Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks

Analysis 2

SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 10

Aufgabe H1 (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix und $N = \{x \in \mathbb{R}^n : x^t Ax = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass N abgeschlossen ist.

(b) Begründen Sie, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^t Ax}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ differenzierbar ist, und berechnen Sie ihr Differential.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Zusatzfrage zum Nachdenken: Warum steht diese Aussage nicht im Widerspruch zu Satz von Schwarz?

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U)$. Ferner seien $x, y \in U$ und $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine C^1-Kurve in U mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Dann gilt:

$$f(y) - f(x) = \int_a^b Df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt.$$

(b) Der Gradient einer C^1-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ sei von der Form

$$\nabla f(x) = a(x) \cdot x \quad \text{mit } a(x) \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert eine C^1-Funktion $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = F(\|x\|_2).$$

Hinweis: Zeigen Sie mit (a), dass f konstant auf den Sphären $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r\}$ ist.

Aufgabe H4 (3 Punkte)

Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) sei partiell differenzierbar auf U, und die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ seien beschränkt. Zeigen Sie, dass f stetig auf U ist.

Hinweis: Gehen Sie wie im Hauptkriterium für Differenzierbarkeit vor.

Zusatzaufgabe (3 Bonuspunkte)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $a \in U$. Wir wollen in dieser Aufgabe die Tangentialhyperebene $Tf(a)$ von f in a noch etwas genauer betrachten.

(a) Schreiben Sie die Tangentialhyperebene in der Form $Tf(a) = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + V$ mit einem geeigneten Untervektorraum V des $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Betrachten Sie nun die *Koordinatenlinien* von f durch $(a, f(a))$, die definiert sind als

$$\gamma_j(t) = \begin{pmatrix} a + te_j \\ f(a + te_j) \end{pmatrix}, \quad t \in (-r, r),\ j = 1, 2, ..., n$$

mit genügend kleinem $r > 0$. Zeigen Sie, dass jeder der Tangentialvektoren $\dot{\gamma}_j(0)$ in V liegt.

Abgabetermin: Mittwoch, den 23.06.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).