Kompendium: Gewöhnliche Differentialgleichungen (allgemeine Theorie)
Abriss aus Analysis 2, Kapitel 10

Prof. Dr. Margit Rösler
Institut für Mathematik
Universität Paderborn

WS 2021/22

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Kompendium stellt einen Abriss von Kapitel 10 aus meiner Vorlesung Analysis 2 im Sommersemester 2021 dar. Die Inhalte sind gekürzt: die Beweise und die Ausführungen vieler Beispiele sind hier weggelassen. Es soll eine Ergänzung darstellen zum handschriftlichen Skript, kann dieses aber nicht ersetzen. Benutzen Sie beides zum Lernen bzw. Wiederholen!

Für Kommentare und Korrekturen bin ich jederzeit dankbar.

Paderborn, den 7. Oktober 2021,

Margit Rösler

Kapitel 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1 Einführung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (DG) ist eine Gleichung für eine Funktion $x = x(t)$ einer unabhängigen Variablen $t \in \mathbb{R}$ (of Zeit), in der Ableitungen von $x(t)$ auftreten.
Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitungen heißt die Ordnung der DG.
Bezeichungen:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t),\ \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t),\ x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}x(t).$$

Dagegen ist eine partielle Differentialgleichung eine Gleichung für eine Funktion mehrerer reeller Variablen und ihre partiellen Ableitungen. Beispiele aus der Analysis 2: Potentialgleichung, Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung.

Beispiele:

1. **Natürliche Wachstumsgleichung:**

   $$(*) \qquad \dot{x}(t) = a \cdot x(t);\ a \in \mathbb{R}; \quad \text{kurz: } \dot{x} = ax.$$

   Diese DG beschreibt das Wachstum einer Population/Substanz $x(t) \in \mathbb{R}$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ mit konstanter Wachstumsrate a.

   Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $x(t) = ce^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, eine Lösung der DG $(*)$. Umgekehrt ist jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von $(*)$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ von dieser Form (Siehe Skript).

   Beobachtung: Zu jedem $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau eine Lösung von $(*)$ mit $x(t_0) = x_0$, nämlich:

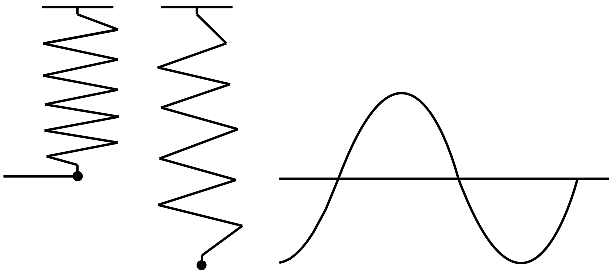
   $$x(t) = x_0\, e^{a(t-t_0)},\ t \in \mathbb{R}.$$

   Also: Die Lösung ist durch die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ eindeutig festgelegt.

2. **Die Schwingungsgleichung**

   $x(t)$ bezeichne die vertikale Auslenkung einer schwingenden Feder der Masse m zur Zeit $t \in \mathbb{R}$. Nach dem Hookschen Gesetz genügt $x(t)$ folgender DG 2. Ordnung:

   $$m\ddot{x}(t) = \underbrace{-kx(t)}_{\text{Rückstellkraft}} \quad ; \quad k > 0 : \text{elastische Konstante}$$



Betrachte also die DG

$$(*) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \;\; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Alle Funktionen

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sind Lösungen. (Tatsächlich ist jede Lösung von $(*)$ von dieser Form, das wird später gezeigt).

3. **Das Newtonsche Gesetz (Mechanik)**

   Auf ein Punktteilchen der Masse m am Ort $x(t) \in \mathbb{R}^3$ (zur Zeit t) wirke eine von $t, x(t)$ und der Geschwinidgikeit $\dot{x}(t)$ abhängige Kraft F. Dann erfüllt $x(t)$ die Bewegungsgleichung

   $$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}).$$

4. **Populationsmodelle (Biologie, Ökologie)**

   Es bezeichne $p(t)$ die Population einer Spezies zur Zeit t. Wir nehmen an, die Änderung der Population pro Zeiteinheit ist proportional zum vorhandenen Bestand. Dies führt auf die Wachstumsgleichung

   $$\dot{p} \;=\; r(t, p) \cdot p,$$

   mit einer von t und p abhängigen Wachstumsrate $r(t, p)$. Ist r konstant, so liegt exponentielles Wachstum vor (Beispiel 1).

   Beschränktes Wachstum (realistischeres Modell): es gibt eine Grenzpopulation $p_0 > 0$, so dass $r(t, p) \leq 0$ für $p \geq p_0$.

   Beispiel: Logistische Gleichung (Verhulst, 1838)

   $$\dot{p} = (a - bp) \cdot bp, \quad a, b > 0. \;\; p_0 = \frac{a}{b}.$$

   Diese wird später explizit gelöst.

   Beispiel: Räuber-Beute-Modell (Lotka-Volterra, 1925/26)
   Dies ist ein System zweier gekoppelter Wachstumsgleichungen für den Bestand $x(t)$ einer Beutespezies und $y(t)$ einer Räuberspezies, jeweils zur Zeit t:

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y) \cdot x \\ \dot{y} &= (-\gamma + \delta x) \cdot y \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Das Modell ist nicht explizit lösbar, aber man kann viel über die qualitativen Eigenschaften der Lösungen aussagen, z.B. die Existenz von zeitlich periodischen Lösungen oder (zeitlich konstanten) Gleichgewichtslagen.

10.2 Gewöhnliche DG 1. Ordnung

Definition. Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* 1. *Ordnung* ist eine Gleichung der Form

$$(*) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{kurz:} \quad \dot{x} = f(t, x)$$

wobei $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen.
Explizit, mit $f = (f_1, \dots, f_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Falls $n = 1$, so spricht man von einer *skalaren* DG 1. Ordnung.

Unter einer Lösung der DG $(*)$ versteht man eine stetig differenzierbare Abbildung $x : I \to \mathbb{R}^n$ (kurz: $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$) auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(i) $(t, x(t)) \in G \quad \forall\, t \in I$

(ii) $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \forall\, t \in I.$

Bedingung (i) ist erforderlich, da f nur auf G definiert ist.
Im Kontext gewöhnlicher Differentialgleichungen n wir mit „Intervall" stets ein nichtentartetes Intervall, d.h. ein Intervall, das nicht nur aus einem Punkt besteht.

Geometrische Veranschaulichung: siehe Skript Seite 122.

Wichtiger Spezialfall: Autonome Systeme
Hierunter versteht man Systeme, bei denen die rechte Seite nicht explizit von t abhängt, also

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einem stetigen Vektorfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ω heißt auch der Phasenraum des Systems. f heißt das Richtungsfeld der DG. Jede Lösungskurve $t \mapsto x(t)$ muss so in Ω verlaufen, dass f in jedem Kurvenpunkt tangential an x ist.

Autonome Systeme sind bzgl. der Zeit translationsinvariant, d.h. ist $x : I \to \Omega$ eine Lösung und $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $y(t) := x(t - t_0)$ eine Lösung auf dem verschobenen Zeitintervall $I + t_0$. (Dies sieht man sofort durch Nachrechnen).

Oft betrachtet man ein **Anfangswertproblem (AWP)**:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \qquad \text{auf } G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x(t_0) &= x_0\,. \end{aligned}$$

mit vorgegebenen Anfangsdaten $(t_0, x_0) \in G$. Gesucht ist eine Lösung $x = x(t)$ auf einem Intervall I um t_0 mit $x(t_0) = x_0$.

10.3 Elementare Lösungsmethoden (für skalare DG 1. Ordnung)

(1) Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

Hierunter versteht man DG der Bauart

$$\dot{x} \;=\; g(t)\, h(x)$$

mit stetigen Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle.

Formale Lösungidee:
Angenommen es gelte $h(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in J$. Dann erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = g(t)\, h(x) \implies \frac{dx}{h(x)} = g(t)dt.$$

Integration mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ $(t_0 \in I, x_0 \in J)$ liefert:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)} \;=\; \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \qquad \text{mit} \quad x = x(t).$$

Löse die so erhaltene Gleichung dann nach $x(t)$ auf!

Präzisierung:

10.1 Satz. *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$(A) \quad \dot{x} = g(t)\, h(x), \quad x(t_0) = x_0$$

wobei $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ *stetig,* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *Intervalle,* $t_0 \in I$, $x_0 \in J$*. Ferner sei* $h(x) \neq 0$ *für alle* $x \in J$*. Dann gibt es ein offenes Intervall* $I' \subseteq I$ *mit* $t_0 \in I'$*, so dass* (A) *auf* I' *eine eindeutige Lösung* $x : I' \to J$ *besitzt. Man erhält sie aus*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{h(\xi)} \;=\; \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$$

durch Auflösen nach $x = x(t)$*.*

Zusatz: *Betrachte die DG*

$$\dot{x} \;=\; g(t)\, h(x) \qquad \textit{auf } I \times J$$

wobei $g \not\equiv 0$ *und* $h(x_0) = 0$ *für ein* $x_0 \in J$*. Dann ist* $x(t) = x_0$ $(t \in I)$ *eine konstante Lösung dieser DG.*
Ist umgekehrt $x(t) = x_0$ *eine konstante Lösung, so muß* $h(x_0) = 0$ *gelten.*

Beweis. Skript Seite 124f.

□

Beispiele (ausführlich ausgeführt im Skript, Seiten 125f):

(1) $\dot{x} \;=\; -\dfrac{x}{t}\,.$

Die einzige konstante Lösung ist $x(t) = 0$. Für das Anfangswertproblem $x(1) = x_0 > 0$ liefert Trennung der Variablen die Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{t}.$$

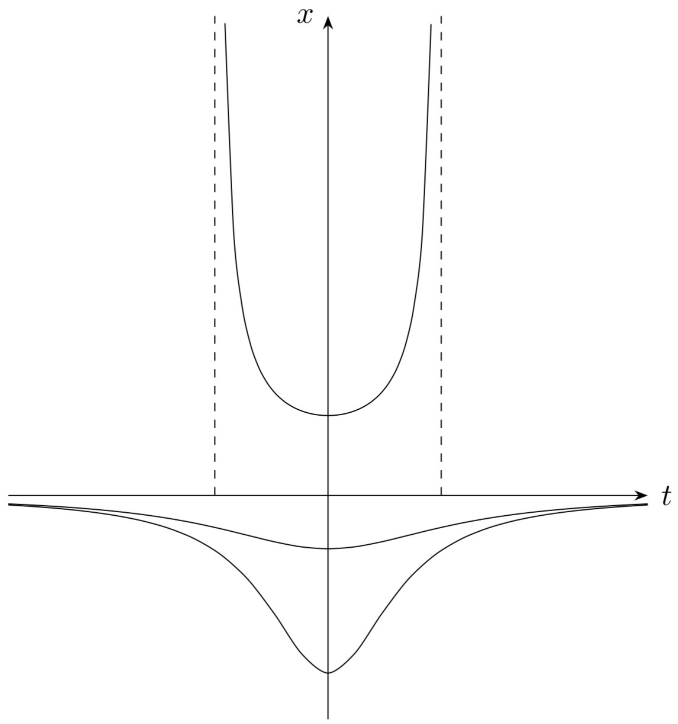
Der Graph der Lösung ist eine Hyperbel im 1. Quadranten, ihr maximales Definitionsintervall ist $(0, \infty)$.

(2) $\dot{x} = tx^2\,; \quad x(0) = x_0 \neq 0$. Trennung der Variablen liefert die Lösung

$$x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} - t^2}\,.$$

Ihr maximales Definitionsintervall ist

$$I_{max} = \begin{cases} \left(-\sqrt{\frac{2}{x_0}},\, \sqrt{\frac{2}{x_0}}\,\right), & \text{falls } x_0 > 0 \\ \mathbb{R}\,, & \text{falls } x_0 < 0. \end{cases}$$



Obwohl die rechte Seite der DG auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und sehr einfach gebaut ist, sind die Lösungen im Fall $x_0 > 0$ nur auf einem endlichen Zeitintervall definiert. Es gilt:

$$\lim_{t \longrightarrow \pm\sqrt{\frac{2}{x_0}}} x(t) = +\infty \qquad \text{die Lösung „explodiert“.}$$

Im Fall $x_0 < 0$ dagegen gilt: $\lim\limits_{|t| \longrightarrow \infty} x(t) = 0$.

In diesem Fall strebt die Lösung einer Gleichgewichtslage zu, nämlich der konstanten Lösung $x(t) \equiv 0$.

(2) (Skalare) lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine *(skalare) lineare DG 1. Ordnung* ist eine DG der Form

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die DG heißt *homogen*, falls $b = 0$, ansonsten *inhomogen*.

Lösung der assoziierten homogenen Gleichung

$$(H) \quad \dot{x} \,=\, a(t)x\,.$$

10.2 Satz. *Die Menge aller Lösungen von* (H) *ist gegeben durch*

$$L_H = \left\{x(t) = ce^{A(t)},\ c \in \mathbb{R}\right\}$$

wobei $A(t) = \int a(t)dt$ *eine (beliebige) Stammfunktion von* a *auf* I *ist. Jede Lösung von* (H) *ist auf ganz* I *definiert.*

Beachte: Die Lösungsmenge L_H ist ein eindimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis. Siehe Skript, Seite 127. □

Beispiel: Die bereits mittels Trennung der Variablen gelöste DG

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} \quad (t > 0)$$

ist linear und homogen mit $a(t) = -\frac{1}{t}$ auf $I = (0, \infty)$. Sie kann daher auch mit obigem Satz gelöst werden (siehe Skript, Seite 127).

Lösung der inhomogenen DG; Variation der Konstanten
Betrachte die inhomogene DG

$$(D) \quad \dot{x} \,=\, a(t)x + b(t)$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$.
Ansatz für eine einzelne, sogenannte *partikuläre* Lösung von (D):

$$x(t) = u(t) \cdot e^{A(t)} \quad (A \text{ wie oben}),$$

mit einer zu bestimmenden differenzierbaren Funktion $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Konstante c in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung wird also ersetzt durch eine (noch unbestimmte) Funktion. Dieser Ansatz trägt daher den Namen „Variation der Konstanten". Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (D) erhält man nach kurzer Rechnung (siehe Skript), dass $x = ue^A$ genau dann (D) löst, wenn

$$\dot{u} = e^{-A}b.$$

Eine partikuläre Lösung x_p von (D) ist daher gegeben durch

$$x_p(t) \,=\, u(t)\, e^{A(t)}, \quad t \in I$$

mit einer beliebigen Stammfunktion u von $e^{-A}b$.

10.3 Satz. *Sei* $x_p \in C^1(I)$ *eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (D) (zu bestimmen mit Variation der Konstanten). Dann ist die Menge aller Lösungen von (D) gegeben durch*

$$L = x_p + L_H \,=\, \left\{x_p(t) + c\, e^{A(t)},\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dabei bezeichnet wieder L_H *den Lösungsraum der assoziierten homogenen Gleichung. Alle Lösungen von (D) sind auf ganz* I *definiert.*

Beachte: L ist ein eindimensionaler affiner Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R})$.

Beweis. Skript Seite 128. □

10.4 Korollar. *Jedes AWP*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),\ x(t_0) = x_0 \qquad (t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R})$$

hat genau eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R})$.

Beispiel: $\dot{x} = 2tx + t$.
Durch Lösen der homogenene Gleichung $\dot{x} = a(t)x$ und anschließende Variation der Konstanten erhält man, dass diese (inhomogene lineare) DG die folgende allgemeine Lösung hat:

$$x(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösung des AWP mit $x(0) = 1$ erhält man durch Einsetzen: $c = \frac{3}{2}$. Details siehe Skript, Seite 129.

10.5 Beispiel. Die Bernoullische DG.

$$(B) \qquad \dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha \qquad \text{(nichtlinear!)}$$

wobei $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ eine Konstante.
$x \equiv 0$ ist eine konstante Lösung.
Gesucht: Positive Lösungen von (B).
Setze, unter der Annahme $x(t) > 0$: $y(t) := x(t)^{1-\alpha}$.
Einsetzen in (B) liefert eine DG für y:

$$x = y^{\frac{1}{1-\alpha}} \implies \dot{x} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \dot{y} \quad \implies$$
$$\dot{x} - ax - bx^\alpha = \frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \big(\dot{y} - (1-\alpha)ay - (1-\alpha)b\big).$$

Es folgt:

$$x \,\text{löst}\, (B) \iff \dot{y} = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t).$$

Somit ist die Bernoullische DG auf eine *lineare* DG für y zurückgeführt.

Konkretes Beispiel: Die Logistische DG (vgl. Abschnitt 1.1).

$$\dot{x} = (a - bx) \cdot x, \quad a, b > 0 \text{ konst.}$$

Es handelt sich um eine Bernoullische DG mit $\alpha = 2$. Die assoziierte lineare DG für $y = \frac{1}{x}$ ist

$$(*) \qquad \dot{y} = -ay + b.$$

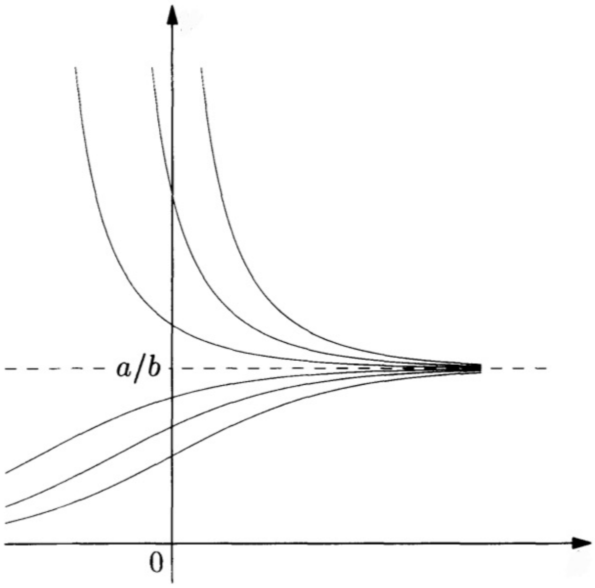
Als allgemeine Lösung von $(*)$ erhält man (mit Lösung der homogenen Gleichung und Variation der Konstanten, siehe Skript, Seite 130):

$$y(t) = \big(c + \int be^{at}\,dt\big)e^{-at} = \frac{b}{a} + ce^{-at},\ c \in \mathbb{R}.$$

Es folgt

$$x(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}}\,.$$

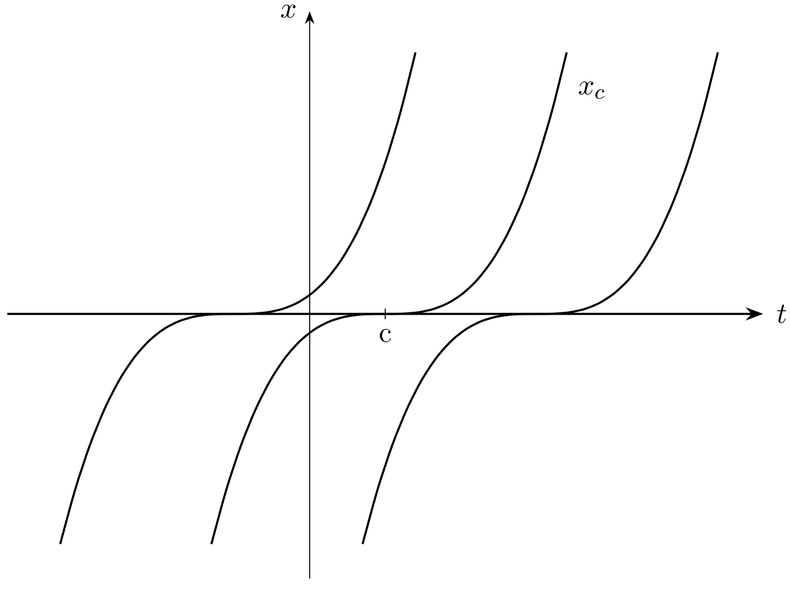
Im Fall $c \geq 0$ ist die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und positiv. Falls $c < 0$, so ist die Lösung nur auf dem Intervall $\Big(-\frac{1}{a}\ln\Big(-\frac{b}{ac}\Big), \infty\Big)$ definiert, und dort ebenfalls positiv.



Bisher hatten wir es mit eindeutig lösbaren Anfangswertproblemen zu tun. Das muss aber nicht immer so sein!
Kritisch sind z.B. bei trennbaren DG $\dot{x} = g(t)h(x)$ Anfangswertprobleme der Form $x(t_0) = x_0$ dann, wenn $h(x_0) = 0$ und daher x_0 eine konstante Lösung ist.

Beispiel: $\dot{x} = |x|^{2/3}$ in $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Konstante Lösung: $x \equiv 0$.
Ferner: für jedes $c \in \mathbb{R}$ löst $x_c(t) := \frac{1}{27}(t-c)^3$ die obige DG, wie man durch Nachrechnen sieht. Es ist $x_c(c) = 0$, und dies zeigt, dass das AWP $x(c) = 0$ keine eindeutige Lösung besitzt. Es hat sogar in jeder noch so kleinen Umgebung von $(c, 0) \in G$ unendlich viele Lösungen, darunter die konstante Lösung $x \equiv 0$. Man sagt: die Lösungen verzweigen sich in der konstanten Lösung $x \equiv 0$.



Beachte, dass das AWP zu obiger DG mit $x(c) = 0$ nicht durch Trennung der Variablen lösbar ist, da $h(0) = 0$ für $h(x) = |x|^{2/3}$. Wir werden sehen, dass die Verzweigung der Lösungen in $x = 0$ nur dadurch auftreten kann, dass h zwar stetig, aber in keiner Umgebung von 0 Lipschitzstetig ist.

Bemerkung: Viele Differentialgleichungen, insbsondere Systeme und Differentialgleichungen höherer Ordnung, sind nicht explizit lösbar. Daher ist es wichtig, Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gewinnen, oder auch den maximalen Definitionsbereich und die qualitativen Eigenschaften von Lösungen mit geeigneten Methoden untersuchen zu können, z.B. ihr Langzeitverhalten.

Dabei reicht in vielen Belangen das Studium von Systemen 1. Ordnung, da Differentialgleichungen höherer Ordnung sich auf Systeme 1. Ordnung zurückführen lassen, siehe den nächsten Abschnitt.

10.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung: Reduktion auf Systeme 1. Ordnung

Wir betrachten eine skalare Differentialgleichungen n-ter Ordnung,

$$(*) \qquad x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

mit einer stetigen Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Gesucht ist eine n-mal stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, welche $(*)$ erfüllt, d.h. eine Lösung $x \in C^n(I, \mathbb{R})$.

Wir übersetzen die DG $(*)$ in ein System 1. Ordnung durch Einführung von Hilfsvariablen:

$$\begin{aligned} y_1 &:= x \\ y_2 &:= \dot{x} \\ &\vdots \\ y_n &:= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

und $y := (y_1, \dots, y_n)$.

(I) Ist $x \in C^n(I, \mathbb{R})$ eine Lösung von $(*)$, so ist $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und erfüllt folgendes System 1. Ordnung:

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= y_n \\ \dot{y}_n &= F(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Kurz:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad \text{mit} \quad f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ F(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

(II) Umgekehrt: Sei $y = (y_1, \ldots, y_n)$ Lösung des Systems $(**)$. Dann ist

$$y_2 = \dot{y}_1,\ y_3 = \ddot{y}_1, \ldots,\ y_n = y_1^{(n-1)}.$$

Also ist y_1 n-mal stetig differenzierbar und es gilt $y_1^{(n)} = \dot{y}_n = F(t, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$, das heißt y_1 löst $(*)$.

Konsequenz: die DG $(*)$ und das System $(**)$ sind äquivalent.

Übersetzen von Anfangswertproblemen:
Die Vorgabe von $y(t_0) = y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2}, \ldots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ für das System $(**)$ entspricht der Vorgabe von $x(t_0) = y_{0,1}$, $\dot{x}(t_0) = y_{0,2}$, $\ldots$ $x^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n}$ für die Ausgangs-DG $(*)$.

Für eine DG n-ter Ordnung gibt man daher als Anfangswerte vor:

$$x(t_0), \dot{x}(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0).$$

Beispiel: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (Schwingungsgleichung).

Anfangswertproblem dazu: $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$.

Äquivalentes System 1. Ordnung (mit $y_1 := x$, $y_2 := \dot{x}$):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 . \end{cases} \qquad \text{Kurz:} \quad \dot{y} = Ay \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.5 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Wir betrachten ein Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung (genauer ein System von Differentialgleichungen) 1. Ordnung mit stetiger rechter Seite:

$$(A) \quad \dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$$

wobei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, und $(t_0, x_0) \in G$.

Ferner bezeichnet $\|\,.\,\|$ stets eine beliebige Norm im $\mathbb{R}^n$.

Ein entscheidendes Hilfsmittel für das Studium dieses AWP ist die

Umformulierung des AWP in Integralform:
Sei $x : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, wo $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ und so, dass $(t, x(t)) \in G \ \ \forall t \in I$. Dann besteht die folgende Äquivalenz:

$$x \text{ löst das AWP } (A) \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall t \in I.$$

Dabei steht rechts ein $\mathbb{R}^n$-wertiges Integral. Dies folgt komponentenweise aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Definition (**Lipschitz-Bedingung**). Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz (-stetig) auf* G *bzgl.* x, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } (t, x), (t, y) \in G.$$

f heißt *lokal Lipschitz bzgl.* x, wenn jedes $(t_0, x_0) \in G$ eine offene Umgebung $U \subseteq G$ besitzt, so dass die Restriktion $f|_U$ Lipschitz bzgl. x ist. (Die Lipschitz-Konstante L wird dabei i.A. von U abhängen).

Ein wichtiges Kriterium, das eine lokale Lipschitzbedingung sichert:

10.6 Satz. *Sei $f : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar bzgl. der Variablen $x_1, \dots, x_n$. Dann ist f lokal Lipschitz auf G bzgl. x.*

Beweis. Siehe Skript, Seite 134f. □

Beispiel: Lineare Systeme

Hierunter versteht man Systeme der Form

$$(*) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)$$

mit stetiger Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und stetiger Inhomogenität $b = (b_1, \dots, b_n) : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Beachte: Die Stetigkeit von A und b ist äquivalent zur Stetigkeit aller Komponenten a_{ij} und b_i.

Die rechte Seite $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ ist nach Satz 10.6 lokal Lipschitz bzgl. x auf $I \times \mathbb{R}^n$.

Der einfachste Fall eines linearen Systems ist der Fall konstanter Koeffizienten und konstanter Inhomogenität:

$$\dot{x} = Ax + b \quad \text{mit konstanten } A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in \mathbb{R}^n.$$

Wir erinnern an das Verzweigungs-Beispiel $\dot{x} = |x|^{2/3}$. Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ hat das AWP $x(t_0) = 0$ unendlich viele Lösungen auf jedem noch so kleinen offenen Intervall um t_0. Die Funktion $f(t, x) = |x|^{2/3}$ ist allerdings in keiner Umgebung von $(t_0, 0)$ Lipschitz bzgl. x!

Im Fall lokaler Lipschitzstetigkeit bzgl. x können Verzweigungen aber nicht auftreten:

10.7 Satz (Eindeutigkeitssatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz bzgl. x. Seien ferner $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der DG*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

auf einem (nicht notwendig offenen) Intervall I, die an einer Stelle $t_0 \in I$ übereinstimmen, d.h. $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Dann gilt $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \in I$.

Der Beweis dieses Satzes (Skript Seiten 136f) beruht auf dem

10.8 Lemma (Lemma von Gronwall). *Sei $g : I \to [0, \infty)$ eine stetige, nichtnegative Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die einer (impliziten) Abschätzung der folgenden Form genügt:*

$$(*) \quad g(t) \le a + b\left|\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right|.$$

mit $t_0 \in I$ und Konstanten $a, b \ge 0$. Dann folgt

$$g(t) \le a \cdot e^{b(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Insbesondere: Falls $a = 0$ in $(*)$, so folgt $g \equiv 0$.

Das Lemma von Gronwall ist auch in anderen Zusammenhängen nützlich, etwa um Wachstumsbeschränkungen für die Lösungen von Differentialgleichungen zu gewinnen (siehe die Übungen in Analysis 2).

Konsequenz: In der Situation des Eindeutigkeitssatzes können sich zwei Lösungen x_1, x_2 nicht schneiden, es sei denn, sie sind identisch, oder eine ist Fortsetzung der anderen. Dabei heißt eine Lösung $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ Fortsetzung einer Lösung $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, falls $I_1 \subseteq I_2$ und $x_2\big|_{I_1} = x_1$.

Wir kommen nun zur Frage der **Existenz** einer Lösung des AWP (A). Die äquivalente Integralfrom (für eine Lösung auf einem Intervall I) lautet:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall\, t \in I.$$

Die Grundidee besteht nun darin, diese Integralgleichung als Fixpunktgleichung für die Abbildung x, als Element eines geeigneten vollständigen metrischen Raums, aufzufassen. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert dann Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im betrachteten Raum und zugleich ein Verfahren zur approximativen Berechnung der Lösung (Picard-Iteration).

10.9 Lemma. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist der Raum*

$$X := C(I, \mathbb{R}^n) = \{u : I \to \mathbb{R}^n : u \text{ stetig}\}$$

ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\|_\infty := \sup_{t \in I} \|u(t)\|\,.$$

(Beachte, dass dieses Supremum endlich ist, weil I kompakt und u stetig ist.)

Beweis. Seiten 138, 139 im Skript. □

10.10 Satz (Satz von Picard-Lindelöf). *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und lokal Lipschitz bzgl. x. Dann existiert zu jedem Anfangsdatum $(t_0, x_0) \in G$ ein offenes Intervall $I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, so dass das AWP*

$$(A) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

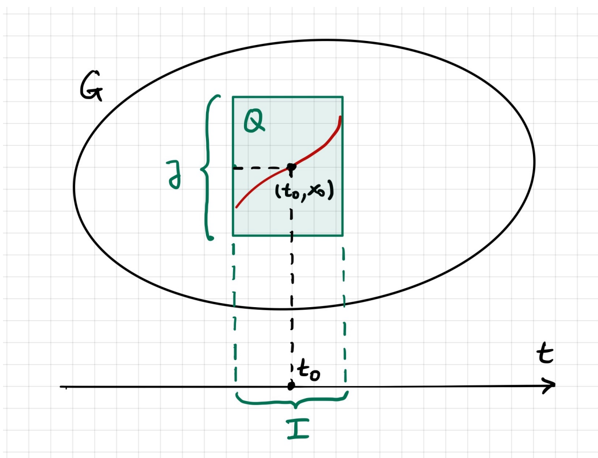
genau eine Lösung auf $I_\delta(t_0)$ besitzt.

Genauer: *Wähle einen kompakten Quader $Q = I \times J \subset G$ um (t_0, x_0), wobei*

$$I = \overline{I_\delta(t_0)},\ J = \overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\},$$

so dass f auf Q Lipschitz ist bzgl. x mit Lipschizkonstante $L > 0$; dabei sei $\delta > 0$ so klein, dass zusätzlich

$$\delta L < 1 \quad \text{und} \quad \delta \cdot \|f\|_{\infty, Q} \le r.$$



Dann besitzt das AWP (A) genau eine Lösung auf dem Intervall I. Diese verläuft in der Kugel J um x_0 und ist gleichmässiger Limes der Folge (x_k) der sogenannten Picard-Iterierten

$$x_0(t) := x_0\,; \quad x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_k(s)\big)ds \ \ (t \in I),\ \ k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Beweis. (Skizze) Die Menge

$$\mathcal{M} := C(I, J) = \{u \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|u(t) - x_0\| \le r \ \ \forall\, t \in I\}$$

ist als abgeschlossene Teilmenge von $C(I, \mathbb{R}^n)$ ein vollständiger metrischer Raum mit der von $\|\,.\,\|_\infty$ induzierten Metrik. Ferner sind die Voraussetzungen so eingerichtet, dass der Picard-Operator

$$P : u \mapsto Pu, \ \ Pu(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)ds \quad (t \in I)$$

die Menge $\mathcal{M}$ auf sich abbildet und kontraktiv ist. (Für Details siehe das Skript, Seite 140). Der Banachsche Fixpunktsatz liefert dann alle Aussagen wie behauptet.

□

Beachte: Selbst wenn die rechte Seite der DG $\dot{x} = f(t, x)$ auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert und überall lokal Lipschitz bzgl. x ist, ist die Lösung eines AWP $x(t_0) = x_0$ möglicherweise nur in einer kleinen Umgebung von t_0 definiert.

Beispiele: a) Beispiel 2 in Abschnitt 10.3 (1).

b) $\dot{x} = x^2, x(0) = x_0 > 0$. Trennung der Variablen liefert

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \quad \text{auf } \big(-\infty, \frac{1}{x_0}\big).$$

Die Lösung explodiert für $t \uparrow \frac{1}{x_0}$.

Bei Verzicht auf eine (lokale) Lipschitzbedingung an die rechte Seite der DG hat man zumindest noch einen lokalen Existenzsatz:

10.11 Satz (Satz v. Peano). *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann besitzt jedes Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

eine Lösung auf einem offenen Intervall um t_0.

Beweis. Siehe z.B. B. Aulbach, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Spektrum Verlag 1997. □

Zu Differentialgleichungen höherer Ordnung:

Wir betrachten eine skalare Differentialgleichungen n-ter Ordnung,

$$(*) \qquad x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

mit einer stetigen Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Das äquivalente System 1. Ordnung lautet

$$\dot{y} = f(t,y) \quad \text{mit} \quad f(t,y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ F(t,y) \end{pmatrix}, \ y = (y_1, \dots, y_n)$$

Man sieht: $f = f(t,y)$ ist genau dann (lokal) Lipschitz bzgl. y, wenn $F = F(t,y)$ lokal lipschitz ist bezüglich y.

Der Eindeutigkeitssatz 10.7 und der Satz von Picard-Lindelöf übertragen sich daher auf Anfangswertprobleme für $(*)$ gemäss Abschnitt 10.4.

Beispiel: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \ \omega > 0$. Die Funktionen

$$x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sind offenbar Lösungen. Das AWP $x(0) = a, \ \dot{x}(0) = b$ legt hier α und β fest und liefert die Lösung

$$x(t) = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t).$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz ist dies die einzige Lösung dieses AWP, da $F(t, y_1, y_2) = -\omega^2 y_1$ (sogar global) Lipschitz ist bzgl. $y = (y_1, y_2)$.

Maximale Lösungen

Betrachte wieder ein AWP für ein System 1. Ordnung,

$$(A) \quad \dot{x} = f(t,x), \ x(t_0) = x_0,$$

wobei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig sei ($G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$), und lokal Lipschitz bzgl. x.

Definition. Eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ von (A) heißt *maximal*, falls sie keine echten Forstsetzungen besitzt. (Dabei sind Lösungen wie immer auf nichtentarteten Intervallen definiert).

10.12 Satz. *Das AWP (A) besitzt genau eine maximale Lösung $x : I_{max} \to \mathbb{R}^n$. Das maximale Definitionsintervall I_{max} ist offen.*

Beweis. Skript Seite 142f. □

Unter geeigneten Voraussetzungen an f sind alle maximalen Lösungen global (d.h. für alle in Frage kommenden Zeiten) definiert:

10.13 Satz (Ein Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz). *Sei $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. f genüge für jedes kompakte Teilintervall $J \subseteq I$ einer (globalen) Lipschitzbedingung auf $J \times \mathbb{R}^n$:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \textit{für alle } t \in J, \ x, y \in \mathbb{R}^n$$

Dann hat jedes AWP

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \ \textit{ mit } t_0 \in I, \, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

eine eindeutige, auf ganz I definierte Lösung, d.h. jede maximale Lösung ist global definiert.

Beweis. Siehe Skript, Seite 143. Essentiell ist Aufgabe 3, Tutorblatt 15 aus Analysis 2. □

Beispiel: $\dot{x} = t|x|$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Die Bedingung des globalen E+E -Satzes 10.13 ist erfüllt (siehe Skript). Jedes Anfangswertproblem hat daher eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

Bemerkung: Manchmal betrachtet man Differentialgleichungen mit $\mathbb{C}$-wertiger rechter Seite und sucht $\mathbb{C}$-wertige Lösungen. Im Fall von Systemen:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f : G \to \mathbb{C}^n \text{ stetig, } G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \text{ offen.}$$

Gesucht sind Lösungen $x \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ auf Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$. Dabei ist

$$C^1(I, \mathbb{C}^n) = \{x : I \to \mathbb{C}^n : x \text{ stetig differenzierbar}\}.$$

Dabei heißt $x : I \to \mathbb{C}^n$ differenzierbar in $t \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} =: \dot{x}(t) \in \mathbb{C}^n$$

existiert. Äquivalent dazu ist, dass alle Komponenten x_i von x an der Stelle t differenzierbar sind.

Alle bisherigen Sätze gelten entsprechend, mit identischem Beweis. Lipschitzbedingungen werden dabei mit einer beliebigen Norm im $\mathbb{C}^n$ formuliert. Auch $\mathbb{C}^n$-wertige Integrale werden komponentenweise definiert, und es gilt die übliche Standardabschätzung (mit dem selben Beweis wie für $\mathbb{R}^n$-wertige Integrale in Analysis 2):

Für stetiges $f : [a,b] \to \mathbb{C}^n$ und eine beliebige Norm auf $\mathbb{C}^n$ gilt

$$\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \le \int_a^b \|f(x)\| dx.$$