetischen Eigenschaften sie haben. Danach soll das Augenmerk darauf leigen, wie sich Begriffe aus der Analysis (offene Mengen, Stetigkeit, Konvergenz, Reihen, Potenzreihen) auf die p-adischen Zahlen übertragen lassen und was Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Verhalten dieser Objekte sind.

Teil I: p-adische Zahlen und elementare arithmetische Eigenschaften

Vortrag 1 (NN): Die Konstruktion der reellen Zahlen

Im Kern des Vortrages soll es darum gehen, eine Überblick zu geben, wie man ausgehend von den natürlichen Zahlen zuerst die ganzen Zahlen, dann die rationalen und schließlich die rellen und komplexen Zahlen erhält. Ein besonderes Augenmerk soll dabei auf dem Übergang von rationalen zu rellen Zahlen liegen.

Literatur:
Der Vortrag soll sich maßgeblich an [HH, Apendix A] orientieren. Das entsprechende Kapitel 1.1 in [Ka] ist sehr knapp gehalten soll aber als Orientierung für den Abstraktionsgrad dienen. Insbesondere ist es wünschenswert zu vergleichen, wie sich [Ka][Theorem 1] und die Vervollständigungsprozedur in [HH] zueinander verhalten. Vom Vortragenden wird außerdem erwartet, [Ka][Kapitel 1.2 und Kapitel 1.3] sorgfältig durchzuarbeiten um darüber in Kenntnis zu sein, in welche Richtung sich das Seminar entwickelt.

Ausarbeitung:
Beweis von Thm 1.1 (Exercise 7 und 8)
Beweis von Proposition 1.3 (Exercise 4)
Exercise 5 als Beispiel für die Vervollständigung metrischer Räume

Vortrag 2 (NN): Normierte Körper

In diesem Vortrag werden normierte Körper betrachtet. Diese sind Körper deren Abstandsbegriff eine Reihe an Kompatibilitätseigenschaften mit den Körperaxiomen erfüllen müssen. Neben grundlegenden Eigenschaften solcher normierter Körper, werden insbesondere sogenannte *nicht archimedische Normen* betrachtet, die zu einem Abstandsbegriff mit überraschenden Eigenschaften führt.

Fragen zum Text:
Wie verhält sich der Begriff einer Norm in einem normierten Körper zum Begriff einer Norm in einem normierten Vektorraum?
Recherchieren Sie, was im Allgemeinen die Archimedische Eigenschaft ist und wie sie interpretiert werden kann.
Nach Propoistion 1.11 steht geschrieben, dass aus dem in [Ka][Kapitel 1.9] behandelten Satz von Ostrowski folgt, dass Proposition 1.11 alle zum Betrag äquivalenten Normen beschreibt. Braucht man hierfür wirklich den Satz von Ostrowski oder können sie auch mit den Erkenntnissen aus Prop 1.10 und 1.11 diese Behauptung beweisen?

Literatur:
[Ka][Kapitel 1.2]
Vom Vortragenden wird außerdem erwartet, Kapitel 1.3 und den ersten Teil von Kapitel 1.4 in [Ka] sorgfältig durchzuarbeiten um darüber in Kenntnis zu sein, in welche Richtung sich das Seminar entwickelt und ein Beispiel für ein nicht archimedischen normierten Körper zu kennen.

Ausarbeitung:
Exercises 9,11,14,15

Vortrag 3 (NN): Vervollständigung normierter Körper

In diesem Vortrag wird die Vervollständigung metrischer Räume (aus Vortrag 1) konkret am Beispiel normierter Körper (siehe Vortrag 2) durchgeführt. Die im Beweis verwendeten algebraischen Begriffe (Ring, Ideal,...) sollen zu Beginn des Vortrags ins Gedächtnis gerufen und motiviert werden.

Fragen zum Text:
Könnte man mit den Resultaten aus Kapitel 1.3 komplett auf die Konstruktion der reellen Zahlen aus Vortrag 1 verzichten? Oder müssen diese zuerst einmal separat konstruiert werden?

Literatur:
[Ka][Kapitel 1.3]
Vom Vortragenden wird außerdem erwartet, den ersten Teil von Kapitel 1.4 in [Ka] sorgfältig durchzuarbeiten, um darüber in Kenntnis zu sein, in welche Richtung sich das Seminar entwickelt und ein Beispiel für ein nicht archimedischen normierten Körper zu kennen.

Ausarbeitung:
Exercises 11,17,18,19

Vortrag 4 (NN): Der Körper der p-adischen Zahlen

In diesem Vortrag lernen wir den Protagonist des Proseminars kennen: Den Körper der p-adischen Zahlen. Dieser wird zuerst abstrakt als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich einer p-adischen Norm eingeführt. Dann wird eine ganz zentrale *kanonische Darstellung* p-adischer Zahlen eingeführt und deren Existenz und Eindeutigkeit beweisen. Schließlich sollen im Vortrag noch die ganzen p-adischen Zahlen eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften beschrieben werden.

Fragen zum Text:
Wie lässt sich der Abstandsbegriff der p-adischen Norm interpretieren, sprich welche Zahlen sind klein, welche groß, wann sind zwei Zahlen nah beieinander?
An welcher Stelle ist im Beweis von Prop 1.26 wichtig, dass p eine Primzahl ist?

Literatur:
[Ka][Kapitel 1.4]

Ausarbeitung:
Exercises 20,21,22,24

Vortrag 5 (NN): Grundlegende arithmetische Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$

In diesem Vortrag soll beleuchtet werden wie man mit den p-adischen Zahlen konkret rechnen kann. Sprich, wie können p-adische Zahlen, die in ihrer kanonischen Darstellung gegeben sind, addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden? Direkt damit verbunden ist die Frage wie sich rationale Zahlen p-adisch darstellen lassen.

Fragen zum Text:
1) Bei der Herleitung der Rechenformeln ist der Text in [Ka] etwas schwammig. Es werden keine klaren mathematischen Aussagen getätigt und nicht klar zwischen Aussage und Beweis unterschieden. Beheben Sie diesen Mangel und formulieren Sie zwei Propositionen zum Addieren und Multiplizieren von p-adischen Zahlen in ihrer kanonischen Darstellung und beweisen Sie diese.
2)Warum kann bei der Division a/b o.B.d.A. annehmen, dass $b \in \mathbb{Z}_p$ und dass $b_0 \neq 0$. Was wenn dies nicht der Fall ist?

Literatur:
[Ka][Kapitel 1.5 und 1.6]

Ausarbeitung:
obige Frage 1) und Exercises 26,27,28,30,32

Vortrag 6 (NN): Hensels Lemma

Dieser Vortrag bietet einen kleinen (!) Einblick in die zahlentheoretische Bedeutung der p-adischen Zahlen. Wir werden Hensels Lemma (genauer gesagt eine von vielen äquivalenten Versionen) formulieren und beweisen. Außerdem werden wir sehen, wie die Existenz von ganzzahligen Nullstellen modulo p mit der Existenz von Nullstellen in $\mathbb{Z}_p$ zusammen hängt.

Fragen zum Text:
1) Auf welche Klasse von Fragen (von denen Eingangs des Kapitels ein konkretes Beispiel diskutiert wird) kann am Ende des Kapitels eine sehr einfach Antwort gegeben werden?

Literatur:
[Ka][Kapitel 1.7]

Ausarbeitung:
Erstellen Sie einen detaillierten Vergleich zwischen den Newton-Verfahren im Reellen und dem Beweis-Prinzip von Hensels Lemma.
Exercise 36 und 38

Teil II: Topologische Eigenschaften der p-adischen Zahlen

Vortrag 7 (NN): Elementare Eigenschaften der Topologie von $\mathbb{Q}_p$ I

In diesem Vortrag sollen zuerst die Grundbegriffe der Topologie metrischer Räume (offene und abgeschlossene Mengen, Inneres, Rand) aus der Analysis 1 Vorlesung wiederholt werden. Im Kern des Vortrages sollen dann die topologischen Eigenschaften von Kugeln in den p-adischen Zahlen beschrieben werden.

Diese haben oft überraschend andere Eigenschaften, als die Kugeln in $\mathbb{R}$ oder auch im $\mathbb{R}^n$.

Literatur:
[Ka][Kapitel 2.1 bis einschließlich Prop. 2.7]
Die notwendigen Begriffe der Topologie metrischer Räume sind in [Ra][Kapitel 1.1] zusammengefasst.

Ausarbeitung:

Vortrag 8 (NN): Elementare Eigenschaften der Topologie von $\mathbb{Q}_p$ II

In diesem Vortrag stehen die etwas weiter fortgeschrittenen topologischen Begriffe wie Kompaktheit und Zusammenhang im Fokus. Auch bei diesen Begriffen hat die Topologie von $\mathbb{Q}_p$ im Vergleich zu $\mathbb{R}$ einige Überraschungen parat: So ist zum Beispiel $\mathbb{Z}_p$ kompakt und $\mathbb{Q}_p$ total unzusammenhängend.

Literatur:
[Ka][Kapitel 2.1 ab Def 2.8, Thm 2.15 kann ausgespart werden]
[Ra][Kapitel 1.4] kann als Referenz für die topologischen Grundbegriffen aus der Analysis 1 dienen. Beachten Sie, dass die Definition von "Kompaktheit" in [Ra] in der Quelle [Ka] "Folgenkompakt" genannt wird und als Definition von Kompaktheit die Überdeckungseigenschaft genutzt wird. Beide Definitionen sind in metrischen Räumen äquivalent (siehe z.B. [Ra][1.4.37]). Bitte folgen Sie in ihrem Vortrag der Notation aus der zentralen Quelle [Ka] und diskutieren Sie im Vortrag die Äquivalenz von Kompaktheit und Folgenkompaktheit.

Ausarbeitung:
Zeigen, Sie dass die zusammenhängenden Mengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind (vgl Exercise 53, [Ra][Korollar 1.4.4])

Vortrag 9 (NN): Cantor Mengen

Cantor Mengen sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, die ein Beispiel für sogenannte Fraktale sind. Sie haben topologisch sehr ähnliche Eigenschaften wie die p-adischen Zahlen. In der Tat soll in diesem Vortrag erklärt werden, dass $\mathbb{Z}_p$ homöomorph zur Cantormenge ist. Als Ausblick kann auch noch auf zweidimensionale euklidische Modelle von $\mathbb{Z}_p$ eingegangen werden.

Literatur:
[Ka][Kapitel 2.2 ggf Kapitel 2.3]

Teil III: Einführung in die p-adische Analysis

Vortrag 10 (NN): Folgen und Reihen

In diesem Vortrag soll die Konvergenz von Folgen und Reihen in $\mathbb{Q}_p$ diskutiert werden und mit den Resultaten aus $\mathbb{R}$ verglichen werden (Insbesondere sollte die Frage unbedingter Konvergenz und der Riemannsche Umordnungssatz wiederholt werden). Hierbei stellt sich – vielleicht für vieleüÜberraschend – heraus, dass die Theorie im p-adischen in vielen Aspekten weniger kompliziert als im Reellen ist.

Literatur:
[Ka][Kapitel 3.1]

Ausarbeitung:
Exercise 71 (1) und 72

Vortrag 11 (NN): p-adische Potenzreihen

Dieser Vortrag widmet sich den p-adischen Potenzreihen. Wie im (aus der Analysis-1 VL) bekannten reellen Fall gibt es den Begriff eines Konvergenzradiuses. Allerdings ist auch bei den Potenzreihen die Konvergenztheorie im p-adischen einfacher als im Reellen.

Literatur:
[Ka][Kapitel 3.2 bis Prop 3.17]

Vortrag 12 (NN): Differenzierbarkeit und analytische Fortsetzung

In diesem Vortrag lernen wir die Definition einer differenzierbaren p-adischen Funktion kennen und zeigen, dass die durch Potenzreihen definierten Funktionen differenzierbar sind. Außerdem werden wir sehen, dass für eine p-adische Potenzreihe, das Konvergenzgebiet nicht vergrößert werden kann, wenn die Reihe um einen anderen Punkt Taylor entwickelt wird. Dies steht im fundamentalen Kontrast zur Situation im Reellen.

Literatur:
[Ka][Kapitel 3.2 ab Definition 3.18 und Kapitel 3.3], Recherchieren Sie, falls nicht bekannt, den Begriff einer reel-analytischen Funktion und der analytischen Fortsetzung.

Ausarbeitung:
Exercise 78
Berechnen Sie (im Reellen) die Taylorreihe von $\log(1+x)$ und untersuchen Sie den Konvergenzradius. Folgern Sie die analogen Aussagen von $\log(C+x)$ für beliebiges $C > 0$

Vortrag 13 (NN): p-adische Exponentialfunktion und p-adischer Logarithmus

Der letzte Vortrag ist dem p-adischen Logarithmus und der Exponentialfunktion gewidmet. Diese teilen einige Gemeinsamkeiten mit ihren reellen Analoga, wie zum Beispiel die Funktionalgleichung, haben aber auch gravierende Unterschiede. Der auffällgste ist vielleicht, dass die p-adische Exponentialfunktion nicht auf ganz $\mathbb{Q}_p$ definiert werden kann.

Literatur:
[Ka][Kapitel 3.4 und 3.5]

Literatur

[Ka] Katok, Svetlana. *p-adic Analysis Compared with Real*, Vol 37. American Mathematical Soc., 2007

[HH] Hilgert, Ingrid, und Hilgert, Joachim. *Mathematik-ein Reiseführer* Spektrum Akademischer Verlag, 2012.

[Ra] Ramacher, Pablo. *Skript zur Analysis 1*, Philipps-Universität Marburg, 2021