Universität Paderborn
Institut für Mathematik
M. Rösler, T. Luks

Analysis 2 SS 2021

Hausaufgaben: Blatt 13

Aufgabe H1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$

auf der Einheitssphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, d.h. unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Wir betrachten die Gleichung

$$f(x,y,z) := z^3 + z + xy - 1 = 0, \quad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie (ohne Verwendung des Satzes über implizite Funktionen), dass die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ zu jedem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x,y)$ hat.

(b) Begründen Sie unter Heranziehen des Satzes über implizite Funktionen, dass die Auflösung $z = g(x,y)$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist, und diskutieren Sie ihre Extrema.

(c) Bestimmen Sie $g'(1,1)$.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ durch eine differenzierbare Abbildung $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ mit $u(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{2}{5}$ und $v(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{1}{5}$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie die Jacobimatrix dieser Auflösung im Punkt $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

Aufgabe H4 (4 Punkte)

Wir untersuchen den Abstand des Punktes $P = (1,1,1)$ von den Punkten der Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x + y + z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass es in M Punkte gibt, für die dieser Abstand minimal wird, sowie solche, für die er maximal wird. Berechnen Sie den minimalen und den maximalen Abstand des Punktes P von M.

Abgabetermin: Mittwoch, den 14.07.2021, bis 13:00 Uhr, online in PANDA-Kurs L.105.12121 Analysis 2 (Übung).