Hausaufgaben: Blatt 1

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie den punktweisen Limes f der f_n.

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert für jedes $a \in (0,1)$.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass durch die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion definiert ist.

(b) Berechnen Sie nun f explizit.

Aufgabe H3 (7 Punkte)

Beweisen Sie:

1. (*Abelsche partielle Summation*) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zahlen oder Funktionen. Wir setzen $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k = A_1(f_1 - f_2) + \ldots + A_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + A_n f_n.$$

2. (*Abelsches Kriterium*) Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexe Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{C}$, die folgende Bedingungen erfüllen:

   (a) Für jedes $x \in D$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
   (b) Es gibt eine Schranke $M > 0$ mit $\|f_n\|_\infty \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (c) $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert gleichmäßig auf D.

   Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n$ gleichmäßig auf D.

3. (*Abelscher Grenzwertsatz*) Sei $P(x) := \sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ eine Potenzreihe, die für $x = R > 0$ konvergiert. Dann konvergiert sie gleichmäßig auf dem Intervall $[0,R] \subseteq \mathbb{R}$, und P ist stetig auf $[0,R]$.
   Hinweis: Abelsches Kriterium mit $f_n(x) = (\frac{x}{R})^n$.

Bitte wenden!

Aufgabe H4 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ das Integral

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx.$$

(b) Folgern Sie hieraus, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = 0.$$

Zusatzaufgabe (3 Bonuspunkte)
Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1/q, & \text{für } x = p/q \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N},\ p \leq q, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

eine Regelfunktion auf $[0,1]$ ist.

Erläuterung: Zusatzaufgaben werden zur erforderlichen Gesamtpunktzahl nicht eingerechnet und geben Extrapunkte.

Abgabetermin: Mittwoch, den 21.04.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).