Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 11

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = -xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f und deren Typ.

(b) Untersuchen Sie f auf lokale und globale Extrema.

Aufgabe H2 (7 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit einer beliebigen Operatornorm.

(a) Begründen Sie, dass $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion ist.

(b) Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir schreiben $\operatorname{tr} X$ für die Spur von X. Zeigen Sie, dass

$$p(t) := \det(I + tX), \quad t \in \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion ist, und dass es eine Polynomfunktion $q = q_X$ auf $\mathbb{R}$ gibt, so dass

$$p(t) = 1 + t \cdot \operatorname{tr} X + t^2 q(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Leibniz-Formel.

(c) Beweisen Sie für das Differential von det: $D(\det)(I) = \operatorname{tr}$.

(d) Sei $A \in GL(n,\mathbb{R})$ und $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie, dass

$$D(\det)(A)H = \det A \cdot \operatorname{tr}(A^{-1}H).$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U,\mathbb{R})$.

(a) f habe ein lokales Maximum in $a \in U$. Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix $Hf(a)$ negativ semidefinit ist.

Hinweis: Widerspruchsbeweis.

(b) f heißt *strikt subharmonisch* auf U, falls $\Delta f(x) > 0$ für alle $x \in U$. Beweisen Sie: Ist f strikt subharmonisch auf U, so besitzt f keine lokalen Maxima auf U.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Beweisen Sie:

(a) Für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat die Funktion $g(t) = f(tv)$, $t \in \mathbb{R}$, ein lokales Minimum in $t = 0$.

(b) f hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum. Wo ist $f > 0$, wo $f < 0$?

Abgabetermin: Mittwoch, den 30.06.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).