Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks **Analysis 2** SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 12

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Exponentialfunktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$. Identifiziert man $\mathbb{C}$ in der üblichen Weise mit $\mathbb{R}^2$, so lässt sich g als eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen.

(a) Geben Sie f explizit an, und skizzieren Sie die Bilder der Geraden, die parallel zur x- bzw. zur y-Achse sind.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

(c) Zeigen Sie, dass f (und damit die Exponentialabbildung g) lokal invertierbar ist, aber keine globale Umkehrfunktion besitzt.

Aufgabe H2 (3 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit einer beliebigen Norm. Wir betrachten die (bekanntlich stetig differenzierbare) Inversenbildung

$$f\colon GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}), \quad X \mapsto X^{-1}.$$

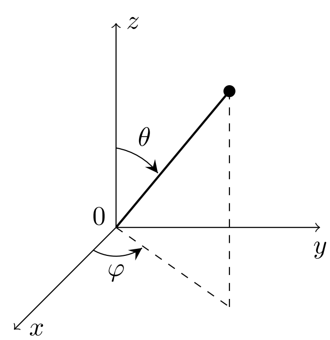
Bestimmen Sie das Differential von f.

Hinweis: Produktregel.

Aufgabe H3 (7 Punkte) *Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ (Kugelkoordinaten)*

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante für die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$



(b) Bestimmen Sie die Menge der Punkte mit singulärer Jacobi-Matrix.

(c) Es bezeichne S die Halbebene $\{(x,0,z) : x \le 0, z \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass

$$f\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus S$$

ein Diffeomorphismus ist.

Hinweis: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.

Bitte wenden!

Aufgabe H4 (4 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ und

$$F(r,\varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad r > 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

(a) Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\partial_r F$ und $\partial_\varphi F$ mittels $\partial_x f$ und $\partial_y f$ aus.

(b) Zeigen Sie:
$$\Delta f(x,y) = \partial_r^2 F(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 F(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r F(r,\varphi)$$
an der Stelle $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 7.07.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).